

Werk

Titel: Über Kegelschnitte mit gemeinsamem Krümmungselement und Erzeugung von Steinerzykl...

Autor: HOSCHEK, J.

Jahr: 1966

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?378850199_0021|log14

Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

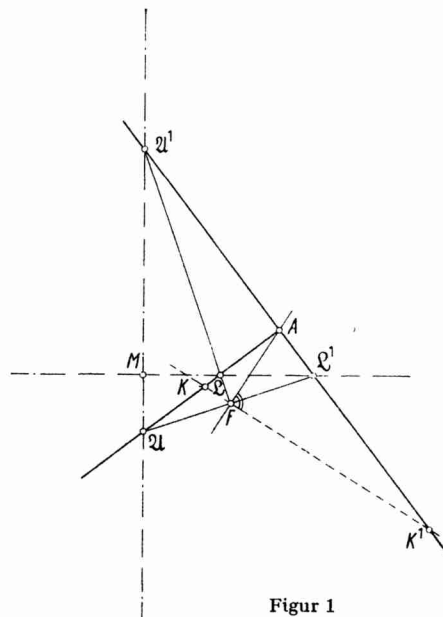
- [5] MICHAEL GOLDBERG, *Rotors in Polygons and Polyhedra*, Mathematics of Computation 14, 229–239 (1960).
 [6] ERNST MEISSNER, *Über die Anwendung von Fourier-Reihen auf einige Aufgaben der Geometrie und Kinematik*, Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft, Zürich 54, 309–329 (1909).

Über Kegelschnitte mit gemeinsamem Krümmungselement und Erzeugung von Steinerzykloiden

F. LAURENTI [3] [4] hat in zwei Untersuchungen gezeigt, dass die Achsen von Parabeln mit gemeinsamem Krümmungselement Steinerzykloiden als Hüllkurven besitzen. Dem analytischen Beweis von LAURENTI hat W. KICKINGER [2] eine synthetische Beweisführung gegenübergestellt, weiter lässt sich nachweisen [1], dass Ellipsen und Hyperbeln von konstantem Achsenverhältnis mit gemeinsamem Krümmungselement Steinerzykloiden als Hüllkurven ihrer Achsen besitzen. Diese letzte Aussage soll in der vorliegenden Untersuchung mit synthetischen Methoden bewiesen werden.

F. STEINER ([5], S. 205) hat folgende Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes bei Kegelschnitten angegeben:

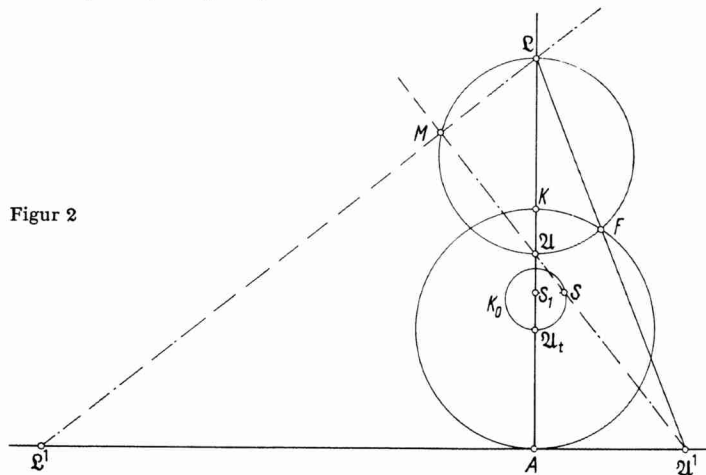
Treffen Tangente und Normale eines Punktes A eines Kegelschnitts die eine Achse desselben in \mathfrak{A} und \mathfrak{A}^1 , die andere in \mathfrak{L} und \mathfrak{L}^1 , errichtet man in dem Schnittpunkt $(\mathfrak{A} \mathfrak{L}^1, \mathfrak{A}^1 \mathfrak{L}) = F$ auf der Geraden AF die Senkrechte, so trifft dieselbe die Normale des Kegelschnitts in dem Krümmungsmittelpunkt.



Figur 1

Liegen Ellipsen vor, so ist K das Krümmungszentrum, werden Hyperbeln betrachtet, ist K^1 das Krümmungszentrum (siehe Figur 1). Die Achsen des Kegelschnitts werden dabei im Verhältnis $A\Omega/A\mathfrak{A} = b^2/a^2 = \lambda^2 = \text{const.}$ geschnitten. Die Geraden $\mathfrak{A}^1 M$, $\Omega^1 F$, $A\Omega$ sind Höhen des Dreiecks $\Omega^1 \Omega \mathfrak{A}^1$; der Mittelpunkt M des Kegelschnitts und der Punkt F liegen daher auf dem Thaleskreis über $\mathfrak{A}\Omega$, der Punkt F bei Ellipsen ausserdem auf dem Thaleskreis über KA bzw. bei Hyperbeln auf dem Thaleskreis über $K^1 A$, also im Schnitt der Kreise über $\mathfrak{A}\Omega$ und AK bzw. $A K^1$.

Durch Umkehr dieser Konstruktionsvorschrift von STEINER lässt sich eine Vorschrift \mathfrak{B} gewinnen, welche die Achsen von Kegelschnitten von konstantem Achsenverhältnis λ^2 mit gemeinsamem Krümmungselement liefert. Wir beschränken uns zunächst auf Ellipsen (s. Figur 2):



Figur 2

Für alle Scharkurven ist der Kreis KA fest, sein Durchmesser gleich dem Radius R des Krümmungselementes. Wegen $b^2/a^2 = A\Omega/A\mathfrak{A} = \lambda^2$ kann $A\mathfrak{A}$ nur im Bereich $A K/\lambda^2 \leq A\mathfrak{A} \leq AK$ liegen, während gleichzeitig für $A\Omega$ gilt $AK \leq A\Omega \leq \lambda^2 AK$. Wählt man innerhalb dieser Bereiche einen Punkt \mathfrak{A} , so kann mit $\lambda^2 A\Omega = A\mathfrak{A}$ sofort bestimmt werden. Wird nun der Kreis über $\mathfrak{A}\Omega$ gezeichnet, so erhält man als Schnittpunkt mit dem festen Kreis über AK den Punkt F . Man ziehe jetzt die Gerade ΩF , ihr Schnittpunkt mit der Tangente t des Krümmungselementes sei \mathfrak{A}^1 ; der Schnitt der Geraden $\mathfrak{A}^1 \mathfrak{A}$ mit dem Kreis über $\mathfrak{A}\Omega$ sei M . Die Geraden $M\Omega$ und $M\mathfrak{A}$ sind dann die gesuchten Achsen der Scharellipse, M ihr Mittelpunkt.

Nun muss noch gezeigt werden, dass die Geraden $M\Omega$ bzw. $M\mathfrak{A}$ Steinerzykloiden einhüllen. Hat der Punkt \mathfrak{A} seine tiefste Lage \mathfrak{A}_t ($\mathfrak{A}_t \mathfrak{A}_t = R/\lambda^2$) eingenommen, liegt die Achse $M\mathfrak{A}$ parallel zur Elementtangente; ist $A\mathfrak{A} = AK$, so steht die Achse $M\mathfrak{A}$ senkrecht zur Elementtangente. Die gesuchte Hüllkurve muss daher in K eine Spitze, in \mathfrak{A}_t einen Extremwert besitzen. Nun schneidet $M\mathfrak{A}$ den Kreis K_0 durch \mathfrak{A}_t mit dem Radius $AK(\lambda^2 - 1)/4\lambda^2$ immer so, dass $AS_1 = (AK + \lambda^2 A\mathfrak{A})/2\lambda^2$ ist, also S_1 die Strecke $\mathfrak{A}_t \mathfrak{A}_t$ halbiert. Damit ist aber schon gezeigt, dass die Hüllkurve der Geraden $M\mathfrak{A}$ eine Steinerzykloide ist, da auf der Gleichheit der Strecken $\mathfrak{A}_t S$ und $\mathfrak{A}_t S$ eine bekannte Konstruktion der Steinerzykloiden als Hüllgebilde von Geraden beruht (siehe zum Beispiel [6], Seite 180).