Aufgabe 519. Man beweise: Ist E eine projektive Ebene (wir verlangen nur, dass durch zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade geht, zwei verschiedene Geraden stets einen Schnittpunkt haben und dass es vier Punkte in allgemeiner Lage gibt), sind P, Q zwei verschiedene Punkte und g, h zwei verschiedene Geraden von E mit $P \in h$, $P \notin g$ und $Q \in g$, $Q \notin h$, ist schliesslich β eine involutorische Streckung mit dem Zentrum P und der Achse g und γ eine involutorische Streckung mit dem Zentrum Q und der Achse h, so ist β die einzige involutorische Streckung mit dem Zentrum P und der Achse g.

H. LÜNEBURG, Mainz

Aufgabe 520. Es seien r_i die Anradien, r der Inradius, t_i die Winkelhalbierenden, s der halbe Umfang, F die Fläche eines Dreiecks. Man beweise

$$\sum_{i=1}^{3} r_i\, t_i \leqslant F\left[1 - \frac{38}{27}\left(\frac{s}{r}\right)^2 + \left(\frac{8}{27}\right)^2\left(\frac{s}{r}\right)^4\right]^{1/2}.$$

Gleichheit gilt nur für das gleichseitige Dreieck. (s/r ist minimal für das gleichseitige Dreieck.)

H. GUGGENHEIMER, University of Minnesota, USA

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur

1. ABC ist ein gleichschenkliges Dreieck. Um die Spitze C wird ein Kreis k mit beliebigem Radius geschlagen, von A und B werden die Tangenten an k gelegt. Der geometrische Ort der Schnittpunkte der Tangenten besteht aus einem Teil des Umkreises von $\triangle\, ABC$ und einem Teil der Mittelsenkrechten zur Basis AB.

2. Eine Hyperbel H besitzt die Scheitelpunkte $A_{1,2}(\pm\, a;\, 0)$ und die Brennpunkte $F_{1,2}(\pm\, c;\, 0)$. Sie ist mit einem Kreis k durch die Brennpunkte zu schneiden. Die folgende, sehr einfache Lösung von CATALAN (Mélanges mathématiques, 1876) ist anscheinend wenig bekannt: k schneide die y-Achse in M_1 und M_2. Die Strecke M_1F_1 schneidet die Scheiteltangente $x = a$ in U. Der Kreis u um M_1 durch U schneidet k im Hyperbelpunkt P (entsprechend für M_2).

   ▶ Ziehe die Brennstrahlen F_1P und F_2P. Sie berühren (siehe Aufgabe 1) einen Kreis v um M_1 in T_1 und T_2. $\overline{UV} = a$ sei das Lot von U auf die y-Achse. Man findet $\triangle\, M_1UV \cong \triangle\, M_1PT_1 \cong \triangle\, M_1PT_2$, demnach $PT_1 = PT_2 = a$. Aus Symmetriegründen ist $F_2P - a = F_1P + a$, folglich $F_2P - F_1P = 2\,a$.

3. Gleiche Bezeichnungen wie in Aufgabe 2. Wandert M_1 auf der y-Achse, schneidet man die Strecke M_1F_1 in U mit der Scheiteltangente, so hüllen die Kreise u die Hyperbel H ein.

   ▶ PM_2 halbiert den Winkel der Brennstrahlen, PM_1 ist folglich Normale von H in P. Der Beweis ist auch analytisch leicht zu führen, unabhängig vom Beweis der Aufgabe 2.

4. Zieht man die ausserordentlich schnell zu findenden Kreise u von Aufgabe 3 richtig nach Sichtbarkeit aus, so erhält man die Parallelprojektion eines einschaligen Rotationshyperboloids. Nimmt man als Projektionswinkel 45° an, so lautet seine Gleichung

   $$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\,,$$

   der erzeugende Meridian hat also die reelle Halbachse a und die imaginäre Halbachse c.

5. Zeichne die kleinste Kugel, die durch die Punkte A (8; 5; 2) und B (14; 10; 6) geht und die Aufrissebene berührt.

   ▶ M (12,3; 5,2; 4,5)