1. As $a_i = 2\,R\sin\alpha_i$ and $R + r = R\,\Sigma\cos\alpha_i$, we have

$$d = 2\,R\left(\Sigma\sin\alpha_i - \Sigma\cos\alpha_i\,\tan\frac{\pi}{3}\right);$$

therefore

$$d = 4\,R\Sigma\sin\left(\alpha_i - \frac{\pi}{3}\right) = 16\,R\,\Pi\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\,\alpha_i\right).$$

Hence we get the theorem: *in a non-equilateral triangle one has $d > 0$, $d = 0$ or $d < 0$ accordingly as the middle angle is greater than, as great as or lesser than $\pi/3$.*

In the first example given by STEINIG α_2 is the middle angle and

$$\cos\alpha_2 = 0{,}8 > 0{,}5$$

whence $\alpha_2 < \pi/3$ and $d < 0$.
In the second example $\cos\alpha_2 = 1/6 < 0{,}5$ and therefore $d > 0$.

2. Clearly d has the same sign as

$$\Delta = (\Sigma\,a_i)^2 - 12\,(R + r)^2.$$

Since

$$(\Sigma\,a_i)^2 = 2\Sigma\,a_i^2 + 4\,r\,(4\,R + r)$$

and

$$\Sigma\,a_i^2 = 9\,R^2 - O\,H^2,$$

we are lead to

$$\Delta = 6\,R^2 - 8\,R\,r - 8\,r^2 - 2\,O\,H^2$$

or

$$\Delta = 8\,(R^2 - 2\,R\,r) - (2\,R^2 - 8\,R\,r + 8\,r^2) - 2\,O\,H^2. \tag{1}$$

Now $O\,H = 2\,O\,N$ and $N\,J = {}^1/_2\,(R - 2\,r)$, where N denotes the centre of the nine-pointcircle; from this and (1) we obtain

$$\Delta = 8\,(O\,J^2 - N\,J^2 - O\,N^2)\,.$$

We have thus proved:

$$d > 0 \text{ if and only if } \sphericalangle\,J\,N\,O > \pi/2\,;$$
$$d = 0 \text{ if and only if } \sphericalangle\,J\,N\,O = \pi/2\,;$$
$$d < 0 \text{ if and only if } \sphericalangle\,J\,N\,O < \pi/2\,.$$

It is easily seen that our result is equivalent to the theorem: *$d > 0$, $d = 0$, $d < 0$ accordingly as $J\,O > J\,H$, $J\,O = J\,H$, $J\,O < J\,H$*[2]).

G. R. VELDKAMP, Technological University
Eindhoven, Netherlands

REFERENCE

[1] J. STEINIG, *Inequalities concerning the inradius and circumradius of a triangle*, El. Math. *18*, 127 (1963).

Aufgaben

Aufgabe 457. a) Wie gross ist das Achsenverhältnis einer Ellipse, der sich (unendlich viele) Sehnensechsecke einschreiben lassen, deren Seiten abwechselnd zu den beiden Winkelhalbierenden der Achsen parallel sind?

b) Zu jeder Ellipse mit einem Achsenverhältnis $a/b > \sqrt{3}$ gibt es zwei Scharen von Sehnensechsecken, bei denen je zwei aufeinanderfolgende Seiten aufeinander senkrecht

---

[2]) Bemerkung der Redaktion: Herr Steinig teilt uns mit, dass dieses Resultat auch leicht mit den Formeln (6) und (12) seiner Arbeit verifiziert werden kann.

stehen. Alle Sechsecke derselben Schar sind schiefsymmetrisch in bezug auf denselben Durchmesser der Ellipse. Man konstruiere ein solches Sechseck in eine gegebene Ellipse.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Lösung: Beschreibt man einem Kreis $k(O; r = a)$ einen Polygonzug $P_0 P_1 P_2 P_3 P_4 \ldots$ ein, dessen Sehnen abwechselnd zu zwei festen Richtungen parallel sind, so haben die orientierten Zentriwinkel $\sphericalangle P_0 O P_2$, $\sphericalangle P_2 O P_4, \ldots$ gleiche Grösse 2α mit $\sin\alpha = \overline{P_0 P_2} : 2a$. Der Polygonzug schliesst sich demnach genau dann nach $2n$ Zügen mit $P_{2n} = P_0$ und $P_i \neq P_0$ für $1 < i < 2n - 1$, wenn α die Bedingung

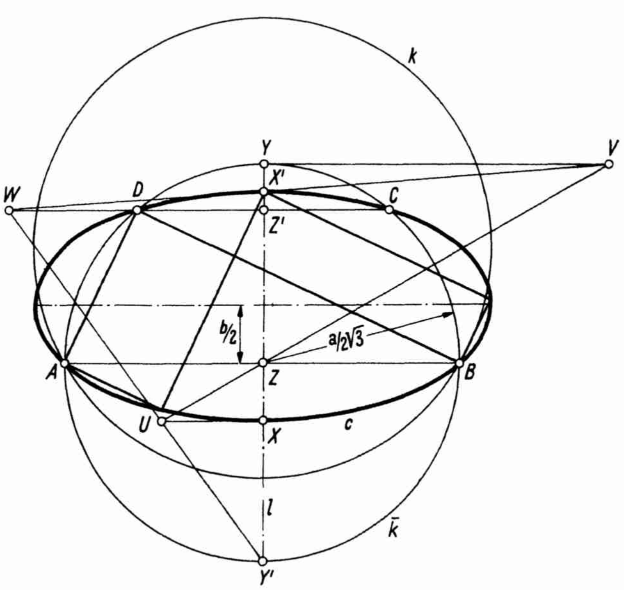
$$\alpha = \frac{q}{n}\pi, \quad n, q \text{ ganz und relativ prim} \tag{1}$$

erfüllt. Dies gilt unabhängig von der Lage der Anfangssehne $P_0 P_1$. Für $n > 2$ kann man sich auf die Werte $0 < \alpha < \pi/2$ beschränken, denn im Fall $\pi/2 < \alpha < \pi$ kann α durch den Nebenwinkel ersetzt werden, und für diesen gilt (1) ebenfalls. Es genügt also

$$0 < q < \frac{n}{2} \tag{2}$$

zu betrachten.

Die Sehnensechsecke der Aufgabe sind affin zu den geschlossenen Polygonzügen $P_0 P_1 \ldots P_6$ $(P_6 = P_0)$ im Kreis k. Für diese ist speziell $n = 3$, und damit folgt aus (2) und (1) eindeutig $q = 1$, $\alpha = 60°$. *In der Affinität zwischen dem Originalkreis k und der Bildellipse c sind also jene 60°-Winkel zu betrachten, deren Bilder rechte Winkel sind:* Wählt man eine zur grossen Achse $(a > b)$ der Ellipse c im Abstand $b/2$ parallele Sehne AB als Affinitätsachse (Figur), so fasst der grössere Bogen von k über der Sehne AB den Winkel 60°. Die Scheitel der Bildwinkel von 90° ergeben sich dann als Schnitte von c mit dem Thaleskreis $\bar{k}$ über AB.



Figur

Die von A und B verschiedenen Schnittpunkte C und D von c und $\bar{k}$ sind genau dann reell getrennt, wenn beide Nebenscheitel von c im Innern von $\bar{k}$ liegen. Da $\bar{k}$ den Radius $(1/2)\,\overline{AB} = (a/2)\sqrt{3}$ hat, gilt dann $(3/2)\,b < (a/2)\sqrt{3}$, also $a > b\sqrt{3}$. Die beiden Scharen der c einbeschriebenen Sehnensechsecke ergeben sich nun durch Ziehen von Parallelen zu

AC und BC bzw. zu AD und BD in der angegebenen Weise; die allen Sechsecken einer Schar gemeinsame schiefe Symmetrie folgt aus der Symmetrie der affinen Schar im Kreis k. Für $a = b\sqrt{3}$ fallen C und D in einem Nebenscheitel von c zusammen; AC und BC sind dann zu den Winkelhalbierenden der Ellipsenachsen parallel, wie in a) verlangt ist.

Das Kegelschnittbüschel mit den vier reell getrennten Grundpunkten A, B, C, D schneidet auf dem Mittellot l von $\overline{AB}$ eine hyperbolische Punktinvolution aus, die durch die Schnittpunkte X, X' und Y, Y' von c bzw. $\bar{k}$ mit l bestimmt ist. Das Parallelenpaar AB, CD schneidet als zerfallende Büschelkurve die Trägergerade l in einem Punktepaar Z, Z' dieser Involution. Da Z als Mitte von AB gegeben ist, kann Z' bekanntlich *durch Ziehen von 6 Geraden* bestimmt werden, die als Seiten eines vollständigen Vierecks auf der Geraden l die Involution X, X'; Y, Y'; Z, Z' ausschneiden.

Zur konstruktiven Durchführung wird man dieses vollständige Viereck so anlegen, dass die Schlussgerade mit CD zusammenfällt: Eine beliebige Gerade durch Z ($\nparallel AB$, $\nparallel l$) schneidet die Parallelen zu AB durch X und Y in U bzw. V; die Parallele zu AB durch den Schnittpunkt W von $X'V$ und $Y'U$ schneidet l in Z' und somit $\bar{k}$ in den gesuchten Punkten C und D, denn das durch U, V, W und den Fernpunkt von AB bestimmte vollständige Viereck scneidet auf l die vorliegende Involution aus.

Für $n > 3$ erhält man die c einbeschriebenen rechtwinkligen Sehnen-$2n$-Ecke in derselben Weise; der Abstand der Affinitätsachse AB von der Ellipsenhauptachse ist dabei nur so einzurichten, dass $\overline{AB} = 2a\sin\alpha$ wird, wobei auch mehrere Werte q bzw. α als Lösung von (2), (1) auftreten können. H. SCHAAL, Stuttgart

Der Aufgabensteller verwendet zur Lösung des zweiten Teils den orthoptischen Kreis der Ellipse (Radius $= \sqrt{a^2 + b^2}$). Einem Punkt P auf diesem Kreis muss bei der Affinität (Affinitätsverhältnis $= b : a$) ein Punkt P' entsprechen, von dem aus der Hauptkreis der Ellipse unter dem Winkel 60° erscheint. P' liegt also auf dem konzentrischen Kreis mit dem Radius $2a$. Für die gemeinsame Abszisse von P und P' ergibt sich sofort

$$x = \pm e^{-1}\sqrt{a^2 - 3b^2} \quad \text{mit} \quad e^2 = (a^2 - b^2)/a^2 .$$

Die Tangenten von P an die Ellipse geben die Richtungen der Seiten der gesuchten Sechsecke.

Eine weitere Lösung sandte G. GEISE (Dresden).

Aufgabe 458. Man zeige, dass für ein Tetraeder die Summe der Quadrate der Kantenprojektionen auf eine Ebene dann und nur dann von der Lage der Ebene nicht abhängt, wenn das Tetraeder regulär ist. W. JÄNICHEN, Berlin

Lösung: Das Tetraeder habe die Ecken O, A, B, C, so dass es durch die (linear unabhängigen) Vektoren $\boldsymbol{OA} = \mathfrak{a}$, $\boldsymbol{OB} = \mathfrak{b}$, $\boldsymbol{OC} = \mathfrak{c}$ schon beschrieben ist. Wir betrachten O als Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems und setzen A (a_1, a_2, a_3), B (b_1, b_2, b_3), C (c_1, c_2, c_3).

Das Tetraeder ist genau dann regulär, wenn die Vektoren

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} - \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{m} = \mathfrak{a} - \mathfrak{b} + \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{n} = -\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$$

Kantenvektoren eines Würfels sind. (Das erkennt man als unmittelbar anschaulich klar an oder man leitet aus den notwendigen und hinreichenden Bedingungen

$$\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{b}^2 = \mathfrak{c}^2 = (\mathfrak{a} - \mathfrak{b})^2 = (\mathfrak{b} - \mathfrak{c})^2 = (\mathfrak{c} - \mathfrak{a})^2$$

für ein reguläres Tetraeder die genauen Bedingungen

$$\mathfrak{l}^2 = \mathfrak{m}^2 = \mathfrak{n}^2, \quad \mathfrak{l}^T\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^T\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^T\mathfrak{l} = 0\,^{*})$$

für ein orthonormiertes Dreibein her.)

---

*) $\mathfrak{a}^T$ (1×3-Matrix) ist die Transponierte zu $\mathfrak{a}$ (3×1-Matrix). Red.

Nach dem Satz von POHLKE sind $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ genau dann Würfelkanten, wenn ihre Normalrisse auf die $x_1 x_2$-Ebene folgender Bedingung genügen:

$$0 = [(a_1 + b_1 - c_1) + i\,(a_2 + b_2 - c_2)]^2 + [(a_1 - b_1 + c_1) + i\,(a_2 - b_2 + c_2)]^2 + [(-a_1 + b_1 + c_1) + i\,(-a_2 + b_2 + c_2)]^2$$

oder

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 3\,(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - a_2^2 - b_2^2 - c_2^2) - 2\,(a_1 b_1 + b_1 c_1 + c_1 a_1) \\ &\qquad + 2\,(a_2 b_2 + b_2 c_2 + c_2 a_2) \\ &= 4\,(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - a_2^2 - b_2^2 - c_2^2) - (a_1 + b_1 + c_1)^2 + (a_2 + b_2 + c_2)^2\,, \\ 0 &= 3\,(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + c_1 a_2 + c_2 a_1) \\ &= 4\,(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) - (a_1 + b_1 + c_1)\,(a_2 + b_2 + c_2)\,. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Analog erhält man durch Normalprojektion auf die übrigen Koordinatenebenen die (notwendigen und hinreichenden) Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 4\,(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - a_3^2 - b_3^2 - c_3^2) - (a_2 + b_2 + c_2)^2 + (a_3 + b_3 + c_3)^2\,, \\ 0 &= 4\,(a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3) - (a_2 + b_2 + c_2)\,(a_3 + b_3 + c_3)\,; \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 4\,(a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 - a_1^2 - b_1^2 - c_1^2) - (a_3 + b_3 + c_3)^2 + (a_1 + b_1 + c_1)^2\,, \\ 0 &= 4\,(a_3 a_1 + b_3 b_1 + c_3 c_1) - (a_3 + b_3 + c_3)\,(a_1 + b_1 + c_1)\,. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Nun legen wir durch O eine Ebene ε mit der Gleichung

$$0 = r_1 x_1 + r_2 x_2 + r_3 x_3 = \mathfrak{r}^T \mathfrak{x} = 0\,, \qquad |\mathfrak{r}| = 1\,.$$

Ist dann k die Summe der Quadrate der Längen aller Kanten und s die Summe der Quadrate der Kantenprojektionen auf ε, dann ist klar, dass die in der Aufgabe angegebene Summe s durch die Summe $k - s$ ersetzt werden kann. Wir erhalten

$$k - s = (\mathfrak{r}^T \mathfrak{a})^2 + (\mathfrak{r}^T \mathfrak{b})^2 + (\mathfrak{r}^T \mathfrak{c})^2 + (\mathfrak{r}^T (\mathfrak{a} - \mathfrak{b}))^2 + (\mathfrak{r}^T (\mathfrak{b} - \mathfrak{c}))^2 + (\mathfrak{r}^T (\mathfrak{c} - \mathfrak{a}))^2\,.$$

Wegen $(\mathfrak{r}^T \mathfrak{x})^2 = (\mathfrak{r}^T \mathfrak{x})\,(\mathfrak{x}^T \mathfrak{r}) = \mathfrak{r}^T (\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}^T)\,\mathfrak{r}$ ergibt sich

$$k - s = \mathfrak{r}^T \mathfrak{M}\, \mathfrak{r}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^T + \mathfrak{b}\,\mathfrak{b}^T + \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}^T + (\mathfrak{a} - \mathfrak{b})\,(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})^T + (\mathfrak{b} - \mathfrak{c})\,(\mathfrak{b} - \mathfrak{c})^T + (\mathfrak{c} - \mathfrak{a})\,(\mathfrak{c} - \mathfrak{a})^T \\ &= 3\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^T + \mathfrak{b}\,\mathfrak{b}^T + \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}^T) - \mathfrak{a}\,(\mathfrak{b}^T + \mathfrak{c}^T) - \mathfrak{b}\,(\mathfrak{c}^T + \mathfrak{a}^T) - \mathfrak{c}\,(\mathfrak{a}^T + \mathfrak{b}^T) \\ &= 4\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^T + \mathfrak{b}\,\mathfrak{b}^T + \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}^T) - (\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c})\,(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c})^T \\ &= (4\,(a_i a_j + b_i b_j + c_i c_j) - (a_i + b_i + c_i)\,(a_j + b_j + c_j))_{(3,3)}\,. \end{aligned}$$

Ersichtlich ist $\mathfrak{M}$ eine symmetrische $(3, 3)$-Matrix.

Wird angenommen, dass die Summe $k - s$ von der Stellung der Ebene ε unabhängig ist, dann hat $\mathfrak{r}^T \mathfrak{M}\, \mathfrak{r} = c$ für ein gewisses $c \neq 0$ jeden Einheitsvektor $\mathfrak{r}$ als Lösung. Dies ist bekanntlich genau dann der Fall, wenn $\mathfrak{M} = c\,\mathfrak{E}$ ist. Dies führt auf die sechs Bedingungen

$$4\,(a_i a_j + b_i b_j + c_i c_j) - (a_i + b_i + c_i)\,(a_j + b_j + c_j) = c\,\delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, 3)\,,$$

die man unschwer als mit den Bedingungen (1), (2), (3) gleichwertig erkennt.

G. GEISE, Dresden

Im Fall des regulären Tetraeders sei K die Kantenlänge. Addiert man die drei Gleichungen mit $i = j$ aus der letzten Formelgruppe und beachtet, dass $2\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^2 = K^2$ usw., so folgt $3\,c = 4 \cdot 3\,K^2 - 2 \cdot 3\,K^2 = 6\,K^2$. Somit ist $c = 2\,K^2$ und $s = 4\,K^2$.