Wegen $a = u\,v\,z$ gilt die Darstellung

$$L(1, a) = \sum_{t|a} G(t) . \tag{2}$$

Aus der kanonischen Zerlegung

$$a = \prod_i p_i^{e_i}$$

folgt bekanntlich

$$\sum_{t|a} t = \prod_i \left(1 + p_i + p_i^2 + \cdots + p_i^{e_i}\right) . \tag{3}$$

Mit (1) ergibt sich, indem man p^k durch $2\,G(p^k) = 2$ ersetzt,

$$1 + \sum_{\substack{t|a \\ t \neq 1}} 2\,G(t) = \prod_i (1 + 2\,e_i) , \tag{4}$$

und hieraus

$$L(1, a) = \frac{1}{2} \left\{1 + \prod_i (1 + 2\,e_i)\right\} .$$

Für $b = 2$ erhält man wie vorher $2\,r\,u\,v = a\,(u + v)$, $(u, v) = 1$. Mit $a = u\,v\,z$ wird $2\,r = z\,(u + v)$. Weil a und damit u und v ungerade sind, ist r immer ganzzahlig. Wir haben also $L(2, a) = L(1, a)$.

Für $b = 4$ und (ungerades) $a = u\,v\,z$ wird $4\,r = z\,(u + v)$. Somit ist notwendig, dass $u + v \equiv 0 \pmod 4$, also etwa $u \equiv 1 \pmod 4$ und $v \equiv 3 \pmod 4$. Jetzt gilt

$$L(4, a) = \sum_{\substack{t|a \\ t \equiv 3 \pmod 4}} G(t) .$$

Aus der kanonischen Darstellung

$$a = \prod_{i,j} p_i^{e_i}\,q_j^{f_j} , \quad p_i \equiv 1 \pmod 4 , \quad q_j \equiv 3 \pmod 4$$

ergibt sich analog zu (3)

$$\sum_{\substack{t|a \\ t \equiv 3 \pmod 4}} t = \frac{1}{2} \prod_i \left(1 + p_i + \cdots + p_i^{e_i}\right) \left\{\prod_j \left(1 + q_j + \cdots + q_j^{f_j}\right) - \prod_j \left(1 - q_j + \cdots + (-1)^{f_j}\,q_j^{f_j}\right)\right\} .$$

Analog zu (4) erhalten wir leicht (1 tritt als Teiler nicht auf!)

$$L(4, a) = \frac{1}{4} \prod_i (1 + 2\,e_i) \left\{\prod_j (1 + 2\,f_j) - (-1)^{\Sigma f_j}\right\} .$$

Eine weitere Lösung legte J. SPILKER (Freiburg i. Br.) vor. Teillösungen sandten J. GAEBELEIN (Helmstedt) und K. WOLFF (Glarus).

Neue Aufgaben

Aufgabe 493. Es seien $f(t)$, $g(t)$ zwei stetige periodische Funktionen mit der Periode $2\,\pi$, deren erste Fourier-Koeffizienten verschwinden:

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos t\, dt = \int_0^{2\pi} f(t) \sin t\, dt = \int_0^{2\pi} g(t) \cos t\, dt = \int_0^{2\pi} g(t) \sin t\, dt = 0 .$$

Ausserdem sei $g(t) > 0$. Dann hat $f(t)/g(t)$ wenigstens vier Extrema in $0 \leqq t < 2\,\pi$.

Dieser Satz enthält alle bekannten Sätze aus der Verwandtschaft des Vierscheitelsatzes. Man beweise ihn und finde neue Anwendungen.

H. GUGGENHEIMER, Minneapolis (USA)