Sur les nombres pseudopremiers triangulaires

Théorème: *Il existe une infinité des nombres triangulaires qui sont pseudopremiers.*

Lemme: *Si n est un nombre naturel tel que*

$$n\,(2\,n-1) \mid 2^{n-1}-1 \quad \text{et} \quad 3 \nmid n\,(2\,n-1)\,, \tag{1}$$

alors pour $M=(2^{2n-1}+1)/3$, *on a*

$$M\,(2\,M-1) \mid 2^{M-1}-1 \quad \text{et} \quad 3 \nmid M\,(2\,M-1)\,. \tag{2}$$

Démonstration du lemme. Supposons qu'on a les formules (1). Soit $M=(2^{2n-1}+1)/3$. On a alors $2\,M-1=(2^{2n}-1)/3$, $M-1=2\,(2^{2(n-1)}-1)/3$ et d'après (1) on a $2\,n\,(2\,n-1) \mid M-1$, d'où on trouve

$$M=\frac{(2^{2n-1}+1)}{3} \mid (2^{2n-1}+1)\,(2^{2n-1}-1) \mid 2^{2n(2n-1)}-1 \mid 2^{M-1}-1 \tag{3}$$

et

$$2\,M-1=\frac{(2^{2n}-1)}{3} \mid 2^{2n(2n-1)}-1 \mid 2^{M-1}-1\,. \tag{4}$$

Comme $(M, 2\,M-1)=1$, il résulte de (3) et (4) que $M\,(2\,M-1) \mid 2^{M-1}-1$.

D'après $3 \nmid 2\,n-1$ on a $2\,n-1=6\,k+r$, où k est un entier $\geqslant 0$ et $r=1$ ou 5, d'où il résulte que $2^{2n-1}+1=2^{6k+r}+1 \equiv 2^r+1 \not\equiv 0 \pmod 9$, d'où: $3 \nmid (2^{2n-1}+1)/3 = M$. Pareillement, vu que $3 \nmid 2\,n$, on a $2\,n=6\,u+r$, où u est un entier $\geqslant 0$ et $r=2$ ou 4, d'où $2^{2n}-1=2^{6u+r}-1 \equiv 2^r-1 \not\equiv 0 \pmod 9$, d'où $3 \nmid (2^{2n}-1)/3 = 2\,M-1$. On a donc $3 \nmid M\,(2\,M-1)$ et le lemme se trouve démontré.

Démonstration du théorème. Pour $n=37$ on a $n\,(2\,n-1) \mid 2^{n-1}-1$ et $3 \nmid n\,(2\,n-1)$, puisque $37 \mid 2^{36}-1$, $2\,n-1=73 \mid 2^9-1 \mid 2^{36}-1$. Comme $M=(2^{2n-1}+1)/3>n$ pour $n>1$, il résulte de notre lemme que de tout nombre naturel $n>1$ satisfaisant aux conditions (1) on peut obtenir un plus grand nombre naturel n satisfaisant aux mêmes conditions. Il existe donc une infinité de nombres naturels n, tels que $n\,(2\,n-1) \mid 2^{n-1}-1$. Mais alors on a

$$t_{2n-1}=\frac{(2\,n-1)\,2\,n}{2}=$$

$$=n\,(2\,n-1) \mid 2^{n-1}-1 \mid 2^{(n-1)(2n+1)}-1 \mid 2^{n(2n-1)-1}-1 \mid 2^{n(2n-1)}-2=2^{t_{2n-1}}-2\,,$$

ce qui prouve que le nombre triangulaire t_{2n-1} est pseudopremier. Notre théorème est ainsi démontré.

Il est facile à vérifier que le plus petit nombre pseudopremier qui est triangulaire est le nombre $t_{33}=561=3 \cdot 11 \cdot 17$.