[14] MEHMKE, R., *Über die Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene*, Z. Math. Phys. *35*, 1–24, 65–81 (1890).
[15] MÜLLER, E., und J. L. KRAMES, *Vorlesungen über Darstellende Geometrie*, Bd. 2: *Die Zyklographie* (Leipzig und Wien 1929).
[16] MÜLLER, E., und J. L. KRAMES, *Vorlesungen über Darstellende Geometrie*, Bd. 2: *Konstruktive Behandlung der Regelflächen* (Leipzig und Wien 1931).
[17] MÜLLER, H. R., *Kinematik* (Berlin 1963 [Sammlung Göschen]).
[18] MÜLLER, P. H., *Adjungierte Sekanten und Tangenten zweier Kreise*, El. Math. *18*, 11–13 (1963).
[19] NEUBERG, J., *Sur les figures semblablement variables*, Proc. Lond. math. Soc. *16*, 185–188 (1885).
[20] SCHAAL, H., *Von der Bewegungsgeometrie zur konstruktiven Kinematik*, Der Math.-Unterr. *10*, H. 3: *Vom Problem zum System II*, 48–72 (1964).
[21] SIEBER, H., *Über Drehungen um 60°*, Der Math.-Unterr. *11*, H. 3: *Abbildungsgeometrie*, V, 24–38 (1965).
[22] WUNDERLICH, W., *Höhere Radlinien*, Öst. Ing.-Arch. *1*, 277–296 (1947).
[23] ZACHARIAS, M., *Elementargeometrie und elementare nichteuklidische Geometrie in synthetischer Behandlung*, in *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. 3, *AB* 9 (Leipzig 1914–1931), S. 859–1172.
[24] BERKHAN, G., und W. FR. MEYER, *Neuere Dreiecksgeometrie*, in *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. 3, *AB* 10 (Leipzig 1914–1931), S. 1173–1276.
[25] SCHOENFLIES, A., *Kinematik*, in *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. 4, 1 B I 3 (Leipzig 1901–1908), S. 190–278.
[26] HOHENBERG, F. und J. TSCHUPIK, *Grundzüge der Darstellenden Geometrie*, in *Grundzüge der Mathematik*, Bd. II Kap. 11, S. 454-459 (Göttingen 1960).

Kleine Mitteilungen

Einige elementare kombinatorische Identitäten mit alternierenden Summen

1. Einleitung

Im Zentrum unserer Betrachtung steht die Identität

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} [x + (n-\nu) h]^m = \delta_{mn} h^n n! \quad [0 \leqslant m \leqslant n; \quad h \in R; \quad x \in R]^{1)}, \tag{1}$$

der man ohne weiteres auch die Gestalten

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (x + k h)^m = \delta_{mn} (-1)^n h^n n! \quad [0 \leqslant m \leqslant n; \quad h \in R; \; x \in R], \tag{1'}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (x - k h)^m = \delta_{mn} h^n n! \quad [0 \leqslant m \leqslant n; \quad h \in R; \; x \in R] \tag{1''}$$

geben kann [2]. Im Hinblick auf den bemerkenswerten Spezialfall

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (n-\nu)^n = n! \quad [n \geqslant 0] \tag{2}$$

[1]) R bezeichne die Menge der reellen Zahlen und δ_{mn} das KRONECKERsche Symbol. Für die ganze Betrachtung verabreden wir $0^0 = 1$.

[2]) Für Spezialfälle vergleiche zum Beispiel [3], Seite 97, Lemma 2.1; [7], (1) und (2); [8], S. 249, (17); [9], S. 496, zwischen (45) und (46); [10], S. 28, (4.14).

von (1) erhebt sich die Frage nach Beweisen, die dem besonders einfachen Charakter von (1) und (2) Rechnung tragen[3]). Für die in Abschnitt 2 auftretenden an und für sich interessanten Hilfsidentitäten (6) und (9) stellt sich die Frage abermals. Wir skizzieren nachfolgend einen Beweis, welcher (6), (9) und (1′) auf völlig elementare Weise aus dem Binomialsatz hervorgehen lässt; dabei werden wir auf ganz natürliche Weise zu einer Verallgemeinerung (10) von (1′) geführt.

2. Beweis

Aus dem Binomialsatz folgt direkt

$$r(0, n) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \delta_{0n} \quad [n \geqslant 0] . \tag{3}$$

Mit den Bezeichnungen

$$(x)_0 := 1 ; \ (x)_l := x(x-1) \cdot \ldots \cdot (x-l+1) \quad [l \geqslant 1] \ [x \in R] , \tag{4}$$

$$s(l, n) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (k)_l \quad [l \geqslant 0 ; \ n \geqslant 0] \tag{5}$$

ergibt sich $s(l, n) = 0 \, [0 \leqslant n < l]$, da in (5) alle Summanden verschwinden. Für $0 \leqslant l \leqslant n$ beginnt die Summation in (5) effektiv bei $k = l$, und mit $\binom{n}{k} (k)_l = \binom{n-l}{k-l} (n)_l \, [l \leqslant k \leqslant n]$ folgt $s(l, n) = (-1)^l (n)_l \, r(0, n-l)$, also insgesamt

$$s(l, n) = \delta_{ln} (-1)^n n! \quad [l \geqslant 0 ; \ n \geqslant 0]^{4)} . \tag{6}$$

Durch

$$x^m = \sum_{\mu \geqslant 0} t(m, \mu) (x)_\mu \quad [\text{alle } x \in R] \ [m \geqslant 0] \tag{7}$$

sind Zahlen $t(m, n)$ $[m \geqslant 0 ; n \geqslant 0]$ (in eindeutiger Weise) erklärt, und es gilt offensichtlich

$$t(m, n) = \delta_{mn} \quad [0 \leqslant m \leqslant n] , \tag{8}$$

so dass also m als obere Summationsgrenze in (7) auftritt. Nun ergibt sich die Gültigkeit von

$$r(m, n) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^m = (-1)^n n! \, t(m, n) \quad [m \geqslant 0 ; \ n \geqslant 0]^{5)} \tag{9}$$

durch Einsetzen von (7) im mittleren Ausdruck von (9), Änderung der Summationsreihenfolge und Anwendung von (6). Ausgehend von der linken Seite von (1′) erhält man durch binomische Entwicklung von $(x + k h)^m$, Veränderung der Summationsreihenfolge und Anwendung von (9)

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (x + k h)^m = (-1)^n n! \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m}{\mu} t(\mu, n) h^\mu x^{m-\mu} \quad [m \geqslant 0 ; \ n \geqslant 0] . \tag{10}$$

Im Falle $0 \leqslant m \leqslant n$ resultiert durch Anwendung von (8) unsere Behauptung (1′), welche ihrerseits mit (1) und (1″) aequivalent ist.

3. Schlussbemerkung

Die $t(m, n)$ sind die STIRLINGschen Zahlen zweiter Art[6]). Bedenkt man, dass die mit $(-1)^n$ multiplizierte linke Seite von (10) das n-te der Funktion $f(x) = x^m$ zugeordnete

[3]) Bekannt sind unter anderem eine Herleitung von (1) auf Grund des Differenzenkalküls ([2], Seite 8), eine solche von (2) durch kombinatorische Interpretation ([10], S. 28) und eine solche von (1″) durch einen geeigneten Differentiationsprozess ([8], S. 249).

[4]) Für den Fall $1 \leqslant l < n$ vergleiche [4], Seite 44, (9d).

[5]) (9) hat in der Sequenz der Identitäten (3), (6), (9), (1) die Schlüsselstellung inne. – Theorem I in [6] kann mit (9) mühelos bestätigt werden.

[6]) Für eine ausführliche Darstellung der Theorie dieser Zahlen vergleiche etwa [2], Seite 168ff.

Differenzpolynom ist, so ist mit (10) ein wichtiges Vorkommen der $t(m, n)$ aufgewiesen. Schliesslich zeigt die aus (9) folgende Darstellung

$$t(m, n) = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^m = \frac{1}{n!} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (n-\nu)^m, \tag{11}$$

dass im Falle $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$ die Anzahl der Zerlegungen einer m-elementigen Menge in n disjunkte nichtleere Teilmengen durch $t(m, n)$ gegeben ist[7]. JÜRG RÄTZ, Bern

LITERATURVERZEICHNIS

[1] H. HADWIGER, *Gruppierung mit Nebenbedingungen*, Mitt. Verein. Schweiz. Vers.-Math. *43*, 113–122 (1943).
[2] CH. JORDAN, *Calculus of Finite Differences*, Chelsea New York 1947 (2nd edition).
[3] R. C. KAO and L. H. ZETTERBERG, *An Identity for the Sum of multinomial Coefficients*, Amer. Math. Monthly *64*, 96–100 (1957).
[4] I. KAPLANSKY, E. HEWITT, M. HALL JR., and R. FORTET, *Some Aspects of Analysis and Probability*. Part 2: M. HALL JR., *A Survey of Combinatorial Analysis*, Wiley New York 1958.
[5] F. KLEIN-BARMEN, *Über eine bei der Zerlegung einer endlichen Menge auftretende elementare zahlentheoretische Funktion*, Jahresber. Deutsche Math.-Ver. *62*, 130–134 (1960).
[6] M. LOTKIN, *The Partial Summation of Series by Matrix Methods*, Amer. Math. Monthly *64*, 643–647 (1957).
[7] W. NEF, *Über die Differenz zwischen theoretischer und empirischer Verteilungsfunktion*, Z. Wahrsch.-lehre u. verw. Geb. *3*, 154–162 (1964).
[8] E. NETTO, *Lehrbuch der Kombinatorik*, Teubner Leipzig–Berlin 1927 (2. Aufl.).
[9] J. RIORDAN, *Inverse Relations and Combinatorial Identities*, Amer. Math. Monthly *71*, 485–498 (1964).
[10] H. J. RYSER, *Combinatorial Mathematics*, Wiley New York 1963.

Ein Kreistangentensatz

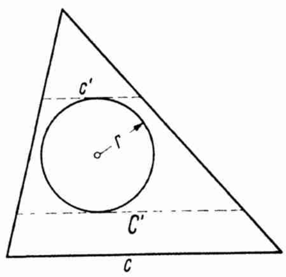
In der Lehre von den Transversalen und Dreieckskoordinaten sollte folgender Sachverhalt beachtet werden:

Tangentensatz: *An irgendeinen Kreis mit Radius r in der Ebene eines Dreiecks mit Seiten abc seien die seitenparallelen Tangentenstrecken $a'b'c'$ und $A'B'C'$ zwischen den Seiten oder ihren Verlängerungen gezeichnet. Dann gilt, mit ϱ = Inkreisradius,*

$$a'/a + b'/b + c'/c = 2 - r/\varrho \tag{1}$$

$$A'/a + B'/b + C'/c = 2 + r/\varrho \,. \tag{2}$$

Die Formel (1) mit $r = \varrho$ wurde, allerdings nur in einer speziellen Lage, in [1][1]) behandelt, während (2) dort vergessen wurde, da es in der speziellen Lage trivial ist: $1 + 1 + 1 = 2 + 1$. Für $r = 0$ wird (1) = (2), vgl. [2]. Der leichte Beweis des obigen Tangentensatzes beruht



[7]) Vergleiche [1], Seite 121, (27) und Fussnote S. 114, an welcher Stelle auf weitere Vorkommen der $t(m, n)$ hingewiesen wird; ferner [8], S. 283 und S. 170, (4a) und schliesslich [5].

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf die Literatur, S. 112.