Aufgaben

Aufgabe 489. Jedem Punkt P einer Ellipse werden die drei von P verschiedenen Punkte P_1, P_2, P_3 zugeordnet, deren zugehörige Krümmungskreise durch P gehen. Krümmungszentrum für P_i sei K_i $(i = 1, 2, 3)$. Man zeige, dass die Flächeninhalte der Dreiecke $P_1P_2P_3$ und $K_1K_2K_3$ konstant bleiben, wenn P die Ellipse durchläuft. (Für das Dreieck $P_1P_2P_3$ ist diese Eigenschaft bekannt; siehe Enzyklopädie der Math. Wiss. III C 1, S. 75.)

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Lösung: Zeichnet man in einem Ellipsenpunkt $P\ (a\cos\varphi;\ b\sin\varphi) = P(\varphi)$ den Krümmungskreis, so schneidet dieser die Ellipse (von den Scheiteln abgesehen) in einem von P verschiedenen Punkt Q und die Krümmungssehne PQ, die Tangente t in P und die Hauptachse bilden ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis auf der Hauptachse. Daraus ergibt sich für die Krümmungssehne PQ die Gleichung

$$b\,x\cos\varphi - a\,y\sin\varphi = a\,b\cos 2\varphi\,. \tag{1}$$

Für $Q\ (a\cos u;\ b\sin u)$ folgt dann $\cos(u+\varphi) = \cos 2\varphi$ und damit $u = -3\varphi$. Man kann also sagen, dass die Krümmungssehnen von $P_1(\varphi)$, $P_2(\varphi - 120°)$, $P_3(\varphi + 120°)$ durch $Q\,(-3\varphi)$ gehen. Das Dreieck $P_1P_2P_3$ ist die Projektion eines regelmässigen Dreiecks im Hauptkreis und somit ist seine Fläche Δ_1 konstant, nämlich

$$\Delta_1 = \frac{3\,a\,b}{4}\sqrt{3}\,. \tag{2}$$

Der Krümmungsmittelpunkt K, der dem Ellipsenpunkt P zugeordnet ist, hat die Koordinaten

$$x_K = \frac{e^2}{a}\cos^3 t = \frac{e^2}{4\,a}(\cos 3\,t + 3\cos t) \quad \text{und} \quad y_K = -\frac{e^2}{4\,b}(3\sin t - \sin 3\,t)\,.$$

Bildet man die Werte für $t = \varphi$, $t = \varphi - 120°$ und $t = \varphi + 120°$, so erhält man ohne grössere Rechnung für die Fläche Δ_2 des Dreiecks $K_1K_2K_3$

$$\Delta_2 = \frac{3^3}{4^3}\cdot\frac{e^4}{a\,b}\sqrt{3}\,. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt $\Delta_1\,\Delta_2 = 3\cdot 0{,}75^4\,e^4$, also für alle konfokalen Ellipsen derselbe Wert. Dreieck $P_1P_2P_3$ ist übrigens das grösste einbeschriebene Dreieck.

Für den Krümmungskreishalbmesser ϱ gilt allgemein

$$(a\,b\,\varrho)^{2/3} = b^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t\,.$$

Setzt man nun für t die obigen drei Werte ein und addiert, so erhält man für die Punkte P_i $(i = 1, 2, 3)$

$$\Sigma\,\varrho_i^{2/3} = 1{,}5\,(a^2 + b^2)\,(a\,b)^{-2/3} = \text{const.}$$

Auf weitere interessante Eigenschaften dieser Punkte-Konfiguration hat schon STEINER hingewiesen (vgl. Werke II, S. 377).

K. SCHULER, Rottweil

Weitere Lösungen sandten W. JÄNICHEN (Berlin), O. REUTTER (Ochsenhausen), A. WAHL (Stuttgart), K. ZACHARIAS (Berlin).

Aufgabe 490. Ist p_n $(n = 1, 2, \ldots)$ die Folge aller Primzahlen, dann gilt für alle reellen $x > 1$ die Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n^x} < \frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}\,.$$

O. REUTTER, Ochsenhausen

1. Lösung: Ist p_n die n-te Primzahl und $\exp u = e^u$, so gilt für $x > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x} = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - p_n^{-x})^{-1} = \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1 - p_n^{-x})\right\}$$

$$= \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(p_n^{-x} + 2^{-1}p_n^{-2x} + \cdots)\right\} > \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}p_n^{-x}\right\}.$$

Da die Funktion $x^{-1} e^x$ für $x > 0$ bei $x = 1$ ein Minimum hat und dort den Wert e annimmt, ist

$$\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-x}\right\} \geqq e \sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-x}$$

und daher

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x} > e \sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-x}.$$

H. Meili, Winterthur

2. Lösung: Bekanntlich ist $\log u \leqslant u - 1$ für $u > 0$, also

$$\log \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^x} \leqslant -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^x}$$

$$< -1 - \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right) = \log\frac{1}{e} + \log \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^x} < \frac{1}{e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

J. H. van Lint, Eindhoven

Der Aufgabensteller beweist und benutzt die allgemeine Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{r} x_n \cdot \prod_{n=1}^{r} (1 - x_n) \leqq r^{r+1}/(r+1)^{r+1} < 1/e, \quad 0 < x_n < 1.$$

Weitere Lösungen sandten L. Carlitz (Durham/USA), H. Harborth (Braunschweig), E. Teuffel (Stuttgart), K. Zacharias (Berlin).

Aufgabe 491. $\mathfrak{C}$ sei eine kubische Parabel ($y = a x^3 + b x^2 + c x + d$) und $\mathfrak{M}\{g, g', \ldots\}$ die Menge der Geraden, die $\mathfrak{C}$ in drei (reellen) Punkten schneiden. Man begründe folgende *ein*eindeutige Abbildung $g \leftrightarrow g'$ von $\mathfrak{M}$ auf sich: In den Schnittpunkten von g mit $\mathfrak{C}$ werden die Tangenten an $\mathfrak{C}$ gelegt. Diese Tangenten schneiden $\mathfrak{C}$ in Punkten von g'. ($g \to g'$ gilt für *jede* Kurve 3. Ordnung. (Vgl. B. L. van der Waerden, Algebraische Geometrie, S. 89)). Zeige ferner:

$$g_1 \| g_2 \Rightarrow g_1' \| g_2'. \tag{1}$$

$$\mathrm{DV}(g_1 g_2 g_3 g_4) = \mathrm{DV}(g_1' g_2' g_3' g_4'), \quad \mathrm{DV} = \text{Doppelverhältnis}. \tag{2}$$

W. Jänichen, Berlin-Zehlendorf

Lösung: Die Abbildung von $\mathfrak{M}$ auf sich lässt sich erweitern auf die Abbildung der Menge aller Geraden der Ebene auf sich. Eine beliebige nicht zu $\mathfrak{M}$ gehörende reelle Gerade g der Ebene schneidet $\mathfrak{C}$ in zwei konjugiert imaginären Punkten (nebst einem reellen), deren «Tangentialpunkte» ebenfalls konjugiert imaginär sind und deshalb eine reelle Verbindungsgerade g' haben. g' ist die sogenannte «Begleiterin» von g (Cayley: «satellite line»). Die inverse Zuordnung $g' \to g$ ist nur für diejenigen Kurven 3. Ordnung eindeutig, die auch von 3. Klasse sind, also eine Spitze haben (im vorliegenden Fall ist diese der unendlich ferne Punkt der Kurve). Denn für solche Kurven gibt es aus jedem Kurvenpunkt P nur eine nicht in P berührende Tangente.

Für die rechnerische Behandlung im vorliegenden Fall beziehen wir die $\mathfrak{C}$ auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt im Wendepunkt liegt, während die eine Achse die Wendetangente ist und die andere nach der Spitze gerichtet ist. Die Gleichung der $\mathfrak{C}$ wird dann, wenn der Einheitspunkt $(1|1)$ auf der Kurve angenommen wird, $y = x^3$. Für den Tangentialpunkt P' eines Kurvenpunktes $P(x|y)$ erhält man $x' = -2x$ und $y' = -8y$. Die Zuordnung der Kurvenpunkte $P \to P'$ lässt sich also in eine affine Transformation der Ebene einordnen, welche die $\mathfrak{C}$ in sich überführt. Daraus folgen sofort $g \to g'$, $g' \to g$ sowie (1) und (2).

Für eine allgemeine Kubik mit Spitze (die ja projektiv äquivalent ist mit $\mathfrak{C}$) ist die Abbildung $g \to g'$ in einer ebenen Projektivität enthalten, deren Doppelpunkte der Wendepunkt, die Spitze und der Schnittpunkt der Wendetangente mit der Spitzentangente sind.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Weiter Lösungen sandten O. REUTTER (Ochsenhausen) und K. ZACHARIAS (Berlin).

Aufgabe 492. Es seien a, b, c, d natürliche Zahlen und $\varphi(a)$ die Eulersche Funktion. Man beweise unter der Voraussetzung $(b, c) = 1$ die Kongruenz

$$\sum_{d|a} \varphi\left(\frac{a}{d}\right) \binom{b\,d-1}{c\,d-1} \equiv 0 \pmod{a\,c}\,.$$

E. TROST, Zürich

Solution: Put

$$S(a, b, c) = \sum_{d|a} \varphi\left(\frac{a}{d}\right) \binom{b\,d-1}{c\,d-1},$$

$$T(a, b, c) = \frac{b}{c}\, S(a, b, c) = \sum_{d|a} \varphi\left(\frac{a}{d}\right) \binom{b\,d}{c\,d}.$$

Then, since $\varphi(m) = \sum_{r s = m} r\, \mu(s)$ (μ = Möbius function),

$$S(a, b, c) = \sum_{d m = a} \varphi(m) \binom{b\,d-1}{c\,d-1} = \sum_{d r s = a} r\, \mu(s) \binom{b\,d-1}{c\,d-1} = \sum_{r m = a} r\, S_1(m, b, c)\,,$$

where

$$S_1(m, b, c) = \sum_{d s = m} \mu(s) \binom{b\,d-1}{c\,d-1}.$$

Similarly

$$T(a, b, c) = \sum_{r m = a} r\, T_1(m, b, c)\,,$$

where

$$T_1(m, b, c) = \sum_{d s = m} \mu(s) \binom{b\,d}{c\,d}.$$

Now for p prime and $e \geqslant 1$ we have

$$\binom{b\,p^e}{c\,p^e} = \prod_{j=0}^{c p^e - 1} \frac{b\,p^e - j}{c\,p^e - j} = \binom{b\,p^{e-1}}{c\,p^{e-1}} \prod_{\substack{j=0 \\ p \nmid j}}^{c p^e - 1} \frac{b\,p^e - j}{c\,p^e - j} \equiv \binom{b\,p^{e-1}}{c\,p^{e-1}} \pmod{p^e}\,.$$

Similarly

$$\binom{b\,p^e - 1}{c\,p^e - 1} \equiv \binom{b\,p^{e-1} - 1}{c\,p^{e-1} - 1} \pmod{p^e}\,.$$

Therefore if $m = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_r^{e_r}$ and $s \mid p_2\, p_3 \ldots p_r$ we have

$$S_1(m, b, c) = \sum_s \left\{ \mu(s) \binom{b\,m\,s^{-1} - 1}{c\,m\,s^{-1} - 1} + \mu(p_1\,s) \binom{b\,m\,p_1^{-1}\,s^{-1} - 1}{c\,m\,p_1^{-1}\,s^{-1} - 1} \right\} \equiv 0 \pmod{p_1^{e_1}}\,.$$

It follows that

$$S_1(m, b, c) \equiv 0 \pmod{m}\,, \qquad T_1(m, b, c) \equiv 0 \pmod{m}$$

and therefore

$$S(a, b, c) \equiv 0 \pmod{a}\,, \qquad T(a, b, c) \equiv 0 \pmod{a}\,. \tag{1}$$

From the last congruence we get

$$b\, S(a, b, c) \equiv 0 \pmod{a\,c}\,. \tag{2}$$

Put $a = a_1\, a_2$, where

$$a_1 = \prod_{\substack{p|a \\ p|c}} p^t, \qquad a_2 = \prod_{\substack{p|a \\ p\nmid c}} p^t.$$