Element besitzt, dagegen ist die *Ordnungszahl* $\mathbf{2}$ eine Menge mit *zwei* Elementen, nämlich 0 und 1, also $\mathbf{2} = \{0; 1\}$.

Primzahlen sind die von 1 verschiedenen Zahlen, die sich nicht als Produkt von zwei von 1 verschiedenen Zahlen darstellen lassen.

Man kann die Zahlen in einer Reihe anordnen[2]) und findet, dass die Primzahlen zunächst sehr stark überwiegen: unter den ersten 2^{65536} Zahlen sind nur sechs keine Primzahlen.

Es ist nun merkwürdig, dass trotzdem das Analogon zur *Goldbachschen Vermutung* für diese Zahlen *nicht erfüllt* ist:

Das Doppelte $2 \cdot a$ *einer von 0 und 1 verschiedenen Zahl a ist hier nicht immer die Summe von zwei Primzahlen.*

Einfache *Gegenbeispiele* sind je das Doppelte der Zahlen $2 \cdot \mathbf{2}$ und $\mathbf{2} \cdot \mathbf{2}$, wobei $\mathbf{2}$ wieder die Ordnungszahl zwei bedeutet. Wie man aus den zugehörigen Figuren sofort ersieht, sind hier die einzigen Darstellungen als Summe von zwei von 0 verschiedenen Zahlen die folgenden:

$$\mathbf{2} + 3 \cdot \mathbf{2} \quad \text{oder} \quad 2 \cdot \mathbf{2} + 2 \cdot \mathbf{2} \quad \text{oder} \quad 3 \cdot \mathbf{2} + \mathbf{2} \quad \text{und} \quad \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} + \mathbf{2} \cdot \mathbf{2};$$

es ergibt sich also keine Summe von zwei Primzahlen.

Das Doppelte der Zahl $\mathbf{2} \cdot 2$ ist aber Summe von zwei Primzahlen; es ist nämlich

$$2 \cdot \mathbf{2} \cdot 2 = \{0; 2\} + \{\{1; 3\}\}.$$

Die beiden Summanden haben die «Stufenzahlen» 3 und 5 und sind deshalb Primzahlen.

Es folgt, dass sich die Goldbachsche Vermutung, sofern sie für die natürlichen Zahlen erfüllt ist, auf jeden Fall nicht allein aus den allgemeinen Prinzipien der Addition und Multiplikation herleiten lässt, soweit diese auch für die verallgemeinerten Zahlen gelten.

Das Zustandekommen der obigen Gegenbeispiele hängt mit der Tatsache zusammen, dass es unter den verallgemeinerten Zahlen von 1 verschiedene «Monozahlen» gibt:

Monozahlen sind die von 0 verschiedenen Zahlen, die sich nicht als Summe von zwei von 0 verschiedenen Zahlen darstellen lassen.

Die Ordnungszahl $\mathbf{2}$ ist Monozahl, ebenso auch jede Zahl der Form $\{0; n\}$, wenn n eine natürliche Zahl ist. Es gibt also unendlich viele Monozahlen.

Das Vierfache einer von 1 verschiedenen Monozahl a ist nie die Summe von zwei Primzahlen, da hier nur die Zerfällungen $a + 3 \cdot a$ oder $2 \cdot a + 2 \cdot a$ oder $3 \cdot a + a$ möglich sind; es gibt hier also *unendlich viele* «Nicht-Goldbach-Zahlen».

P. FINSLER, Zürich

Begründung und Charakterisierung der reellen Logarithmusfunktionen

1. Einleitung

Schon mehrfach in der mathematischen Literatur waren die reellen Logarithmusfunktionen Gegenstand axiomatischer Kennzeichnung. Gemeinsam an den bekanntesten Charakterisierungen sind die Angabe der Definitionsmenge $P = \{x \mid x \in R, x > 0\}$[1]),

[1]) R bezeichne durchwegs die Menge der reellen Zahlen.

die Reellwertigkeit und die Funktionalgleichung

$$x_1, x_2 \in P \Rightarrow f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2)\,, \tag{H}$$

welche also besagt, dass f einen Homomorphismus der Gruppe $\langle P, \cdot\rangle$ in die Gruppe $\langle R, +\rangle$ darstellt. Eine über P definierte reellwertige Funktion mit der Eigenschaft (H) nennen wir im folgenden eine **H-Funktion**. In dieser Sprechweise lauten einige der oben erwähnten Kennzeichnungen wie folgt:

Satz 1[2]: *Es gibt genau eine H-Funktion f mit der Eigenschaft*

$$x \in P \Rightarrow f(x) \leq x - 1\,. \tag{V_n}$$

Satz 2[3]: *Es gibt genau eine H-Funktion f mit der Eigenschaft*

$$\lim \frac{f(x)}{x-1} = 1 \quad [x \to 1]\,. \tag{VII'_n}$$

Satz 3[4]: *Zu jeder reellen Zahl* $a > 0$, $a \neq 1$ *gibt es genau eine monotone H-Funktion* f *mit* $f(a) = 1$. *Im Falle* $a > 1$ *ist sie monoton wachsend, im Falle* $0 < a < 1$ *monoton fallend.*

Satz 4[5]: *Zu jeder reellen Zahl* $a > 0$, $a \neq 1$ *gibt es genau eine stetige H-Funktion* f *mit* $f(a) = 1$.

In der vorliegenden Arbeit sollen vorerst gleichwertige Eigenschaften von *H*-Funktionen aufgewiesen werden (Satz 6). Die vier vorgenannten Aussagen erscheinen sodann als Korollarien eines einzigen Existenz- und Eindeutigkeitssatzes (Satz 7). Dabei wollen wir ausdrücklich anmerken, dass sich die gesamte Argumentation auf einer Vorstufe zum eigentlichen Infinitesimalkalkül abspielt, indem die Definition der Ableitung gerade noch berührt wird, ohne dass jedoch die Berufung auf höhere Ergebnisse notwendig ist. Es seien einige spezielle hier verwendete Resultate erwähnt:

(A) Ist $a > 0$, $a \neq 1$, so gibt es in jedem offenen Intervall positiver reeller Zahlen unendlich viele Potenzen von a mit rationalen Exponenten.
(B) Für $a > 0$ gilt $a^{1/n} \to 1$ für $n \to \infty$.
(C) $x_1, x_2 > 0$, $x_1 \neq x_2$, $0 < \lambda < 1$, λ rational $\Rightarrow x_1^\lambda x_2^{1-\lambda} < \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$.
(D) Für jede natürliche Zahl n gilt $n(1 - e^{-1/n}) < 1 < n(e^{1/n} - 1)$.

Besonders sei noch hervorgehoben, dass wir keine Potenzen mit irrationalen Exponenten voraussetzen und somit direkt an die elementarste Stufe der Potenzlehre anschliessen. Im Gegenteil eignet sich die hier gegebene Begründung der Logarithmusfunktionen zur nachherigen Einführung jener Potenzen[6].

Zum Beweis von (A) bis (D) mögen einige Hinweise genügen: (A) folgt aus den Anordnungseigenschaften der reellen Zahlen und (B) aus bekannten elementaren Konvergenzsätzen. Ist $\lambda = m/n$, so ist (C) die Ungleichheit zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel, angewandt auf den aus m Exemplaren x_1 und $n - m$ Exemplaren x_2 bestehenden Zahlenkomplex. (D) ist für $n = 1$ trivial und für $n \geq 2$ mit der Beziehung $(1 + 1/n)^n < e < (1 + 1/(n-1))^n$ äquivalent.

---

[2]) Vergleiche [2], p. 114.
[3]) Vergleiche [2], p. 119, Aufgabe 2.
[4]) Vergleiche [3], p. 80.
[5]) Vergleiche [3], p. 82.
[6]) Vergleiche etwa das Vorgehen in [2], p. 121–124, oder [5], p. 246.

2. Äquivalenzsatz

Vorgängig befassen wir uns mit den Folgerungen von (H) allein:

Satz 5: *Ist f eine H-Funktion, so gilt:*

$$f(1) = 0\,, \tag{1}$$

$$x \in P \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)\,, \tag{2}$$

$$x_1, x_2 \in P \Rightarrow f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = f(x_2) - f(x_1)\,, \tag{3}$$

$$x \in P,\, \lambda \text{ rational} \Rightarrow f(x^\lambda) = \lambda f(x)\,. \tag{4}$$

Für jedes $c \in R$ ist auch cf eine H-Funktion. (5)

Offensichtlich sind (1) und (2) die Spezialfälle von (4) für $\lambda = 0$ und $\lambda = -1$. Zum *Beweis* bemerken wir nur, dass (1) und (2) durch geeignete Setzungen in (H) gewonnen werden können; es ergibt sich dann mühelos (3). Für (4) ist ein stufenweises Fortschreiten über $\lambda = 1$, λ natürlich, λ ganz, λ rational angezeigt, und die Aussage (5) liegt auf der Hand.

Es entspricht nun durchaus einem axiomatischen Standpunkt, die logischen Zusammenhänge zwischen gewissen zusätzlichen Eigenschaften von H-Funktionen zu erörtern. Einige wichtige Zusammenhänge der genannten Art werden durch den nächsten Satz zum Ausdruck gebracht. An der Normierung $f(e) = 1$ kann im Hinblick auf (5) festgehalten werden, indem unmittelbar klar ist, wie die durch Multiplikation von f mit einer Konstanten aus (I_n) bis (IX_n) entstehenden allgemeingültigen Bedingungen (I) bis (IX) lauten.

Satz 6 (**Äquivalenzsatz**): *Für H-Funktionen f sind die nachfolgenden Eigenschaften logisch gleichwertig:*

f ist (streng) monoton wachsend; $f(e) = 1$. (I_n)

f ist an einer Stelle $x_0 \in P$ stetig; $f(e) = 1$. (II_n)

f ist auf ganz P stetig; $f(e) = 1$. (III_n)

f ist (streng) konkav; $f(e) = 1$. (IV_n)

Für alle $x \in P$ gilt $f(x) \leq x - 1$. (V_n)

Für alle $x_1, x_2 \in P$ gilt $\dfrac{x_2 - x_1}{x_2} \leq f(x_2) - f(x_1) \leq \dfrac{x_2 - x_1}{x_1}$. ($\mathrm{VI}_n$)

f ist auf ganz P differenzierbar, und es gilt für alle $x_0 \in P$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to \frac{1}{x_0} \quad [x \to x_0]\,. \tag{VII_n}$$

f erfüllt für jedes $a \in P$ über der Menge $P_a = \{x \mid x \geq a\}$ die Lipschitz-*Bedingung*

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq \frac{1}{a}\,|x_2 - x_1|\,;\; f(e) = 1\,. \tag{VIII_n}$$

Für jedes $a \in P$ ist f über P_a gleichmässig stetig; $f(e) = 1$. (IX_n)

Die Normierungsbedingung braucht bei (V_n), (VI_n), (VII_n) nicht vermerkt zu werden, da sie dort als Folgerung gewonnen werden kann. Eine H-Funktion f, welche eine (und damit jede) der Eigenschaften (I) bis (IX) besitzt, heisse für unsere Zwecke fortan kurz eine **L-Funktion**; im Falle $f(e) = 1$ nennen wir sie **normiert**. Offenbar ist für jedes $c \in R$ mit f auch cf eine L-Funktion.

Der *Beweis* verläuft nach dem folgenden Plan: $(I_n) \Rightarrow (II_n) \Rightarrow (III_n) \Rightarrow (I_n)_{\text{streng}} \Rightarrow (I_n)$; $(I_n)_{\text{streng}} \Rightarrow (IV_n)_{\text{streng}} \Rightarrow (IV_n) \Rightarrow (V_n) \Rightarrow (VI_n) \Rightarrow (VII_n) \Rightarrow (III_n)$; $(VI_n) \Rightarrow (VIII_n) \Rightarrow (IX_n) \Rightarrow (II_n)$. Offensichtlich wird der Satz damit vollumfänglich bewiesen sein. – $\mathbf{(I_n) \Rightarrow (II_n)}$: Mit (I_n) folgt für beliebiges $x_0 \in P$ die Beschränktheit von f über dem Intervall $[x_0/2, 3\, x_0/2]$ und daher wiederum mit (I_n) die Existenz der einseitigen Grenzwerte $f(x_0 + 0)$ und $f(x_0 - 0)$. Für $a_n = x_0\, e^{1/n}$, $b_n = x_0\, e^{-1/n}$ gilt $a_n \downarrow x_0$, $b_n \uparrow x_0$ und nach (H) und (4) $f(a_n) = f(x_0) + 1/n \to f(x_0)$, $f(b_n) = f(x_0) - 1/n \to f(x_0)$ $[n \to \infty]$. Definitionsgemäss gilt aber auch $f(a_n) \to f(x_0 + 0)$, $f(b_n) \to f(x_0 - 0)$ $[n \to \infty]$, das heisst insgesamt $f(x_0) = f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$, womit (II_n) feststeht. – $\mathbf{(II_n) \Rightarrow (III_n)}$: Ist $x \in P$ beliebig und $x_n \to x$ $[n \to \infty]$, so folgt $x_n\, x_0/x \to x_0$, und mit (H), (II_n) und (3) ergibt sich $f(x_n) = f(x_n\, x_0/x) + f(x/x_0) \to f(x_0) + f(x) - f(x_0) = f(x)$ $[n \to \infty]$. f ist also bei x stetig und (III_n) bewiesen. – $\mathbf{(III_n) \Rightarrow (I_n)_{streng}}$: Ist $1 < x$, dann gibt es eine rationale Zahl σ und eine monoton wachsende Folge positiver rationaler Zahlen ϱ_n mit $e^{\varrho_n} \to x$; $x \leq e^{\varrho}$. Wegen $\varrho_n \leq \sigma$ existiert $l = \lim \varrho_n$ $[n \to \infty]$, und es ist $l > 0$. Andererseits folgt wegen (4) und (III_n) $\varrho_n = f(e^{\varrho_n}) \to f(x)$ $[n \to \infty]$, also gilt $f(x) = l > 0$. Aus $1 < x$ folgt demnach $f(x) > 0$. Aus $0 < x_1 < x_2$ ergibt sich somit $1 < x_2/x_1$ oder $f(x_2/x_1) > 0$ oder schliesslich mit (3) $f(x_1) < f(x_2)$, das heisst $(I_n)_{\text{streng}}$. – $\mathbf{(I_n)_{streng} \Rightarrow (I_n)}$ ist trivial. – $\mathbf{(I_n)_{streng} \Rightarrow (IV_n)_{streng}}$: Es seien $x_1, x_2 \in P$, $x_1 \neq x_2$, $0 < \lambda < 1$. Nach (C) gilt im Hinblick auf $(I_n)_{\text{streng}}$, (H) und (4) für rationales λ: (a) $\lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) < f[\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2]$, also $(IV_n)_{\text{streng}}$. Es sei nun λ irrational und $\mu_i \in (0,1)$ rational mit $\mu_i \to \lambda$ $[i \to \infty]$. Sind weiter $a = \max\{x_1, x_2\}$, $y_i = \mu_i x_1 + (1 - \mu_i) x_2$, $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$, so gilt $|y_i - x| = |(\mu_i - \lambda) x_1 + (\lambda - \mu_i) x_2| \leq 2a\,|\mu_i - \lambda|$, also folgt $y_i \to x$ $[i \to \infty]$. Nach (a) gilt $\mu_i f(x_1) + (1 - \mu_i) f(x_2) < f(y_i)$ und wegen der Stetigkeit, die hier auf Grund von $(I_n) \Rightarrow (II_n) \Rightarrow (III_n) \Rightarrow (I_n)_{\text{streng}} \Rightarrow (I_n)$ verbürgt ist, auch (b) $\lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) \leq f(x)$. Es gilt nun noch, die soeben aus dem Grenzübergang entstandene Unschärfe zu eliminieren. Ist $\lambda_0 = \min\{\lambda, 1 - \lambda\}$, so folgt mit Rücksicht auf die Irrationalität von λ: $0 < \lambda_0 < 1/2$. Setzt man weiter $x_3 = x - \lambda_0 (x_2 - x_1)$, $x_4 = x + \lambda_0 (x_2 - x_1)$, so gilt $x_3, x_4 > 0$, $(x_3 x_4)^{1/2} < (x_3 + x_4)/2 = x$, also (c) $[f(x_3) + f(x_4)]/2 < f(x)$. Sei o.E.d.A. $\lambda_0 = \lambda$ (der Fall $\lambda_0 = 1 - \lambda$ erledigt sich analog). Dann ergibt sich $x_3 = 2\lambda x_1 + (1 - 2\lambda) x_2$, $x_4 = x_2$ und mit (b): (d) $2\lambda f(x_1) + (1 - 2\lambda) f(x_2) \leq f(x_3)$, also insgesamt nach (d) und (c): $\lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) = [2\lambda f(x_1) + (1 - 2\lambda) f(x_2) + f(x_2)]/2 \leq [f(x_3) + f(x_4)]/2 < f(x)$, womit $(IV_n)_{\text{streng}}$ erwiesen ist. – $\mathbf{(IV_n)_{streng} \Rightarrow (IV_n)}$ ist trivial. – $\mathbf{(IV_n) \Rightarrow (V_n)}$: Für $x = 1$ ist (V_n) im Hinblick auf (1) trivial. Ist $1 < x$ (der Fall $0 < x < 1$ wird ähnlich behandelt), so gibt es eine natürliche Zahl n mit $1 < e^{1/n} < x$, und mit $\lambda = (e^{1/n} - 1)/(x - 1)$ gilt $e^{1/n} = \lambda x + (1 - \lambda)$. Aus (IV_n), (1) und (4) folgt $\lambda f(x) \leq 1/n$ oder wegen $\lambda > 0$ auch $f(x) \leq 1/(n\lambda) = (x - 1)/n\,(e^{1/n} - 1)$ und im Hinblick auf (D) $f(x) < x - 1$, also erst recht (V_n). – $\mathbf{(V_n) \Rightarrow (VI_n)}$: Ersetzt man in (V_n) x durch x_2/x_1 bzw. x_1/x_2, so ergibt sich mit (3) die Behauptung (VI_n). – $\mathbf{(VI_n) \Rightarrow (VII_n)}$: Für $x_1 = x_0 < x = x_2$ folgt aus (VI_n): $1/x \leq [f(x) - f(x_0)]/(x - x_0) \leq 1/x_0$, für $x_2 = x < x_0 = x_1$ dagegen $1/x \geq [f(x) - f(x_0)]/(x - x_0) \geq 1/x_0$, woraus (VII_n) unmittelbar resultiert. – $\mathbf{(VII_n) \Rightarrow (III_n)}$: Mit

(VII_n) folgt $f(x) - f(x_0) = \{[f(x) - f(x_0)]/(x - x_0)\} \cdot (x - x_0) \to (1/x_0) \cdot 0 = 0$. Folglich ist f bei x_0 stetig. Für $x_0 = 1$ folgt aus (VII_n) weiter $f[(1 + 1/n)^n] = n\, f(1 + 1/n) = f(1 + 1/n)/(1 + 1/n - 1) \to 1$, und mit der Stetigkeit von f, die soeben aus (VII_n) gefolgert wurde, auch $f[(1 + 1/n)^n] \to f(e)$, woraus sich $f(e) = 1$ ergibt. – **(VI_n) $\Rightarrow$ (VIII_n)**: Für $x_1, x_2 \geq a$ folgt aus (VI_n) $f(x_2) - f(x_1) \leq (x_2 - x_1)/x_1 \leq |x_2 - x_1|/x_1 \leq |x_2 - x_1|/a$ und $f(x_1) - f(x_2) \leq (x_1 - x_2)/x_2 \leq |x_1 - x_2|/x_2 \leq |x_2 - x_1|/a$ und hieraus weiter die Ungleichung in (VIII_n). Nach den bisherigen Ausführungen ist (VI_n) beispielsweise mit (III_n) logisch gleichwertig, und $f(e) = 1$ ist sichergestellt. – **(VIII_n) $\Rightarrow$ (IX_n)**: Wählt man $\delta(\varepsilon) = a\,\varepsilon$, so folgt aus $x_1, x_2 \in P_a$, $|x_2 - x_1| < \delta(\varepsilon)$ stets $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$. – **($\mathrm{IX}_n$) $\Rightarrow$ (II_n)** ist trivial.

3. Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Ein wohlbekanntes Verfahren zum Beweis von Existenz und Eindeutigkeit eines mathematischen Objektes besteht darin, aus den notwendigen Bedingungen seine explizite Gestalt zu erschliessen und von dieser nachzuweisen, dass die einschlägigen Eigenschaften vorhanden sind. Der erste Teil hat axiomatischen, der zweite konstruktiven Charakter. So beweisen wir den in der Einleitung erwähnten

Satz 7 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz): *Es gibt genau eine normierte L-Funktion l. Sie besitzt die Wertmenge R, und für jede L-Funktion f gilt*

$$x \in P \Rightarrow f(x) = c\, l(x) \quad \mathit{mit} \quad c = f(e)\,[7]\,. \tag{6}$$

Obwohl an verschiedenen Orten Beweise der im wesentlichen gleichen Sachlage gegeben werden[8]), skizzieren wir hier einen Gedanken, der deshalb lohnend erscheint, weil er in den verschiedensten mathematischen Theorien – auch auf der elementaren Stufe – mit Erfolg angewandt werden kann: Wir meinen den Gedanken des beidseitigen Approximierens und Fortsetzens geeigneter Funktionen auf umfassendere Definitionsmengen.

Beweis: 1. Eindeutigkeit der normierten L-Funktion: Zu jedem $x \in P$ gibt es rationale Zahlen ϱ, σ mit $e^\varrho \leq x \leq e^\sigma$, woraus sich $\varrho \leq \sigma$ und die Existenz der Zahlen

$$\underline{c}(x) = \sup \varrho \quad [\varrho \text{ rational},\ e^\sigma \leq x]\,, \tag{7}$$

$$\bar{c}(x) = \inf \sigma \quad [\sigma \text{ rational},\ x \leq e^\sigma] \tag{8}$$

ergibt. Ist f eine normierte L-Funktion, so resultiert mit (I_n) und (4)

$$x \in P \Rightarrow \underline{c}(x) \leq f(x) \leq \bar{c}(x)\,. \tag{9}$$

Zu beliebigen $x \in P$, $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n mit $1/n < \varepsilon$ und weiter eine ganze Zahl p mit $e^p \leq x^n < e^{p+1}$, also $e^{p/n} \leq x < e^{(p+1)/n}$. Daraus folgt $\underline{c}(x) \geq p/n$, $\bar{c}(x) \leq (p + 1)/n$, also $\bar{c}(x) - \underline{c}(x) \leq 1/n < \varepsilon$, das heisst

$$x \in P \Rightarrow \bar{c}(x) = \underline{c}(x)\,. \tag{10}$$

[7]) Vergleiche [1], p. 48. Der Satz erweist sich auch als Korollar eines zum Beispiel in [4], p. 99, formulierten Erweiterungssatzes für monotone Funktionen.

[8]) Vergleiche [3]), [4]), [5]), [7]) und [6], [7], [8].

Aus (9) und (10) folgt nun nicht nur die eindeutige Bestimmtheit von f, sondern auch eine der expliziten Gestalten:

$$f(x) = l(x) = \sup_{e^\varrho \le x} \varrho = \inf_{x \le e^\sigma} \sigma \quad [\varrho, \sigma \text{ rational}] . \tag{11}$$

2. Existenz einer normierten L-Funktion: Es bleibt zu verifizieren, dass l in der Tat eine normierte L-Funktion ist. Monotonie und Normiertheit ergeben sich unmittelbar aus (11). Für die Gültigkeit von (H) genügt ein Hinweis auf (10) und die einfach herleitbare Zeile

$$x_1, x_2 \in P \Rightarrow \underline{c}(x_1) + \underline{c}(x_2) \le \underline{c}(x_1 x_2) \le \bar{c}(x_1 x_2) \le \bar{c}(x_1) + \bar{c}(x_2) . \tag{12}$$

3. Wertmenge von l: Für ein beliebiges u aus R gilt nach (4) und (III_n): $l(e^{[u]}) = [u] \le u < [u] + 1 = l(e^{[u]+1})$ [9]. Also muss l nach dem Zwischenwertsatz auf dem durch $e^{[u]}$ und $e^{[u]+1}$ berandeten Intervall den Wert u annehmen, und es gilt $u \in f(P)$ und schliesslich $f(P) = R$.

4. Nachweis von (6): Sei f eine beliebige L-Funktion. Für $f(e) = 0$ folgt aus (4) die Tatsache $f(e^\varrho) = 0$ (ϱ rational) und hieraus mit (A) und (I) weiter $f(x) = 0$ für alle x in P. Somit gilt (6) mit $c = 0 = f(e)$. Ist dagegen $f(e) \neq 0$, so ist durch $g(x) = f(x)/f(e)$ eine normierte L-Funktion g gegeben, und es gilt $g = l$, also wiederum (6) mit $c = f(e)$.

Es gelingt jetzt mit einfachsten Schlüssen, die zu Beginn formulierten Sätze 1 bis 4 herzuleiten: Nach dem Äquivalenzsatz ist (V_n) für normierte L-Funktionen charakteristisch, und aus (VII_n') folgt [10] die Stetigkeit von f an der Stelle 1, sowie $f(e) = 1$, womit die Sätze 1 und 2 hergeleitet sind. In den Sätzen 3 und 4 ist von einer L-Funktion f mit $f(a) = 1$ die Rede ($a \in P$, $a \neq 1$). Aus (6) folgt für $x = a$: $1 = f(a) = c \cdot l(a)$ oder $c = 1/l(a)$, insgesamt $f(x) = l(x)/l(a)$, das heisst Existenz und Eindeutigkeit von f. Es möge noch das soeben erschienene Resultat

$$f \text{ ist eine } L\text{-Funktion mit } f(a) = 1 \Rightarrow f(e) = \frac{1}{l(a)} \tag{13}$$

speziell erwähnt werden.

Definition: *Ist $a > 0$, $a \neq 1$, so heisst die (nach Satz 3 und 4 einzige) L-Funktion f mit $f(a) = 1$ die Logarithmusfunktion zur Basis a. Die Logarithmusfunktion l zur Basis e heisst die natürliche Logarithmusfunktion.*

In dieser Sprechweise besagt Satz 7, dass die in Satz 6 aufgeführten Eigenschaften (I) bis (IX) die Logarithmusfunktionen unter allen H-Funktionen charakterisieren; ferner bilden die Logarithmusfunktionen nach Hinzunahme der identisch verschwindenden H-Funktion einen eindimensionalen linearen Raum.

JÜRG RÄTZ, Bern

LITERATURVERZEICHNIS

[1] J. ACZÉL, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen* (Birkhäuser, Basel–Stuttgart 1961).
[2] M. BARNER, *Differential- und Integralrechnung I* (de Gruyter Berlin 1961).
[3] J. DIEUDONNÉ, *Foundations of Modern Analysis* (Acad. Press New York–London 1960).
[4] O. HAUPT und G. AUMANN, *Differential- und Integralrechnung I* (de Gruyter Berlin 1938).

[9] $[u]$ bedeutet das GAUSS'sche Klammersymbol.
[10] Vergleiche den Teil (VII_n) $\Rightarrow$ (III_n) des Beweises von Satz 6.