Aufgabe 495. Man bestimme in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Einhüllende einer Ellipsenschar, wobei (0, 0) gemeinsamer Brennpunkt ist, alle Ellipsen dieselbe Hauptachse $2a$ haben und der Punkt $(s, 0)$ jeder Ellipse angehört ($0 < s < 2a$).

F. GÖTZE, Jena

Lösung: Der geometrische Ort für den zweiten Brennpunkt einer Ellipse der Schar ist der Kreis um $S(s, 0)$ mit Radius $2a - s$. Sind F, F_1 und F, F_2 die Brennpunkte zweier solcher Ellipsen, so liegt deren zweiter reeller Schnittpunkt S' auf der Mittelnormalen von $\overline{F_1F_2}$. Der Berührungspunkt B der Ellipse (F, F_1) mit ihrer Enveloppe ist daher ihr zweiter Schnittpunkt mit der Geraden SF_1. Wegen $BF + BS = (BF + BF_1) + F_1S = 4a-s$ ist der Ort von B die Ellipse mit den Brennpunkten F und S und der Hauptachse $4a-s$.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Herr R. BEREIS (Dresden) weist darauf hin, dass die Aufgabe an mehreren Stellen in der Literatur gelöst wurde: O. EMERSLEBEN, Math. Nachr. *3*, 62–70 (1949); T. PÖSCHL, Einführung in die analytische Mechanik, Karlsruhe 1949, S. 24–26; K. STRUBECKER, Math. Nachr. *4*, 36–46 (1950); H. R. MÜLLER, Math. Nachr. *7*, 289–292 (1952); R. BEREIS, Die Pyramide *2*, 227–232 (1953).

Weitere Lösungen sandten R. KUTSMICHEL (Langendiebach), A. PIWINSKI, O. REUTTER (Ochsenhausen), K. SCHULER (Rottweil), K. ZACHARIAS (Berlin).

Aufgabe 496. Man zeige, dass die Gleichung

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 = 0$$

keine rationalen Lösungen mit $x_1 x_2 x_3 \neq 0$ hat.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Solution: If the equation has a solution in rationals x_1, x_2, x_3 ($x_1 x_2 x_3 \neq 0$) it has a solution in integers x_1, x_2, x_3 with $(x_1, x_2, x_3) = 1$. Now if for a prime p

$$p^a \,\|\, x_1 \text{ and } p^b \,\|\, x_3\,, \text{ then } p^{2a} \,\|\, x_1^2 x_2\,,\ p^b \,\|\, x_2^2 x_3 \text{ and } p^{2b+a} \,\|\, x_3^2 x_1$$

and therefore $b = 2a$. It now follows that x_1, x_2, x_3 must have the form

$$x_1 = n_1 n_2^2,\ x_2 = n_2 n_3^2,\ x_3 = n_3 n_1^2 \text{ with } (n_1, n_2) = (n_1, n_3) = (n_2, n_3) = 1\,.$$

This implies

$$n_1^3 + n_2^3 + n_3^3 = 0\,.$$

It is well known that this last equation has no solutions in integers n_1, n_2, n_3 with $n_1 n_2 n_3 \neq 0$ completing our proof.

J. H. VAN LINT, Eindhoven

W. SZYMICZEK (Katowice) und A. MAKOWSKI (Warschau) weisen darauf hin, dass schon VANDIVER und KING (Amer. Math. Monthly *9*, 293–294 (1902)) die Unmöglichkeit der Gleichung der Aufgabe bewiesen haben. Allgemeiner hat HURWITZ (Math. Ann. *65*, 428–430 (1908)) gezeigt, dass $x^m y^n + y^m z^n + z^m x^n = 0$ dann und nur dann in ganzen Zahlen $\neq 0$ lösbar ist, wenn dies für $u^t + v^t + w^t = 0$ mit $t = m^2 - mn + n^2$ gilt.

Weitere Lösungen sandten L. CARLITZ (Durham, USA), W. JÄNICHEN (Berlin), W. WESSEL (Berlin).

Neue Aufgaben

Aufgabe 517. n, k, a, d seien natürliche Zahlen und es sei $(a, d) = 1$. Wieviele der n Zahlen $a + kd$, $0 \leqq k \leqq n - 1$ sind zu n teilerfremd?

W. JÄNICHEN, Berlin-Zehlendorf

Aufgabe 518. Prove that the expression

$$\frac{2\,(2x)!}{x!\,(x+3)!}$$

is an integer if $x = 6k + 2$ (k a positive integer) and $k \not\equiv 3 \pmod 5$.

C. KARANICOLOFF, Sofia