

## Werk

**Titel:** Aufgaben für die Schule.

**Jahr:** 1965

**PURL:** [https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?378850199\\_0020|log42](https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?378850199_0020|log42)

## Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)  
SUB Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

**Ausgabe 488.** Démontrer que  $s$  étant un nombre naturel donné et  $n_1, n_2, \dots, n_s$  une suite de  $s$  nombres naturels donnés quelconques, ils existent toujours des entiers  $a_1, a_2, \dots, a_s$  et  $b$  tels que l'équation

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_s x_s = b \tag{1}$$

a une seule solution en nombres naturels  $x_1, x_2, \dots, x_s$ , notamment  $x_i = n_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, s$ .  
W. SIERPIŃSKI, Varsovie

*Lösung:* Es seien  $A_1, A_2, \dots, A_s$  paarweise teilerfremde natürliche Zahlen und  $A_i \geq n_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ). Ist  $P = A_1 A_2 \dots A_s$ , dann genügen die Zahlen  $a_i = P/A_i$  den Bedingungen.

*Beweis:* Ist  $y_1, y_2, \dots, y_s$  eine von  $x_1 = n_1, x_2 = n_2, \dots, x_s = n_s$  verschiedene Lösung der Gleichung

$$\sum a_i x_i = b = \sum a_i n_i,$$

so setze man  $y_i = n_i + d_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ). Es gilt dann  $\sum a_i d_i = 0$ .  $a_i$  ist zu  $A_i$  teilerfremd, aber teilbar durch jedes  $A_k$  mit  $k \neq i$ . Weil  $\sum a_i d_i$  durch  $A_i$  teilbar ist, muss  $d_i$  durch  $A_i$  teilbar sein. Wären die beiden Lösungen  $x_1, x_2, \dots, x_s$  und  $y_1, y_2, \dots, y_s$  verschieden, so gäbe es einen Index  $j$  mit  $d_j < 0$ . Dann gilt aber  $|d_j| \geq A_j \geq n_j$  und somit ist  $y_j \leq 0$ , also keine natürliche Zahl. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Eine weitere Lösung sandte O. REUTTER (Ochsenhausen).

## Neue Aufgaben

**Aufgabe 509.** Auf einer Geraden  $g$  liegen drei Punkte  $A, B, C$  derart, dass  $A$  ausserhalb der Strecke  $BC$  liegt und die Strecke  $AB$  kleiner als die Strecke  $AC$  ist.  $A$  sei Doppelpunkt,  $B$  und  $C$  seien Scheitel einer verschlungenen Pascalschnecke  $c$  ( $c =$  rationale Quartik mit Spitzen in den absoluten Kreispunkten).

Man ermittle eine gestreckte Pascalschnecke  $c^*$ , die den gleichen Umfang besitzt wie  $c$ .  
R. BEREIS, Dresden

**Aufgabe 510.** Es ist zu beweisen, dass in einem Parallelepipid-Gitter alle vierseitigen konvexen Pyramiden mit Gitterpunkt-Ecken, die keine weiteren Gitterpunkte weder im Innern noch auf der Oberfläche enthalten, denselben Inhalt haben. Ist die Forderung der Konvexität notwendig?  
JÁNOS SURÁNYI, Budapest

**Aufgabe 511.** Ist  $G$  eine primitive Permutationsgruppe und ist  $N$  ein nicht trivialer Normalteiler von  $G$ , so ist  $N$  transitiv. (Beim Beweis benutze man, dass die Standuntergruppe einer Ziffer in  $G$  maximal ist.)  
R.-H. SCHULZ, Mainz

**Aufgabe 512.** Es seien,  $n, k, m, r, s$ , natürliche Zahlen,  $d(n)$  die Anzahl aller Teiler von  $n$  und man setze

$$D_s^{(r)} = \sum_{k|n^s} \{d(k)\}^r, \quad d_s = d(n^s).$$

Dann gilt

$$D_{2m}^{(1)} = d_m d_{2m}, \quad D_{6m}^{(2)} = d_{3m} d_{4m} d_{6m}, \quad D_{2m}^{(3)} = d_m^2 d_{2m}^2.$$

E. TROST, Zürich

## Aufgaben für die Schule

1. Sind die Halbierenden zweier Winkel parallel, so bestimmen deren Schenkel ein Sehnenviereck (CATALAN, 1886). Zeichne verschiedene derartige Winkelpaare und ziehe jedesmal das Sehnenviereck aus.

2. Für  $xyz = abc$  gilt

$$\frac{bx}{xy + b(a+x)} + \frac{cy}{yz + c(b+y)} + \frac{az}{zx + a(c+z)} = 1.$$

(CATALAN, 1886)

► Setze  $x = \lambda a$ ,  $y = \mu b$ ,  $z = \nu c$ , mit  $\lambda \mu \nu = 1$ .

3. Von einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse  $AB$  gegeben. Die Höhe sei  $CC'$ . Das Dreieck soll so bestimmt werden, dass  $AC' + CC'$  ein Maximum wird (FERMAT, 1629).

► Ist  $M$  der Mittelpunkt der Hypotenuse, so wird  $\sphericalangle BMC = 45^\circ$ .

4. GABRIEL CRAMER, Genf 1750, diskutierte «la courbe du diable» mit der Gleichung

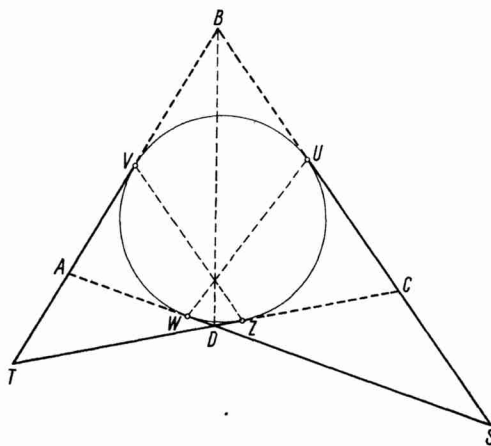
$$y^4 - x^4 + 100a^2x^2 - 96a^2y^2 = 0.$$

Bestimme die Punkte dieser Kurve auf der  $y$ -Achse, sowie die Ableitungen in diesen Punkten.

►  $y_{1,2} = \pm 4\sqrt{6}a$ ,  $y'_{1,2} = 0$ ;  $y_{3,4} = 0$ ,  $y'_{3,4} = \pm \frac{5}{2\sqrt{6}}$ .

5. Vier Punkte eines Kegelschnittes bestimmen ein Sehnenviereck, die Tangenten in diesen Punkten ein Tangentenviereck. Die Diagonalen dieser zwei Vierecke schneiden sich in einem Punkt.

► Da es sich um eine projektive Eigenschaft handelt, genügt es, sie für den Kreis zu beweisen. So ergibt sich der Satz von NEWTON, 1687. Er kann mit den Mitteln der Darstellenden Geometrie folgendermassen bewiesen werden:



Die Figur wird aufgefasst als Normalprojektion eines räumlichen Gebildes. Der Kreis liegt in der Projektionsebene, die Tangenten sind die Projektionen von Geraden, die den Neigungswinkel  $45^\circ$  und die Spurpunkte  $U, V, W, Z$  besitzen.  $S, T, D, B$  sind die Projektionen echter Schnittpunkte.  $BD$  ist Projektion der Schnittgerade zweier Ebenen mit den Spuren  $UV$  und  $VZ$ . Beweis für die zweite Diagonale  $AC$ , wenn  $T$  eine negative Kote hat.