Remark. Since, for $n \geqslant 2$, $\alpha = 0$ is an admissible value the result of this note can be used for the evaluation of many integrals of the form $\int_0^\infty f(x)\,dx$. A discussion of integrals of this type using a contour similar to that in Figure 2 can be found in [3].

H. KAUFMAN and S. MELAMED, McGill University, Montreal

REFERENCES

[1] H. CARTAN, *Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables* (Addison-Wesley, 1963).
[2] L. L. PENNISI, *Elements of Complex Variables* (Holt, Rinehart and Winston, 1963).
[3] S. MELAMED and H. KAUFMAN, *Evaluation of Certain Improper Integrals by Residues*, (accepted for publication in American Mathematical Monthly.)

Aufgaben

Aufgabe 497. In einem Dreieck mit gegebenen Seiten a und b stehe die Verbindungsgerade von In- und Umkreismittelpunkt normal auf der Schwerlinie m_c. Man konstruiere das Dreieck.

F. LEUENBERGER, Küsnacht

1. Lösung: Die Dreiecksseite c ist das harmonische Mittel der Seiten a und b. Demnach ist c eindeutig aus a und b und somit das Dreieck eindeutig aus den drei Seiten konstruierbar[1]). Zum Nachweis obiger Eigenschaft von c seien die Ecken des Dreiecks durch die auf den Umkreismittelpunkt M bezogenen Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ dargestellt. Dann ist $\boldsymbol{m}_c = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - 2\,\boldsymbol{c})/2$ und, wenn I der Inkreismittelpunkt ist, $\boldsymbol{MI} = (a\,\boldsymbol{a} + b\,\boldsymbol{b} + c\,\boldsymbol{c})/(a + b + c)$. Aus der Bedingung $\boldsymbol{m}_c \perp \boldsymbol{MI}$ folgt

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - 2\,\boldsymbol{c})\,(a\,\boldsymbol{a} + b\,\boldsymbol{b} + c\,\boldsymbol{c}) = 0\,.$$

Daraus ergibt sich unter Berücksichtigung von $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{c}^2 = r^2$ (r = Umkreisradius) und $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b} = r^2 - c^2/2$ usw. die von r unabhängige Gleichung

$$c^2 + \frac{a^2 + b^2}{a + b}\,c - 2\,a\,b = 0$$

mit der einzigen positiven Lösung $c = 2\,a\,b/(a + b)$ (die zweite Lösung $c = -(a + b)$ ist negativ).

O. REUTTER, Ochsenhausen

Eine ähnliche Lösung sandte W. JÄNICHEN (Berlin).

2nd Solution: Let h_a, h_b, h_c denote the triangle's altitudes. The median m_c passes through the triangle's center of gravity G, and the distances from G to the triangle's sides have the sum $(h_a + h_b + h_c)/3$.

Now it is known[2]) that the locus of all points in a triangle whose distances from the three sides have the same sum is a line perpendicular to the line joining the triangle's incenter and circumcenter. Since m_c also passes through vertex C, we have $(h_a + h_b + h_c)/3 = h_c$, or equivalently

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Thus we can construct c and hence the required triangle.

J. STEINIG, Zürich

---

[1]) Determination: Ist etwa $a \leqq b$, dann genügt c als harmonisches Mittel von a und b der Ungleichung $a \leqq c \leqq b$. Da zudem $a + c > b$ sein muss (Dreiecksungleichung), folgt $a > (\sqrt{2} - 1)\,b$ als notwendige Bedingung für die Konstruierbarkeit des Dreiecks.

[2]) E. J. F. PRIMROSE, *A Triangle Property*, note 2967, Math. Gaz. *45*, 231–232 (1961).

Weitere Lösungen sandten G. BACH (Braunschweig), C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), H. FRISCHKNECHT (Berneck), I. PAASCHE (München), E. ROTHMUND (Wallisellen), W. SCHULER (Rottweil), H. SEYBOLD (München), W. VINZENZ (München).

Aufgabe 498. Es seien c_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ vier beliebige Kreislinien, die in dieser Reihenfolge durch einen gemeinsamen Punkt C gehen. Für die sechs Schnittwinkel φ_{ik} der Kreislinien c_i gilt dann

$$\sin\frac{1}{2}\varphi_{23}\sin\frac{1}{2}\varphi_{14}-\sin\frac{1}{2}\varphi_{13}\sin\frac{1}{2}\varphi_{24}+\sin\frac{1}{2}\varphi_{12}\sin\frac{1}{2}\varphi_{34}=0\,.$$

(Sind O_i, O_k die Zentren der Kreise c_i, c_k und ist S_{ik} einer ihrer Schnittpunkte, so sei φ_{ik} der Gegenwinkel der Seite $O_i\,O_k$ im Dreieck $O_i\,O_k\,S_{ik}$.)

Die angegebene Beziehung gilt gleichzeitig für die sechs (geeignet gewählten) Schnittwinkel $\varphi_{ik} = \sphericalangle\,(g_i, g_k)$ von vier allgemeinen Geraden g_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ in einer Ebene.

H. FRISCHKNECHT, Berneck

Lösung: Der gemeinsame Schnittpunkt C der vier Kreise (Radien r_1, r_2, r_3, r_4) sei Ursprung eines Koordinatensystems. Die Gleichung des i-ten Kreises $(i = 1, 2, 3, 4)$ sei

$$x^2 + y^2 + 2\,x\,r_i\sin 2\,\alpha_i - 2\,y\,r_i\cos 2\,\alpha_i = 0\,.$$

Die Tangente t_i im Ursprung hat die Steigung $\operatorname{tg} 2\,\alpha_i$. Für die Schnittwinkel im Sinne der Aufgabe erhält man dann $\varphi_{ik} = 2\,\alpha_i - 2\,\alpha_k$ oder $\varphi_{ik}/2 = \alpha_i - \alpha_k$. Setzt man nun in die in der Aufgabe gegebene Gleichung diese Werte ein und beachtet die Formel

$$2\sin u\,\sin v = \cos(u - v) - \cos(u + v)\,,$$

so erhält man eine Identität. K. SCHULER, Rottweil

Vier allgemeine Geraden der Ebene können durch Parallelverschiebung in vier sich in C schneidende Tangenten t_i übergeführt werden.

Weitere Lösungen sandten H. MEILI (Winterthur) und O. REUTTER (Ochsenhausen).

Aufgabe 499. Trouver toutes les centaines de nombres naturels successifs qui contiennent au moins 25 nombres premiers. W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Lösung: Wir zeigen zunächst, dass irgendeine 100-Folge sukzessiver ganzer Zahlen mindestens 76 Zahlen enthält, die durch wenigstens eine der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11 teilbar sind.

Zum Beweis bilden wir in der Menge der ganzen Zahlen Untermengen $M(p_k)$, deren Elemente n die Eigenschaften $p_k \mid n$, aber $p_i \nmid n$ für $p_i < p_k$ besitzen $(p_k = 2, 3, 5, 7, 11)$. Diese Mengen bestehen aus den Elementen: $M(2) = \{2\,g\}$, $M(3) = \{3\,(2\,g + 1)\}$, $M(5) = \{5\,(6\,g \pm 1)\}$, $M(7) = \{7\,(30\,g \pm 1);\ 7\,(30\,g \pm 7);\ 7\,(30\,g \pm 11);\ 7\,(30\,g \pm 13)\}$, $M(11) = \{11\,(210\,g \pm 1);\ 11\,(210\,g \pm 11);\ldots\ 11\,(210\,g \pm p)\ldots;\ 11\,(210\,g \pm 103)\}$, ($p$ bedeute jede Primzahl zwischen 11 und 103), wobei g alle ganzen Zahlen durchläuft. Ordnet man die Elemente von $M(p_k)$ als monotone Folge, dann wiederholen sich die Differenzen aufeinanderfolgender Elemente periodisch in Intervallen von der Länge $p_1\,p_2 \ldots p_k$, insbesondere ist $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$ in diesem Sinn gemeinsame «Periode» für die fünf oben angegebenen Mengen, so dass wir die weitere Untersuchung auf ein Intervall dieser Länge, etwa $1 \leqq n \leqq 2310$, beschränken können.

Aus obiger Darstellung der Elemente von $M(p_k)$ und unter Berücksichtigung der erwähnten Periodizitätseigenschaft ergibt sich unschwer, dass eine 100-Folge sukzessiver ganzer Zahlen genau 50 Elemente aus $M(2)$, mindestens 16 aus $M(3)$, mindestens 6 aus $M(5)$ und mindestens 3 aus $M(7)$ enthält, also mindestens 75 Zahlen, die durch eine der Primzahlen 2, 3, 5, 7 teilbar sind. In der geordneten Menge $M(11)$ treten im Intervall $1 \leqq n \leqq 2310$ zwei Fälle auf, wo die Differenz benachbarter Elemente grösser als 100 ist; es handelt sich um die Elementpaare 11 und 11^2 sowie $11 \cdot 199$ und $11 \cdot 209$. Sonst ist die Differenz benachbarter Elemente höchstens $8 \cdot 11 < 100$, da benachbarte Primzahlen