Aufgabe 522. 1. Gibt es eine auf $I = \{x \text{ rational}, 0 < x < 1\}$ definierte reellwertige Funktion, die in jedem Punkt von I ein starkes lokales Extremum hat?

2. Gibt es eine auf $J = \{x \text{ reell}, 0 < x < 1\}$ definierte reellwertige Funktion, die in jedem Punkt von J ein starkes lokales Extremum hat?

W. Schwarz und J. Spilker, Freiburg i. Br.

Aufgabe 523. Man zeige, dass das Polynom in z

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n+k-i}{k} z^i + \sum_{i=0}^{k} \binom{n+k-i}{n} z^{1+2i} - z^{2+n+2k} \quad (n, k = 0, 1, 2, \ldots)$$

den Faktor $1 + z - z^2$ enthält.

I. Paasche, München

Aufgabe 524. $a_1 < a_2 < \cdots$ sei eine unendliche Folge natürlicher, paarweise teilerfremder Zahlen, von denen keine eine Primzahl ist. Man beweise

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} < \infty .$$

P. Erdös, Budapest

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. Willi Lüssy, Büelrainstrasse 51, Winterthur

1. Von einem rotationsförmigen Hohlkegel mit konstanter Wandstärke sind gegeben: die Höhe h des äusseren Mantels, die Höhe $h - t$ des inneren Mantels, mit $t = h\,x$. Bestimme den Abstand η seines Schwerpunkts von der äusseren Spitze.

▶ $$\eta = \frac{h}{4} \cdot \frac{8 - 6x + x^3}{3 - 3x + x^2} .$$

Für kleine Werte von x gilt

$$\eta = \frac{2}{3} h \left(1 + \frac{1}{4} x - \frac{1}{12} x^2 - \frac{1}{24} x^3 \cdots\right).$$

2. Zwei konfokale Ellipsen sind gegeben durch die Halbachsen a_1, b_1 und a_2, b_2 $(a_2 > a_1)$. Ein Strahl dreht sich um den einen Brennpunkt. Wie lang ist die grösste Strecke s, die von den beiden Ellipsen auf dem Strahl ausgeschnitten wird?

▶ Benütze die Polargleichung der Ellipse.

$$s = \frac{(b_2 - b_1)^2}{a_2 - a_1} .$$

3. Gegeben ist die Gerade $y = m\,x$ und die Abszisse h. Man suche einen Streckenzug $OUVH$ minimaler Länge, in dem die horizontalen Strecken OU und VH gleich lang sind.

▶ Für das Minimum findet man

$$u = \frac{h\,m^2}{4 + m^2} \quad \text{und} \quad \overline{UV} = h!$$