Aufgaben

Aufgabe 505. Es sei I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Befindet sich I auf der Eulerschen Geraden, so ist das Dreieck gleichschenklig.

ESTHER SZEKERES, Sydney/Australien

Lösung: Es seien O und J Um- und Inkreiszentrum, S der Schwerpunkt des Dreiecks, M_1 und M_2 die Mitten der Seiten A_2A_3 und A_3A_1, ferner D_1 und D_2 die zweiten Schnittpunkte der Winkelhalbierenden A_1J und A_2J mit dem Umkreis. Die Geraden M_1D_1, M_2D_2 und (nach Voraussetzung) SJ gehen durch O. Die Dreiecke M_1M_2S und D_1D_2J sind also perspektiv. Wir nehmen an, dass homologe Geraden (wie M_1S und D_1J, das heisst eine Schwerlinie und eine Winkelhalbierende des gegebenen Dreiecks) nicht zusammenfallen (andernfalls wäre das Dreieck schon deshalb gleichschenklig und nichts mehr zu beweisen). Dann ist aber A_1A_2 die Desarguessche Gerade der perspektiven Dreiecke. Wegen $M_1M_2 \parallel A_1A_2$ ist dann auch $D_1D_2 \parallel A_1A_2$. Daraus folgt die Gleichheit der Bogen $\widehat{A_1A_3}$ und $\widehat{A_2A_3}$ und damit auch der Seiten $\overline{A_1A_3}$ und $\overline{A_2A_3}$. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Herr W. JÄNICHEN (Berlin-Zehlendorf) weist darauf hin, dass die Aussage der Aufgabe auch gilt, wenn der Inkreismittelpunkt durch einen der Ankreismittelpunkte ersetzt wird.

Weitere Lösungen (meistens durch Rechnung) sandten B. ANDERSEN (Hillerød), W. I. BLUNDON (Memorial Univ. of Newfoundland), H. FRISCHKNECHT (Berneck), H. GAEBELEIN (Helmstedt), L. KIEFFER (Luxemburg), F. LEUENBERGER (Feldmeilen), I. PAASCHE (München), O. REUTTER (Ochsenhausen), K. SCHULER (Rottweil).

Aufgabe 506. $y = y(x)$ sei eine in der Umgebung U des Nullpunktes beliebig oft differenzierbare Funktion. $y(0) = 0$, $y'(0) \neq 0$ werde vorausgesetzt. Man zeige, dass dann für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt

$$\left\{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\frac{x}{y(x)}\right]^n\right\}_{x=0} = \left\{\left[\frac{d}{y'(x)\,dx}\right]^n x\right\}_{x=0} = \left\{\frac{d^n}{dy^n}\,x(y)\right\}_{y=0},$$

wobei $x(y)$ die zu $y(x)$ inverse Funktion ist. G. BACH, Braunschweig

Lösung des Aufgabenstellers: Wir setzen voraus, dass $y(x)$ in U in eine konvergente Taylorreihe entwickelbar ist. Dann lässt sich $y(x)$ ins Komplexe fortsetzen und als eine an der Stelle $x = 0$ regulär analytische Funktion der komplexen Veränderlichen x ansehen, die wegen $y'(0) \neq 0$ in einer hinreichend kleinen Umgebung des Punktes $x = 0$ schlicht ist. Wir können also einen Kreis K um $x = 0$ so finden, dass $y(x)$ innerhalb und auf K analytisch ist und auf der abgeschlossenen Kreisscheibe K keinen Wert mehr als einmal annimmt. Dann ist das Bild des Randes R von K eine einfach geschlossene Kurve R' in der komplexen y-Ebene um den Nullpunkt.

Nach CAUCHY hat man

$$\left\{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\frac{x}{y(x)}\right]^n\right\}_{x=0} = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_R \left[\frac{x}{y(x)}\right]^n \frac{dx}{x^n} = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_R \frac{dx}{[y(x)]^n}.$$

Analog für die Umkehrfunktion

$$\left\{\frac{d^n}{dy^n}\,x(y)\right\}_{y=0} = \frac{n!}{2\pi i}\int_C x(y)\,\frac{dy}{y^{n+1}},$$

wobei C als geschlossene Kurve um den Nullpunkt der y-Ebene so gewählt werden muss, dass $x(y)$ innerhalb und auf C eine reguläre Funktion von y ist. Nach den oben angestellten Überlegungen ist R' eine solche Kurve, mit $C = R'$ kommt dann

$$\left\{\frac{d^n}{dy^n}\,x(y)\right\}_{y=0} = \frac{n!}{2\pi i}\int_{R'} x(y)\,\frac{dy}{y^{n+1}} = \frac{n!}{2\pi i}\int_R x\,\frac{y'(x)\,dx}{[y(x)]^{n+1}}$$

$$= -\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_R x\,d\left(\frac{1}{[y(x)]^n}\right) = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_R \frac{dx}{[y(x)]^n}$$

(durch partielle Integration). Damit ist alles gezeigt.