$n + 1$ Lösungen, da p^n Norm der $(n+1)/2$ nichtreellen Zahlen π^n, $p\,\pi^{n-2}, \ldots, p^{(n-1)/2}\,\pi$ ist und jede Darstellung als Norm zu zwei Lösungen x, y und y, x führt. Damit ist die Behauptung für gerades k erwiesen (Für $k = 0$ ist sie evident).

Damit die Lösungsanzahl ungerade wird, muss es eine Norm mit $x = y$ geben. Das ist der Fall für $a_{2n+1} = 2\,p^{2n}$. a_{2n+1} ist hier Norm der $n+1$ Zahlen $(1+i)\,\pi^{2n}$, $(1+i)\,p\,\pi^{2n-2}, \ldots, (1+i)\,p^n$, von denen mit Ausnahme der letzten jede zu zwei Lösungen führt. Die Gleichung hat also hier $2\,(n+1) - 1 = 2\,n + 1$ verschiedene Lösungen.

Die so ermittelten Zahlen a_k sind nicht immer die kleinsten. Als solche findet man $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 2 \cdot 5^2 = 50$, $a_4 = 5 \cdot 13 = 65$, $a_5 = 2 \cdot 5^4 = 1250$.

C. Bindschedler, Küsnacht

In der kanonischen Primzahlzerlegung der natürlichen Zahl n sollen alle Primfaktoren der Form $4\,m + 3$ mit geradem Exponenten auftreten, während α_i der Exponent des Primfaktors $p_i \equiv 1 \pmod 4$ sei. $r(n)$ sei die Anzahl der Lösungen der Diophantischen Gleichung $n = x^2 + y^2$, wobei bei der Zählung sowohl die Reihenfolge von x und y als auch ihre Vorzeichen unterschieden werden. Bekanntlich (vgl. Hardy-Wright: Einführung in die Zahlentheorie, München 1958, S. 275) ist dann $r(n) = 4\,\Pi\,(\alpha_i + 1)$. Auf Grund dieses Satzes erhält der Aufgabensteller $a_k = 2 \cdot 5^{k-1}$, denn offensichtlich ist bei Beschränkung auf natürliche Zahlen die Lösungsanzahl $r(n)/4 = k$. J. Steinig (Zürich) unterscheidet die Lösungen x, y und y, x nicht und erhält in diesem Fall $a_k = p^{2k}$, wo p eine Primzahl der Form $4\,m + 1$ ist.

Weitere Lösungen sandten H. Gaebelein (Helmstedt) und W. Jänichen (Berlin).

Aufgabe 480. Démontrer que chacune des progressions $8\,k+1$, $8\,k+3$, $8\,k+5$ et $8\,k+7$ ($k = 1, 2, \ldots$) contient une infinité des nombres pseudopremiers (c'est-à-dire des nombres composés n tels que $n \mid 2^n - 2$).

A. Rotkiewicz, Varsovie

Solution de l'Auteur: On vérifie sans peine que si n est un nombre pseudopremier, le nombre $2^n - 1$ est aussi pseudopremier[1]). Pareillement, si $3 \nmid n$ et n est un nombre pseudopremier impair, le nombre $(2^n + 1)/3$ est aussi pseudopremier. En effet, si $3 \nmid n$, $2 \nmid n$ et n est un nombre pseudopremier, on a $2\,n \mid (2^n - 2)/3$. Donc

$$\frac{2^n+1}{3} \,\Big|\, 2^n + 1 \,\Big|\, 2^{2n} - 1 \,\Big|\, 2^{(2^n-2)/3} - 1 \,\Big|\, 2^{(2^n+1)/3} - 2$$

et le nombre $(2^n + 1)/3$ est aussi pseudopremier. Pareillement on démontre sans peine que si $3 \nmid n$ et n est un nombre pseudopremier, le nombre $(2^{2n} - 1)/3$ est aussi pseudopremier.

Soit $F_m = 2^{2^m} + 1$. On vérifie sans peine que les nombres $F_m\,F_{m+1}$, où $m = 2, 3, \ldots$, sont pseudopremiers. Donc les nombres n, $(2^n+1)/3$, $(2^{2n}-1)/3$, $2^n - 1$, où $n = F_m\,F_{m+1}$, sont pour $m = 2, 3, \ldots$ pseudopremiers. Comme $n = F_m\,F_{m+1} \equiv 1 \pmod 8$, $(2^n+1)/3 \equiv 3 \pmod 8$, $(2^{2n}-1)/3 \equiv 5 \pmod 8$ et $2^n - 1 \equiv 7 \pmod 8$, chacune des progessions $8\,k+1$, $8\,k+3$, $8\,k+5$ et $8\,k+7$ contient une infinité des nombres pseudopremiers.

Neue Aufgaben

Aufgabe 501. Man bestimme den geometrischen Ort für das Zentrum einer räumlichen Inversion, welche drei gegebene Punkte in die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks abbildet.

C. Bindschedler, Küsnacht

Aufgabe 502. Man bestimme die Zentren der Inversionen, welche vier gegebene Punkte des Raumes in die Ecken eines Parallelogramms abbilden.

C. Bindschedler, Küsnacht

---

[1]) Voir W. Sierpiński: *Remarque sur une hypothèse des Chinois concernant les nombres* $(2^n - 2)/n$, Colloquium Math. *1*, 9 (1947).