dische Geometrie in der Kugelebene» befasst. Das von ihm benützte Axiomensystem weicht jedoch von dem in der vorliegenden Arbeit aufgestellten Axiomensystem in wesentlichen Punkten ab. Beim Aufbau der nichteuklidischen Geometrie in der Kugelebene selbst bedient sich DIECK verschiedentlich, wohl zur Abkürzung mancher Beweise, auch anschaulicher Vorstellungen aus der bekannten Kugelgeometrie. In der hier nun entwickelten Gestalt eignet sich die sphärisch-elliptische Geometrie durchaus für die Behandlung in speziellen Kursen (Arbeitsgemeinschaften) für mathematisch besonders interessierte Schüler der Oberstufe. Bei der Aufstellung des Axiomensystems wurde, wie bereits erwähnt, nicht darauf geachtet, unbedingt ein völlig unabhängiges System zu gewinnen, um den Aufbau der sphärisch-elliptischen Geometrie nicht zu kompliziert und unübersichtlich zu gestalten.

J. MALL, Weiden/BRD.

Kleine Mitteilung

Über eine Ungleichung von S. S. WAGNER

S. S. WAGNER kündigt in den Notices of the American Mathematical Society, vol. *12* (1965), p. 220 folgende Ungleichung an:

$$\left.\begin{aligned}&\Big(\Sigma a_i b_i + x \sum_{i\neq j} a_i b_j\Big)^2 \leqq \Big(\Sigma a_i^2 + 2x \sum_{i<j} a_i a_j\Big)\Big(\Sigma b_i^2 + 2x \sum_{i<j} b_i b_j\Big)\\ &\qquad\qquad (a_i,\ b_i \quad \text{reell}, \quad 0 \leqq x \leqq 1)\,.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Für diese Ungleichung wird ein komplizierter Induktionsbeweis angedeutet, der anscheinend mehrere hundert einzelne Rechnungen erfordert. Doch lässt sich (1) auf folgende Weise ganz einfach beweisen:

Man forme die Ungleichung mittels der Identitäten

$$\sum_{i\neq j} a_i b_j = \Sigma a_i \,\Sigma b_i - \Sigma a_i b_i$$

$$2\sum_{i<j} a_i a_j = (\Sigma a_i)^2 - \Sigma a_i^2$$

$$2\sum_{i<j} b_i b_j = (\Sigma b_i)^2 - \Sigma b_i^2$$

um und setze dabei $1 - x = y$. Es gilt $x \geqq 0$, $y \geqq 0$.
Man erhält

$$[x\,\Sigma a_i\,\Sigma b_i + y\,\Sigma a_i b_i]^2 \leqq [x(\Sigma a_i)^2 + y\,\Sigma a_i^2]\,[x(\Sigma b_i)^2 + y\,\Sigma b_i^2]\,. \tag{2}$$

Ausmultipliziert ergibt das

$$x\,y\,[(\Sigma a_i)^2\,\Sigma b_j^2 + (\Sigma b_i)^2\,\Sigma a_j^2 - 2\,\Sigma a_i\,\Sigma b_i\,\Sigma a_j b_j] + y^2\,[\Sigma a_i^2\,\Sigma b_i^2 - (\Sigma a_i b_i)^2] \geqq 0\,. \tag{3}$$

Der Koeffizient von xy ist $\sum_j (b_j\,\Sigma a_i - a_j\,\Sigma b_i)^2$ und daher nicht negativ; der Koeffizient von y^2 ist nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ebenfalls nicht negativ. Da $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, ist damit die Ungleichung von WAGNER bewiesen.

P. FLOR, Wien