Werk

Titel: Über die gruppenalgebraische Struktur der Elementargeometrie. (Fortsetzung).

Autor: Jeger, M.

Jahr: 1964

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?378850199_0019|log13

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Si E est un ensemble de nombres naturels de densité supérieure $> 1/2$, *tout nombre naturel est d'une infinité de manières une différence de deux nombres de l'ensemble E.*

Or, d'après une remarque de M. A. SCHINZEL notre théorème peut être déduit sans peine de la proposition suivante, démontrée par M. T. NAGELL dans son travail *Zur Arithmetik der Polynome*, Abhandlungen aus dem Math. Seminar Univ. Hamburg *1* (1922), p. 188:

Si les nombres (a_i, b_i) $(i = 1, 2, 3)$ *ne sont pas divisibles par aucun carré d'un nombre premier, il existe une infinité de nombres naturels x pour lesquels les nombres* $a_1 x + b_1$, $a_2 x + b_2$, $a_3 x + b_3$ *sont dépourvus de diviseurs premiers carrés.*

Pour en déduire notre théorème, il suffit de prendre $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 = 0$.

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Über die gruppenalgebraische Struktur der Elementargeometrie

(Fortsetzung)

4. Aufbau der Geometrie auf dem Spiegelungsbegriff

Wir wollen uns jetzt noch einer *Entwicklungslinie in der geometrischen Grundlagenforschung* zuwenden, die aus den soeben dargelegten Gedankengängen herausgewachsen ist. Es hat sich gezeigt, dass von der gruppenalgebraischen Seite her ein axiomatischer Aufbau der Kongruenzgeometrie möglich ist. Im Vordergrund steht dabei eine *Gruppe mit einem invarianten Erzeugendensystem aus involutorischen Elementen.* Als Axiome werden einige Gesetze über involutorische Gruppenelemente postuliert. Wir sind damit bei der reinen gruppentheoretischen Geometrie angelangt, die mit Arbeiten von HJELMSLEV und REIDEMEISTER aus den Jahren um 1930 ihren Anfang nahm und die seither von der Kieler Geometerschule BACHMANNS wesentlich gefördert worden ist.

Wir wollen hier kurz auf das Bachmannsche Axiomensystem eingehen. Es geht von einer abstrakten Gruppe $\mathfrak{G}$ aus, in der ein invariantes Erzeugendensystem $\mathfrak{S}$ aus involutorischen Elementen gegeben ist. Wir bezeichnen die Elemente von $\mathfrak{S}$ als *Gruppen-Geraden*, involutorische Elemente aus $\mathfrak{G}$, die als Produkt von zwei Gruppen-Geraden darstellbar sind, sollen *Gruppen-Punkte* heissen[4]). Der Leser halte sich die Gruppe $\mathfrak{K}$ mit den Geraden- und Punktspiegelungen als Beispiel vor Augen. Für die Gruppen-Geraden und die Gruppen-Punkte behalten wir die Symbole Σ_g bzw. Σ_G aus der Gruppe $\mathfrak{K}$ bei.

In $\mathfrak{G}$ werden nun eine Inzidenz- und eine Orthogonalitätsrelation eingeführt:

Die Gruppen-Gerade Σ_g *und der Gruppen-Punkt* Σ_A *heissen inzident, wenn*

$$(\Sigma_g \circ \Sigma_A)^2 = I.$$

Die beiden Gruppen-Geraden Σ_f *und* Σ_g *heissen orthogonal, wenn* $(\Sigma_f \circ \Sigma_g)^2 = I$.

Diese Festlegungen erinnern uns an die beiden Äquivalenzen (1) und (2) in der Figur 7.

[4]) Bei BACHMANN werden die Gruppenelemente als Geraden und Punkte bezeichnet. Wir wollen diese Begriffe hier ausschliesslich für geometrische Objekte reservieren.

Axiome

I. *Zu zwei Gruppen-Punkten Σ_A und Σ_B gibt es eine Gruppen-Gerade Σ_g, die mit ihnen inzident ist.*

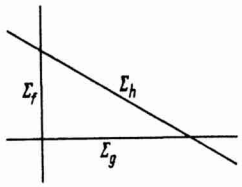
II. *Wenn die Gruppen-Punkte Σ_A und Σ_B mit den Gruppen-Geraden Σ_g und Σ_h inzident sind, dann ist entweder $\Sigma_A = \Sigma_B$ oder $\Sigma_g = \Sigma_h$.*

III. *Wenn die drei Gruppen-Geraden Σ_f, Σ_g, Σ_h mit dem Gruppen-Punkt Σ_A inzident sind, dann gibt es ein Σ_p, so dass $\Sigma_f \circ \Sigma_g \circ \Sigma_h = \Sigma_p$.*

IV. *Wenn die drei Gruppen-Geraden Σ_f, Σ_g, Σ_h zur Gruppen-Geraden Σ_q orthogonal sind, dann gibt es ein Σ_p, so dass $\Sigma_f \circ \Sigma_g \circ \Sigma_h = \Sigma_p$.*

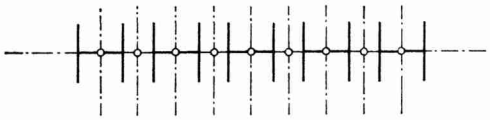
Der Leser wird wohl sofort die beiden letzten Axiome mit der Äquivalenz (5) aus der Gruppe $\mathfrak{R}$ in Verbindung bringen.

V. *Es gibt Gruppen-Geraden Σ_f, Σ_g, Σ_h, die ein rechtwinkliges Dreiseit bilden; Σ_f und Σ_g sind orthogonal, und Σ_h ist nicht inzident mit dem Gruppen-Punkt $\Sigma_f \circ \Sigma_g$ (Figur 10).*



Figur 10

Die durch dieses Axiomensystem gegebene Theorie nennt BACHMANN die ebene *metrische Geometrie*. Ein Modell, das dem Axiomensystem genügt, heisst eine *metrische Ebene*. Offensichtlich liefert die Kongruenzgruppe $\mathfrak{R}$, von der wir ausgegangen sind, ein solches Modell. Das Erzeugendensystem $\mathfrak{S}$ ist der Komplex der Geradenspiegelungen. Das Axiom V garantiert gewissermassen die Zweidimensionalität unserer metrischen Geometrie. Diese Tatsache wird durch das folgende Modell beleuchtet, das den Axiomen I bis IV genügt, V hingegen nicht befriedigt: Man nehme für $\mathfrak{G}$ die Gruppe der kongruenten Abbildungen, die das (unbegrenzt zu denkende) Ornament in der Figur 11 in sich selbst überführen. $\mathfrak{S}$ ist der Komplex der Geradenspiegelungen mit den strichpunktierten Achsen.



Figur 11

Zahlreiche Sätze der Elementargeometrie bestehen bereits in der metrischen Geometrie. Wir erwähnen als Beispiel den Satz über die Inzidenz der Mittelsenkrechten in einem Dreieck, der für die Gruppe $\mathfrak{R}$ durch Spiegelungsrechnen bewiesen wurde. Definiert man die Mittelsenkrechte zu zwei Gruppen-Punkten in Anlehnung an die festgestellte Beziehung in der Gruppe $\mathfrak{R}$, so können wir den Beweis aus $\mathfrak{R}$ wortwörtlich für die allgemeine metrische Geometrie übernehmen.

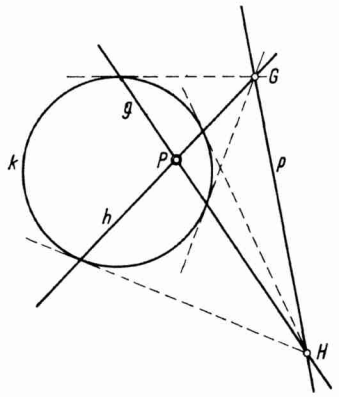
5. Metrische Ebenen

Mit den folgenden Beispielen soll der durch das Bachmannsche Axiomen-System vorgezeichnete Spielraum grob abgesteckt werden.

Wir betrachten zuerst die ebene *hyperbolische Geometrie* am Kleinschen Modell. Als Masskegelschnitt nehmen wir den Kreis k; hyperbolischer Lebensraum ist das Innere von k. Die hyperbolische Bewegungsgruppe $\mathfrak{G}$ besteht aus den Projektivitäten, die k fest lassen. Dazu gehören zum Beispiel die Perspektivitäten mit der Charakteristik $\chi = -1$, bei denen Zentrum und Achse in der Lage von Pol und Polare bezüglich k sind[5]). Diese involutorischen Abbildungen spielen nun in $\mathfrak{G}$ eine ähnliche Rolle wie die Geraden- und Punktspiegelungen in der Gruppe $\mathfrak{K}$. In Anlehnung an die Verhältnisse in der Gruppe $\mathfrak{K}$ unterscheiden wir in $\mathfrak{G}$ die beiden folgenden Typen von Involutionen:

a) Involutionen, bei denen das Zentrum ausserhalb von k liegt. Die Perspektivachse geht dann durch das Kreisinnere; die Abbildung hat also eine eigentliche Fixgerade. Man spricht in diesem Falle von einer *hyperbolischen Geradenspiegelung*. Die beiden Involutionen mit den bestimmenden Elementen (G, g) und (H, h) in der Figur 12 sind hyperbolische Geradenspiegelungen; wir bezeichnen sie mit Σ_g und Σ_h.

b) Involutionen, bei denen das Zentrum innerhalb von k liegt. In diesem Falle hat die Abbildung genau einen hyperbolischen Fixpunkt, und wir nennen sie eine *hyperbolische Punktspiegelung*. In der Figur 12 legen (P, p) die hyperbolische Punktspiegelung Σ_p fest.



Figur 12

Die Geradenspiegelungen bilden nun ein invariantes Erzeugenden-System von $\mathfrak{G}$, und jede Punktspiegelung ist als Produkt von zwei Geradenspiegelungen darstellbar. So gilt für die drei Spiegelungen in der Figur 12 $\Sigma_p = \Sigma_g \circ \Sigma_h$. Diese Beziehung besteht genau dann, wenn die Zentren und Achsen der drei Perspektivitäten in der Situation eines Polardreiecks zum Kreis k sind[6]).

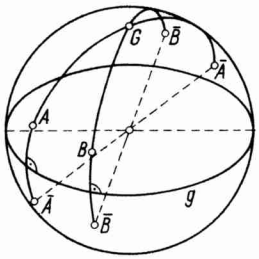
Nimmt man die hyperbolischen Geraden- und Punktspiegelungen als Gruppen-Geraden und Gruppen-Punkte in $\mathfrak{G}$, so befriedigt dieses System die Bachmannschen

[5]) Perspektivitäten mit der Charakteristik $\chi = -1$ werden als harmonische Spiegelungen bezeichnet.

[6]) Bilden die Achsen und Zentren von drei harmonischen Spiegelungen Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 ein Dreieck, so ist $\Psi_1 \circ \Psi_2 \circ \Psi_3 = I$. Man bestätigt dies sofort, wenn man durch eine projektive Abbildung die eine Dreieckseite zur unendlichfernen Geraden macht.

Axiome I bis V; die ebene hyperbolische Geometrie ist ein Spezialfall der ebenen metrischen Geometrie.

Dasselbe gilt auch für die ebene *elliptische Geometrie*. Eine Besonderheit der elliptischen Bewegungsgruppe liegt darin, dass jedes involutorische Element gleichzeitig Gruppen-Gerade und Gruppen-Punkt ist. Zur Illustration ziehen wir als Modell die Kugel mit Diametralpunkt-Identifikation heran. Die Gruppen-Geraden sind die Spiegelungen an Grosskreisen, die Gruppen-Punkte die Spiegelungen an Kugelpunkten. Aus der Figur 13 ist sofort ersichtlich, dass $\Sigma_G = \Sigma_g$ ist, wenn G Pol zum Grosskreis g ist.



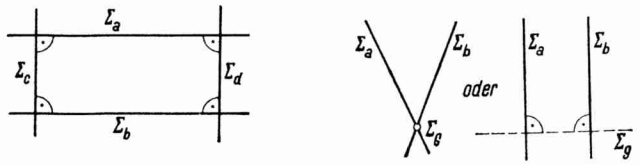
Figur 13

Die metrischen Ebenen sind von recht allgemeiner Natur. Die bis jetzt erwähnten Modelle zeigen uns, dass zum Beispiel über die Parallelenfrage das zu Grunde gelegte Axiomen-System keine Entscheidung enthält. Das Fehlen von *Anordnungs-Aussagen* in den Axiomen macht verständlich, dass die metrische Geometrie eine auffallend breite gemeinsame Basis der euklidischen Geometrie und der beiden nichteuklidischen Geometrien darstellt. Man kann diese drei Fälle leicht durch geeignete Zusatz-Axiome von der allgemeinen metrischen Geometrie abspalten. Für die euklidische Geometrie benutzt BACHMANN die folgenden Zusatz-Axiome:

E_1: *Es existieren Gruppen-Rechtecke, das heisst es gibt Gruppen-Geraden* Σ_a, Σ_b, Σ_c, Σ_d, so dass $\Sigma_a, \Sigma_b \perp \Sigma_c, \Sigma_d$.

E_2: *Je zwei Gruppen-Geraden haben entweder einen Gruppen-Punkt oder eine Gruppen-Senkrechte gemeinsam.*

Die Figur 14 zeigt die durch die Zusatz-Axiome umschriebenen Situationen für die Gruppe $\mathfrak{R}$.



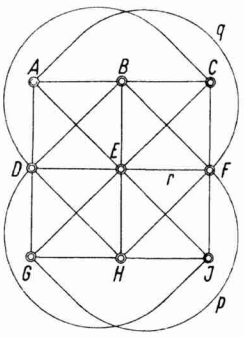
Figur 14

Das Bachmannsche System enthält auch keine *Stetigkeits-Aussagen*. Dadurch steht die Möglichkeit endlicher metrischer Ebenen durchaus offen. Tatsächlich gibt es sogar endliche euklidische Ebenen. Da endliche geometrische Systeme immer einen besondern Reiz ausüben, wollen wir unsere Aufzählung mit der Konstruktion einer endlichen euklidischen Ebene beschliessen.

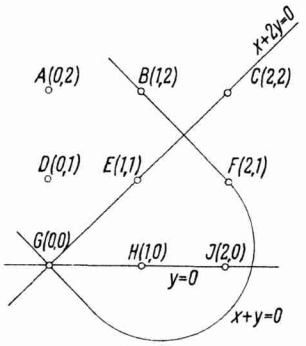
Wir betrachten die 9 Punkte $A\ B\ C\ D\ E\ F\ G\ H\ J$ in der Figur 15 und die 12 eingezeichneten Verbindungslinien. Um zum angekündigten Modell zu gelangen, fassen wir zwei Arten von involutorischen Permutationen der 9 Punkte ins Auge:

Permutationen 1. Art. Sie lassen die 3 Punkte auf einer Linie p fest (Fixpunkte). Die verbleibenden 6 Punkte werden paarweise ausgetauscht, entsprechend ihrer Inzidenz auf Linien, die zu p «senkrecht» sind (durch jeden Fixpunkt gibt es eine zu p senkrechte Linie).

Permutationen 2. Art. Ein Punkt F bleibt fest, und die verbleibenden 8 Punkte werden paarweise ausgetauscht, entsprechend ihrer Inzidenz auf Linien durch F.



Figur 15



Figur 16

Zu den Permutationen 1. Art gehören etwa

$$\Sigma_p = \begin{Bmatrix} ABCDEFGHJ \\ HBEJCFGAD \end{Bmatrix}, \quad \Sigma_q = \begin{Bmatrix} ABCDEFGHJ \\ AGDCJFBHE \end{Bmatrix}, \quad \Sigma_r = \begin{Bmatrix} ABCDEFGHJ \\ GHJDEFABC \end{Bmatrix},$$

und als Beispiele von Permutationen 2. Art nennen wir

$$\Sigma_F = \begin{Bmatrix} ABCDEFGHJ \\ HGJEDFBAC \end{Bmatrix}, \quad \Sigma_G = \begin{Bmatrix} ABCDEFGHJ \\ DFEACBGJH \end{Bmatrix}, \quad \Sigma_H = \begin{Bmatrix} ABCDEFGHJ \\ FEDCBAJHG \end{Bmatrix}^{7}).$$

Die Permutationen 1. Art erzeugen nun eine endliche Gruppe $\mathfrak{G}^*$, die auch die Permutationen 2. Art enthält. Man bestätigt zum Beispiel leicht auf Grund der Permutationsschemen, dass $\Sigma_F = \Sigma_p \circ \Sigma_q$ ist. Nennen wir jetzt die Permutationen 1. Art Gruppen-Geraden, die Permutationen 2. Art Gruppen-Punkte, so befriedigt die Gruppe $\mathfrak{G}^*$ mit diesen ausgezeichneten Elementen die Bachmannschen Axiome und gleichzeitig auch die beiden euklidischen Zusatz-Axiome.

Die Struktur der Gruppe $\mathfrak{G}^*$ ist leicht übersehbar; sie umfasst 72 Abbildungen, und zwar neben der Identität,

8 Translationen (4 Richtungen mit je 2 Schieb-Vektoren),
27 Drehungen (9 Drehzentren mit je 3 Drehwinkeln),
12 Geradenspiegelungen (Permutationen 1. Art),
24 Schubspiegelungen (zu jeder Linie gibt es 2).

Man kann unsere euklidische Ebene mit 9 Punkten und 12 Geraden auch auf analytischem Wege gewinnen. Wir betrachten dazu den Körper K_3 der Restklassen

[7]) Das Permutations-Schema gibt an, wie die Bilder der 9 Punkte liegen. Bei Σ_H geht etwa A an die Stelle von F, B an die Stelle von E und C an die Stelle von D.

mod 3; seine Elemente seien mit 0, 1 und 2 bezeichnet. Die affine Geometrie über K_3 besteht aus den Punkten (a_1, a_2) mit $a_j \in K_3$; es gibt 9 derartige Zahlenpaare, da für a_1 und a_2 je drei Möglichkeiten offenstehen. Andererseits sind die Geraden durch lineare Gleichungen

$$g_1 x + g_2 y + g_3 = 0 \quad \text{mit} \quad g_j \in K_3 \quad \text{und} \quad (g_1, g_2) \neq (0, 0)$$

gekennzeichnet. Hiezu bestehen $3\,(3^2 - 1) = 24$ Möglichkeiten, wobei aber zu beachten ist, dass die Multiplikation einer Gleichung mit dem Element 2 zu einer neuen Gleichung für dieselbe Gerade führt. Bei unserer Aufzählung wird also jede Gerade zweimal gezählt. *Die affine Geometrie über dem Körper K_3 besteht aus 9 Punkten und 12 Geraden.*

Wir ziehen jetzt aus den linearen Substitutionen über K_3

$$\begin{aligned} \bar{x} &= a_{11} x + a_{12} y + a_{13} \\ \bar{y} &= a_{21} x + a_{22} y + a_{23} \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

jene heraus, deren Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

orthogonal ist. Sie bilden die sog. *orthogonale Gruppe über K_3*. Ihre Anzahl lässt sich leicht abzählen, wenn wir von der folgenden Zusammenstellung aller orthogonalen zwei-reihigen Matrizen über K_3 ausgehen[8]):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus jeder dieser 8 Matrizen gehen nun je 9 orthogonale Substitutionen hervor, da für a_{13} und a_{23} in K_3 9 Kombinationsmöglichkeiten offen stehen. Man bestätigt ohne weiteres, dass unsere Bewegungsgruppe $\mathfrak{G}^*$ isomorph ist zur Gruppe der orthogonalen Substitutionen über dem Körper K_3. Die Figur 16 zeigt eine mögliche Identifikation der 9 Punkte unseres Modells mit den Punkten über K_3.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass in unserer endlichen euklidischen Ebene die freie Beweglichkeit fehlt. Es gibt zum Beispiel Geraden, die sich in der Bewegungsgruppe $\mathfrak{G}^*$ nicht ineinander überführen lassen. So ist sofort ersichtlich, dass p nicht in r transformierbar ist, da in $\mathfrak{G}^*$ 45°-Drehungen fehlen. Die gesuchte Transformation ist erst in der übergeordneten affinen Gruppe möglich.

Der an früherer Stelle bewiesene Satz über die Mittelsenkrechten im Dreieck ist in unserem Modell trivial; es enthält nämlich nur rechtwinklige Dreiecke.

Mit der Existenz von endlichen euklidischen Ebenen stellt sich natürlich sofort die Frage nach endlichen nichteuklidischen Ebenen. Ein diesbezügliches Modell hätte unsere Betrachtungen zur metrischen Geometrie in gewissem Sinne abgerundet. Wir müssen aber leider darauf verzichten. Ein Ergebnis der Bachmannschen Schule aus neuerer Zeit besagt, dass jede endliche Gruppe, die unsern Axiomen I bis V genügt,

[8]) Die erste Zeile enthält die Matrizen mit $\Delta = 1$; aus ihnen gehen die gleichsinnigen Kongruenzen hervor. Für die Matrizen der zweiten Zeile ist $\Delta = 2$; sie führen zu den ungleichsinnigen Abbildungen.