Aufgabe 494. Gegeben sei ein C^2-Oval und ein innerer Punkt O. Man berechne die Änderung der Stützfunktion (gemessen von O aus) relativ zu sich entsprechenden Punkten in einer Affinität, für die O Fixpunkt ist. H. GUGGENHEIMER, Minneapolis (USA)

Aufgabe 495. Man bestimme in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Einhüllende einer Ellipsenschar, wobei (0, 0) gemeinsamer Brennpunkt ist, alle Ellipsen dieselbe Hauptachse $2\,a$ haben und der Punkt $(s, 0)$ jeder Ellipse angehört $(0 < s < 2\,a)$.
F. GÖTZE, Jena

Aufgabe 496. Man zeige, dass die Gleichung

$$x_1^2\,x_2 + x_2^2\,x_3 + x_3^2\,x_1 = 0$$

keine rationalen Lösungen mit $x_1\,x_2\,x_3 \neq 0$ hat. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Man betrachtet ein Dreieck ABC. Der Punkt P bewegt sich auf der Gerade AB. Zeige, dass die Umkreise der Dreiecke ACP und BCP sich unter einem konstanten Winkel δ schneiden.

   ▶ $\delta = \alpha + \beta$.

2. Gegeben sind ein fester Kreis k und ein fester Punkt A. Konstruiere den Winkel vorgeschriebener Grösse α mit dem Scheitelpunkt A, der aus k eine Sehne gegebener Länge ausschneidet.

   ▶ Methode: Drehung.

3. Einem Halbkreis ist ein Trapez einzubeschreiben, das einen Inkreis besitzt.

   ▶ Über dem Durchmesser ist ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, in dem eine Kathete gleich dem nichtanliegenden Hypotenusenabschnitt ist.

4. Jede Seite eines Dreiecks (a, b, c) ist Durchmesser eines Kreises. Man zieht die gemeinsamen Tangenten an je zwei dieser Kreise. Für die Tangentenabschnitte gilt

   $$t_1\,t_2\,t_3 = (s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,.$$

   ▶ $t_1 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2-(b-c)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(a+b-c)\,(a-b+c)}$ und so weiter.

5. Man zeichnet über der Strecke $2\,r$ den Halbkreis H und über den Radien die Halbkreise H_1 und H_2. Der Kreis k_1, der die drei Halbkreise berührt, hat den Radius $\varrho_1 = r/1\cdot 3$, der Kreis k_2, der H_1, H_2 und k_1 von aussen berührt, hat den Radius $\varrho_2 = r/3\cdot 5$. Der Kreis $k_3(\varrho_3)$ berührt H_1, H_2 und k_2 von aussen, und so weiter. Es gilt

   $$\varrho_k = \frac{r}{(2\,k-1)\,(2\,k+1)}\,.$$

   ▶ Beweis durch vollständige Induktion. Aus dem Ergebnis ersieht man sofort

   $$\sum_{1}^{\infty}{}_{k}\,\frac{1}{(2\,k-1)\,(2\,k+1)} = \frac{1}{2}\,.$$