bei den Polynomen $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ und $x^2 + 1 = (x-i)(x+i)$ erzielt, durch Einführung einer uneigentlichen Seite d und Höhe h ein isomorpher Zerfall von sin- und tan-Bereich in Stücke und Formeln.

Der Beweis des Äquivalenzsatzes vereinfacht sich erheblich, wenn man Zeile 1) oder 1′) in der allgemeinen Gestalt $e^x\, e^y\, e^z\, e^t\, e^X\, e^Y\, e^Z\, e^T\, e^\xi\, e^\eta\, e^\zeta\, e^\vartheta$ etwa mit unbestimmten $x\,y\,z\,t$ schreibt. Unter Zuhilfenahme der beiden orthogonalen Matrizen

$$M = M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad N = N^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

stösst man nämlich auf die beiden Sechserzyklen

$$\begin{array}{l}
(\;x \quad y \quad z \quad t\;)\,M = (\;X \quad Y \quad Z \quad T)\\
(\;X \quad Y \quad Z \; -T)\,M = (\;\xi \quad \eta \quad \zeta \quad \vartheta)\\
(\;\xi \quad \eta \quad \zeta \; -\vartheta)\,M = (-x \; -y \; -z \quad t\;)\\[1ex]
(-x \; -y \; -z \; -t\;)\,M = (-X - Y - Z - T)\\
(-X - Y - Z \quad T)\,M = (-\xi \; -\eta \; -\zeta \; -\vartheta)\\
(-\xi \; -\eta \; -\zeta \quad \vartheta)\,M = (\;x \quad y \quad z \; -t\;)\\[1ex]
(\;x \quad y \quad z \quad t\;)\,N = (\;\xi \quad \eta \quad \zeta \quad \vartheta)\\
(-\xi \; -\eta \; -\zeta \quad \vartheta)\,N = (\;X \quad Y \quad Z \quad T)\\
(-X - Y - Z \quad T)\,N = (\;x \quad y \quad z \; -t\;)\\[1ex]
(-x \; -y \; -z \; -t\;)\,N = (-\xi \; -\eta \; -\zeta \; -\vartheta)\\
(\;\xi \quad \eta \quad \zeta \; -\vartheta)\,N = (-X - Y - Z - T)\\
(\;X \quad Y \quad Z \; -T)\,N = (-x \; -y \; -z \quad t\;)\,,
\end{array}$$

und hierin stellen bereits die ersten 3 Zeilen den Beweis des Äquivalenzsatzes dar. – Offenbar gibt es beliebig viele additive und multiplikative Beispiele $x\,y\,z\,t\,X\,Y\,Z\,T\,\xi\,\eta\,\zeta\,\vartheta$ allein in der Dreieckslehre. Wir wählten 2 naheliegende multiplikative: den sin-Bereich und den tan-Bereich. I. Paasche, München

Aufgaben

Aufgabe 501. Man bestimme den geometrischen Ort für das Zentrum einer räumlichen Inversion, welche drei gegebene Punkte in die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks abbildet. C. Bindschedler, Küsnacht

Lösung: Es seien P_1, P_2, P_3 die gegebenen Punkte, P_1^*, P_2^*, P_3^* deren Bilder bei einer Inversion mit Zentrum M und Inversionsradius r, ferner $\overline{MP_i} = \varrho_i$, $\overline{MP_i^*} = \varrho_i^*$. Dann ist

$$\varrho_i^* = r^2 \varrho_i^{-1}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke P_1MP_2 und $P_2^*MP_1^*$ folgt

$$\overline{P_1^*P_2^*} : \overline{P_1P_2} = \varrho_2^* : \varrho_1 = r^2 : \varrho_1\varrho_2\,. \tag{2}$$

Wegen der Forderung $\overline{P_1^*P_2^*} = \overline{P_2^*P_3^*} = \overline{P_3^*P_1^*}$ ergibt sich aus (2) $\overline{P_1P_2} : \varrho_1\varrho_2 = \overline{P_1P_3} : \varrho_1\varrho_3$ oder

$$\varrho_2 : \varrho_3 = \overline{P_1P_2} : \overline{P_1P_3} \text{ und entsprechend } \varrho_3 : \varrho_1 = \overline{P_2P_3} : \overline{P_2P_1},\ \varrho_1 : \varrho_2 = \overline{P_3P_1} : \overline{P_3P_2}. \tag{3}$$

Die Verhältnisse der Entfernungen des Inversionszentrums M von den Ecken des Dreiecks $P_1P_2P_3$ sind also gegeben; M liegt auf drei «Apollonischen Kugeln». Da aus zwei der Bedingungen (3) die dritte folgt, haben diese drei Kugeln einen gemeinsamen Schnittkreis und damit auch eine gemeinsame Zentrale. Dieser Kreis, dessen Mittelpunkt auf jener Zentralen liegt und dessen Ebene zu ihr senkrecht steht, ist der gesuchte geometrische Ort. W. Jänichen, Berlin-Zehlendorf

Weitere Lösungen sandten G. Geise (Dresden), K. Schuler (Rottweil). und K. Zacharias, (Berlin)

Aufgabe 502. Man bestimme die Zentren der Inversionen, welche vier gegebene Punkte des Raumes in die Ecken eines Parallelogramms abbilden.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Lösung des Aufgabenstellers: Liegen die gegebenen Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 nicht auf einem Kreis oder auf einer Geraden, so sei K die durch sie gehende Kugel oder Ebene. Das gesuchte Inversionszentrum muss auf K liegen. Die Kreise (123) durch $A_1 A_2 A_3$ und (143) durch $A_1 A_4 A_3$ müssen in gleich grosse Kreise übergehen; ebenso (234) und (214). Die Oberfläche von K wird durch (123) und (143) in vier Zweiecke zerlegt, von denen genau eines auf seinem Rand die Punkte A_2 und A_4 enthält. Es sei C der Kreis auf K durch A_1 und A_3, der die Winkel dieses Zweiecks halbiert, und $\overline{C}$ der analoge Kreis für das Kreispaar (234), (214). Jeder der beiden Schnittpunkte von C und $\overline{C}$ kann als Inversionszentrum gewählt werden. Denn C und $\overline{C}$ werden durch eine solche Inversion in Geraden abgebildet, und die beiden Kreise eines Paares gehen in symmetrisch zu diesen Geraden liegende Kreise über. Das Viereck $A_1A_2A_3A_4$ geht über in ein solches mit gleichen Gegenwinkeln, also in ein Parallelogramm. Ist die Reihenfolge der Ecken nicht vorgeschrieben, so sind sechs Lösungen vorhanden, die alle reell sind (wie man erkennt, wenn man etwa A_4 als unendlich fernen Punkt wählt).

Liegen die gegebenen Punkte auf einem Kreis oder auf einer Geraden g und trennen sich die Paare A_1, A_3 und A_2, A_4, so schneiden sich die beiden zu g orthogonalen Kugeln, von denen die eine durch A_1, A_3, die andere durch A_2, A_4 geht, in einem Kreis C. Jeder Punkt von C kann als Inversionszentrum gewählt werden, da durch eine solche Inversion die Kugeln in Ebenen, also g in einen zu diesen orthogonalen Kreis, transformiert werden. Das Parallelogramm wird ein Rechteck. Trennen sich A_1, A_3 und A_2, A_4 nicht, so ist ein eigentliches Parallelogramm nicht möglich (wohl aber zwei «plattgedrückte» mit $\overrightarrow{A_1'A_2'} = -\overrightarrow{A_3'A_4'}$). Das Inversionszentrum muss dann auf g selbst liegen (je zwei Lösungen bei gegebener Reihenfolge der Ecken).

Eine weitere Lösung sandte K. ZACHARIAS (Berlin).

Aufgabe 503. Es sei

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{n-1}, \quad b_1 = 1, \quad b_{n+1} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} b_k b_{n-k+1}.$$

Zeige, dass $f(z)$ auf der positiven reellen Achse eine singuläre Stelle hat.

J. H. VAN LINT, Eindhoven

Lösung: Die Reihe für $f(z)$ hat offenbar für reelle positive Werte von z lauter reelle positive Glieder. Ersetzt man b_n für $n > 1$ durch $c_n = 1/(n-1)$ bzw. durch $a_n = n/6^{n-1}$, so erhält man eine Majorante bzw. eine Minorante von $f(z)$. In der Tat ergibt sich aus $b_1 = c_1 = 1$ und der Induktionsannahme $b_i \leqq c_i \leqq 1$ $(i \leqq n)$ sofort $b_{n+1} \leqq n^{-2}\, n = c_{n+1}$. Ebenso erhält man aus $a_1 = b_1 = 1$ und $b_i \geqq a_i$ $(i \leqq n)$

$$b_{n+1} \geqq n^{-2} \sum_{k=1}^{n} k\,(n-k+1)\, 6^{1-n} = (n+1)\,(n+2)/n\, 6^n > (n+1)/6^n = a_{n+1}.$$

Für den Konvergenzradius r von $f(z)$ erhält man nun nach der Formel von CAUCHY-HADAMARD

$$(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_{n+1}})^{-1} = 1 \leqq r \leqq 6 = (\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_{n+1}})^{-1}.$$

H. MEILI, Winterthur

Eine weitere Lösung sandte W. SCHWARZ (Freiburg i. Br.).