

Werk

Titel: Kleine Einführung in die Monte Carlo-Methode.

Autor: FILIPPI, S.

Jahr: 1963

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?378850199_0018|log32

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Il ne peut pas être $2 \mid n$, puisque alors $a^n + b^n$ serait une somme de deux carrés distincts de nombres premiers entre eux, donc aurait un diviseur premier de la forme $4k+1$, contrairement à (2). Le nombre n est donc impair. Comme $(a, b) = 1$ et d'après (2) on a $2 \mid a^n + b^n$, on trouve $2 \nmid ab$ et le nombre $(a^n + b^n)/(a+b)$ est impair > 1 . D'après (2) on trouve donc $(a^n + b^n)/(a+b) = 2^p - 1$, d'où $a+b = 2^{p-1}$ et

$$a^n + b^n = 2(a+b)^2 - (a+b), \quad a \geq 3. \quad (3)$$

S'il était $n > 3$, on aurait

$$a^n < a^n + b^n = 2(a+b)^2 - (a+b) < 2(a+a)^2 = 8a^2,$$

donc $a^{n-1} < 8a$, ce qui est impossible, vu que $a^{n-1} > 8a - 1$ pour $a \geq 3, n > 3$.

Le nombre $n > 1$ étant impair, on a donc $n = 3$ et, d'après (3), on trouve

$$a^2 - ab + b^2 = 2(a+b) - 1, \quad \text{donc } a(a-b-2) + (b-1)^2 = 0.$$

S'il était $b > 1$, on aurait $a-b-2 < 0$, donc $a \leq b+1$ et, comme $a > b$, on aurait $a = b+1$. Un des nombres a et b serait donc pair, l'autre impair, contrairement à (2). On a donc $b = 1$ et $a-b-2 = 0$, d'où $a = 3$ et $a^n + b^n = 28$. Le théorème 2 se trouve ainsi démontré.

Des théorèmes 1 et 2 résultent tout de suite les corollaires suivants:

COROLLAIRE 1. *Il n'existe aucun nombre parfait pair de la forme $a^n - 1$, où a et $n > 2$ sont des nombres naturels.*

COROLLAIRE 2. *Le nombre 28 est le seul nombre parfait pair de la forme $a^n + 1$, où a et $n > 1$ sont des nombres naturels.*

A. ROTKIEWICZ (Varsovie)

Kleine Einführung in die Monte Carlo-Methode

1. Einleitung

Die Monte Carlo-Methode gehört zu den statistischen Lösungsverfahren. Im wesentlichen besteht diese Methode in der Simulation eines stochastischen Vorganges auf einer elektronischen Rechenmaschine. Dabei werden für gewisse mathematische Probleme die ihnen äquivalenten stochastischen Vorgänge in einem «Spiel», dessen Regeln dem Charakter der jeweiligen stochastischen Vorgänge angepasst sind, nachgespielt.

Seit etwa zwanzig Jahren werden Monte Carlo-Verfahren zur Lösung von physikalischen und mathematischen Problemen, zum Beispiel zur Lösung von Diffusionsproblemen in der Reaktorthorie, zur Matrizeninversion, zur Berechnung von Integralen über n -dimensionale Bereiche, zur Lösung von gewissen partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen und speziellen vom parabolischen Typus, zur Lösung von linearen Integralgleichungen zweiter Art vom Fredholmschen Typus, vor allem aber zur Lösung von vielen Problemen in der «Operations Research» [vgl. [2]¹⁾] verwendet.

¹⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 85.

2. Zwei Beispiele zur Erläuterung der Monte Carlo-Methode

2.1. Beispiel 1

Ebenso wie NEWTON die Gravitationsgesetze angeblich bei der Beobachtung eines fallenden Apfels entdeckt haben soll, soll ein legendärer Mathematiker, der das Herumtorkeln eines Betrunkenen schmunzelnd beobachtete, dabei die Monte Carlo-Methode erfunden haben. Dieser Mathematiker stellte sich nämlich die Frage, wieviele Schritte der Betrunkene im Durchschnitt machen müsse, um sich von seinem Ausgangspunkt eine bestimmte Strecke weit zu entfernen. Dabei wird die Wahrscheinlichkeit, dass der Betrunkene bei jedem Schritt in jede Richtung gehen könnte, als gleich gross vorausgesetzt. Dieses Problem wird als Problem des «Zufallsweges» bezeichnet, und zu seiner Lösung wurde die sogenannte «stochastische Stichprobe» – eine Variante der Zufallsstichprobe – entwickelt, die später den Namen «Monte Carlo-Methode» erhielt.

Wir wollen die Monte Carlo-Methode am Beispiel des Betrunkenen kurz erläutern. Die Frage lautet: Wie gross ist die durchschnittliche Entfernung des Betrunkenen von seinem Ausgangspunkt nach n Schritten? Wie kann man nun die gesuchte durchschnittliche Entfernung schätzen, ohne eine grosse Zahl von Betrunkenen in einer ähnlichen Situation beobachtet zu haben? Mit Hilfe einer Tabelle von Zufallszahlen (vgl. Tabelle 1) lässt sich der Verlauf des Zickzackweges simulieren (nachspielen) und dadurch eine Annäherung an die wirkliche Situation erhalten. Aus einer *grossen Zahl*

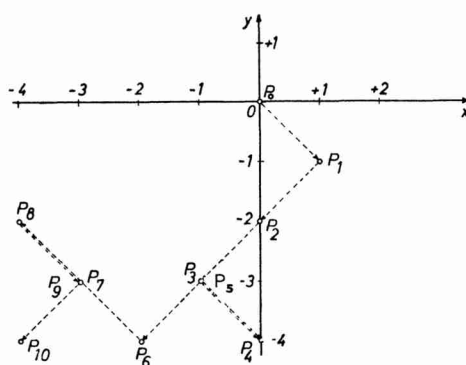
Tabelle 1

72	13	78	34	52	54	41	92	87	58	09	99	93	27	33
04	25	45	11	68	72	84	57	21	73	94	87	35	05	84
48	08	38	22	05	01	82	96	70	08	74	22	78	12	15
16	60	25	97	82	89	87	11	41	27	85	05	78	96	93
29	91	00	96	27	74	88	39	93	78	60	27	34	71	84
77	70	82	01	60	25	49	34	39	27	72	64	28	92	38
90	71	50	43	75	28	27	81	65	45	95	60	31	28	70
79	66	67	60	16	34	48	27	11	52	25	60	08	52	50
72	19	38	27	80	63	31	43	80	51	47	33	88	25	77
30	95	32	43	14	02	87	28	10	11	15	66	31	56	08
36	18	37	38	34	27	14	66	49	99	96	99	46	35	52
01	96	49	06	73	54	01	67	47	73	64	18	31	10	51
47	40	83	91	76	73	06	74	21	25	31	84	42	63	03
10	73	98	59	08	93	94	13	09	76	16	30	43	23	26
32	40	15	30	79	75	65	28	27	47	05	40	79	78	20
24	35	83	12	96	13	23	86	69	78	90	10	02	81	55
99	09	91	11	55	08	21	89	19	78	39	82	51	09	20
30	34	73	06	52	33	55	12	24	49	04	77	82	11	57
40	32	25	96	17	32	58	55	13	18	77	69	99	52	06
68	86	78	78	65	81	69	37	67	50	65	37	76	91	14
45	53	31	87	33	36	68	94	66	25	98	92	71	10	32
24	35	58	32	74	26	97	75	98	55	44	24	03	32	26
54	12	98	54	70	72	54	30	24	72	01	24	05	20	01
79	35	09	29	50	59	25	58	34	36	85	41	40	51	28
36	61	19	77	93	02	05	55	07	15	90	56	07	03	96

dieser nachgespielten Versuche kann man dann die gesuchte durchschnittliche Entfernung für eine beliebige Zahl n von zufälligen Zickzackschritten näherungsweise ermitteln.

Wollen wir zum Beispiel die durchschnittliche Entfernung des Betrunkenen von seinem Ausgangspunkt nach $n = 10$ Schritten schätzen, so haben wir folgendermassen vorzugehen: Wir nehmen die Tabelle der zweistelligen Zufallszahlen (siehe Tabelle 1) zur Hand und vereinbaren folgendes:

I. Der Ausgangspunkt des Betrunkenen sei der Ursprung des Koordinatensystems (siehe Figur 1).



Figur 1

II. Die *erste Ziffer* der aus der Tabelle «gezogenen» zweistelligen Zufallszahlen soll die *Richtung des Schrittes entlang der x-Achse bestimmen*, und zwar soll ein Schritt in *Richtung der positiven x-Achse* gemacht werden, wenn die *erste Ziffer eine gerade Zahl oder Null* ist und in *Richtung der negativen x-Achse*, wenn die *erste Ziffer eine ungerade Zahl* ist.

III. Die *zweite Ziffer* von links der *gleichen* zweistelligen Zufallszahl soll analog zu II. die *Richtung des Schrittes entlang der y-Achse bestimmen*: *Positiv*, wenn gerade oder Null, *negativ*, wenn ungerade.

IV. $P(x_n, y_n)$ stelle die Lage des Betrunkenen am Ende des n -ten Schrittes dar; dabei wählen wir als Schrittweite $h = 1$.

V. $d_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ ist gleich der Entfernung des Betrunkenen am Ende des n -ten Schrittes.

Wir können jetzt das «Betrunkenen-Spiel» beginnen, indem wir zehn beliebige zweistellige Zufallszahlen aus unserer Tabelle 1 ausschreiben und aufgrund der Vereinbarungen I., II., ..., V., die einzelnen Schritte mit Start im Nullpunkt $P_0(0,0)$ ausführen und am Ende des zehnten Schrittes d_{10} berechnen. «Ziehen» wir zum Beispiel aus der Tabelle 1 die zweistelligen Zahlen (in der Tabelle eingerahmt), so haben wir die in der Tabelle 2 zusammengefassten und in Bild 1 graphisch dargestellten Schritte auszuführen.

Daraus erhält man für die Entfernung nach *einem* Zufallsweg

$$d_{10} = \sqrt{x_{10}^2 + y_{10}^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 5,657.$$

Das obige Verfahren muss natürlich für *sehr viele* Zufallswege mit Hilfe von Zufallszahlen aus einer grösseren Tabelle von zweistelligen Zufallszahlen wiederholt werden, damit man einen guten Durchschnittswert d_{10} erhält.

Tabelle 2

Schritt n	Erste Ziffer	Zweite Ziffer	Koordinaten des Punktes $P(x_n, y_n)$
1	8	3	(+1, -1)
2	9	1	(0, -2)
3	7	3	(-1, -3)
4	2	5	(0, -4)
5	7	8	(-1, -3)
6	3	1	(-2, -4)
7	5	8	(-3, -3)
8	9	8	(-4, -2)
9	0	9	(-3, -3)
10	1	9	(-4, -4)

Für dieses Spiel lässt sich auch eine exakte Lösung – nach einer grossen Zahl unregelmässiger Schritte – angeben; sie lautet

$$d_n = a\sqrt{n},$$

dabei stellt a die durchschnittliche Länge der vom Betrunknen durchschrittenen geraden Strecke und n die Anzahl der zurückgelegten Schritte dar.

2.2. Beispiel 2

Ein weiteres schönes Beispiel zur Illustration der Monte Carlo-Methode hat der französische Mathematiker Buffon zur Bestimmung von π – natürlich lässt sich π numerisch schneller und besser bestimmen – ersonnen: Man zeichnet auf ein Blatt Papier Parallelen im Abstand l und wirft in häufiger Wiederholung ein dünnes Stäbchen der Länge l (zum Beispiel ein Streichholz) auf dieses Blatt Papier und zählt

a) die *Anzahl aller Würfe* (fällt einmal das Stäbchen auf den Boden oder ausserhalb des Blattes, so wird dieser Wurf nicht mitgezählt),

b) die *Anzahl derjenigen Würfe*, in denen das Stäbchen *eine der Parallelen schneidet*.

Es lässt sich zeigen, dass das Verhältnis der Anzahl aller Würfe zur Anzahl derjenigen Würfe, in denen das Stäbchen eine der Parallelen schneidet, gleich $\pi/2$ ist.

3. Erzeugung von Zufallszahlen auf elektronischen Rechenmaschinen

Wir haben im Beispiel 2.1. unser «Betrunkenen-Spiel» unter Verwendung einer Tabelle von Zufallszahlen durchgeführt. Da die Monte Carlo-Methoden in jedem Fall eine *grosse Anzahl von Entscheidungen* über das Eintreten oder Nichteintreten zufälliger Ereignisse erfordern, und da man in einer elektronischen Rechenmaschine wegen der begrenzten Speicherkapazität nicht eine Tabelle von Zufallszahlen in beliebiger Länge speichern kann, werden die für die Durchführung der Monte Carlo-Methoden benötigten Zufallszahlen nach einem Programm erzeugt. Weil die Erzeugung von Zahlen nach einem Programm niemals streng Zufallszahlen liefern kann,

werden die so erhaltenen Zahlen als Pseudozufallszahlen – in der Folge schreiben wir jedoch nur Zufallszahlen – bezeichnet. Die Pseudozufallszahlen werden folgendermassen erzeugt: Ausgehend von einer beliebigen, frei wählbaren zwölfstelligen Dezimalzahl Z_0 bildet man die Folge $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$, bei der jedes Glied aus dem vorhergehenden durch Quadrieren – also $Z_{n+1} = Z_n^2$ – hervorgeht. Von dem 24-stelligen Produkt Z_n^2 werden dabei die mittleren zwölf Ziffern als *neues Glied* der Folge genommen. Man verwendet nun nacheinander die zwölf Ziffern jedes Gliedes der Folge einzeln oder in Gruppen von maximal zwölf Ziffern als Zufallszahlen für die Durchführung der Monte Carlo-Methoden. Sind die zwölf Ziffern aufgebraucht, so wird Z_{n+2} berechnet usw. Dabei ist zu beachten, dass die letzten sechs Stellen eines Gliedes der Folge Z_n zufällig alle gleich Null werden können. Dadurch werden infolge der Vorschrift zur Berechnung von $Z_{n+1}, Z_{n+2}, \dots$ die letzten sechs Ziffern von da an immer Null sein. Die Gleichverteilung der Zufallszahlen wäre daher gestört und das Ergebnis sicher nicht mehr zufällig. Durch Einbau einer Abfrage in das Programm lässt sich dieser Nachteil stets beheben. Tritt nämlich der Fall ein, dass die letzten sechs Ziffern eines Gliedes der Folge Null sind, so unterbricht man einfach das Verfahren und rechnet mit einem neuen Ausgangswert Z_{01} weiter usw. Unter Benutzung des Integral-Grenzwertsatzes von MOIVRE-LAPLACE und eines Satzes von KOLMOGOROV lässt sich aufgrund einer experimentellen Untersuchung (vgl. [4]) nachweisen, dass die so gewonnenen Zufallszahlen asymptotisch als Zufallszahlen angesehen werden können.

4. Ein Beispiel zur Lösung von Randwertproblemen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Hilfe der Monte Carlo-Methode

Um zum Beispiel das Randwertproblem

$$y'' + 2c y' = 0 \quad (c = \text{Konstante}) \quad (1)$$

mit den Randbedingungen $y(a) = A$ und $y(b) = B$ nach der Monte Carlo-Methode zu lösen, verwandelt man zuerst die Differentialgleichung (1) unter Verwendung der finiten Ausdrücke

$$y' \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

$$y'' \approx \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}$$

in die nach $y(x)$ aufgelöste Differenzengleichung

$$y(x) \approx \frac{1}{2} \frac{1+2hc}{1+hc} y(x+h) + \frac{1}{2} \frac{1}{1+hc} y(x-h) \quad (2)$$

oder

$$Y(x) = \frac{1}{2} \frac{1+2hc}{1+hc} Y(x+h) + \frac{1}{2} \frac{1}{1+hc} Y(x-h), \quad (2a)$$

wenn wir mit $Y(x)$ den Näherungswert von $y(x)$ bezeichnen. Führen wir die Abkürzungen

$$p = \frac{1}{2} \frac{1+2hc}{1+hc} \quad \text{und} \quad q = \frac{1}{2} \frac{1}{1+hc} \quad (3)$$

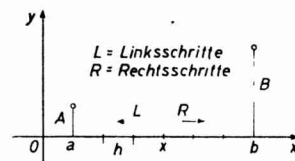
ein, so können wir die Differenzengleichung (2a) in der Form

$$Y(x) = p Y(x+h) + q Y(x-h) \quad (4)$$

schreiben. Da es durch eine geeignete Wahl von h bei beliebigem c immer möglich ist, die Koeffizienten p und q von (4) positiv zu machen, und da ausserdem $p+q=1$ und somit $0 \leq p \leq 1$ und $0 \leq q \leq 1$ gilt, können wir p und q als Wahrscheinlichkeiten deuten. Jetzt lässt sich die «Spielregel» zur Ermittlung einer Näherungslösung von (1) leicht (vgl. [1], [3], [5]) aufstellen. Die Spielregel lautet hier folgendermassen: Man verfolge den Weg einer «Spielfigur», die von einem Punkt x im Intervall $a < x < b$ Zufallsschritte der Länge h mit der Wahrscheinlichkeit p für Rechtsschritte und der Wahrscheinlichkeit q für Linksschritte [vgl. (3)] ausführt und notiere die Anzahl der Fälle, bei denen die Spielfigur den Randpunkt a bzw. b erreicht (siehe Figur 2). Dabei vereinbaren wir folgendes: Es sei $P(A)$ die dem zufälligen Ereignis A zugeordnete Wahrscheinlichkeit. Für $P(A)$ gilt immer $0 \leq P(A) \leq 1$. Ist nun Z_n irgendeine, nach dem oben genannten Programm erzeugte Zufallszahl, die der Bedingung $0 \leq Z_n < 1$ genügt, so sei das Ereignis A genau dann eingetreten, wenn $Z_n < P(A)$ ist. Auf das obige Spiel bezogen, bedeutet das, dass wir eine Zufallszahl, die kleiner als 1 ist, in der Rechenmaschine erzeugen und befragen, ob sie kleiner als p oder kleiner als q ist. Ist zum Beispiel diese Zufallszahl kleiner als p , so führen wir mit der Spielfigur einen Schritt der Länge h nach rechts aus. Startet man so von x aus eine hinreichend grosse Zahl n von *Zufallswegen* mit einer kleinen Schrittweite h , so stellt der Mittelwert

$$Y(x) = A \frac{n_a}{n} + B \frac{n_b}{n} \quad (5)$$

einen Näherungswert für die Lösung des gegebenen Randwertproblems (1) dar. Dabei ist n_a bzw. n_b die Anzahl der «Besuche» der Spielfigur bei a bzw. b , während A und B die gegebenen Randwerte darstellen.



Figur 2

In [1] wird bewiesen, dass die Lösung des Wahrscheinlichkeitsproblems, das zum hier angegebenen statistischen Prozess gehört, gegen die Differenzengleichung (2) konvergiert und dass die «Spielfigur» bei jedem Zufallsweg nach *endlich* vielen Schritten den Randpunkt a bzw. b erreicht.

Dieses Verfahren lässt sich auf mehrere Dimensionen verallgemeinern und somit auch zur Lösung einer bestimmten Klasse von partiellen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung verwenden. Die Monte Carlo-Methode erlangte erst bei der Lösung solcher Probleme eine *praktische Bedeutung* (vgl. [1], [4], [5]). Die Klasse der gewöhnlichen Differentialgleichungen [wie zum Beispiel (1)], die man mit Hilfe der Monte Carlo-Methode näherungsweise lösen kann, ist überdies immer *exakt lösbar*. Im Bereich der partiellen Differentialgleichungen ist dies jedoch selten der Fall.

5. Ein Beispiel zur numerischen Quadratur nach der Monte-Carlo Methode

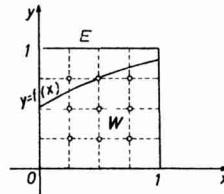
Wir wollen zum Beispiel das bestimmte Integral

$$Y = \int_0^1 f(x) dx \quad (1)$$

mit Hilfe der Monte Carlo-Methode lösen. Wir setzen dabei voraus, dass der Integrand $f(x)$ im Integrationsintervall $0 \leq x \leq 1$ das Vorzeichen nicht wechselt und dass $0 \leq f(x) \leq 1$ gilt. Dazu zeichnen wir zunächst in das Einheitsquadrat E ein quadratisches Gitter der Maschenweite h (vgl. Figur 3). Man kann nun nach der klassischen Definition des Flächeninhaltes den gesuchten Flächeninhalt Y der zwischen der Kurve $y = f(x)$ und der x -Achse liegenden Fläche W aus dem folgenden Grenzwert

$$Y = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{M^*}{M} F \quad (2)$$

erhalten, wobei F der Flächeninhalt des Einheitsquadrates ($F = 1$) und M bzw. M^* die *Anzahl aller Gitterpunkte*, die in der Fläche E bzw. in der Fläche W für eine gegen Null gehende Maschenweite h liegen, darstellt.



Figur 3

Bei Verwendung der Monte Carlo-Methode zur Lösung der numerischen Quadratur zählt man nun *nicht alle* in der Fläche E bzw. W gelegenen Gitterpunkte, sondern greift *zufällig* eine Menge (vgl. [5]) von m Punkten aus der Fläche E heraus und ermittelt *davon* die Anzahl m^* der in W hineinfallenden Gitterpunkte.

Die «Spielregel» zur Lösung von (1) mit Hilfe der Monte Carlo-Methode lautet daher:

Man erzeuge in einer elektronischen Rechenmaschine *laufend* eine Zufallszahl $Z_n = x_n$ ($0 \leq Z_n < 1$) nach der in 3. angegebenen Vorschrift, berechne dazu den Funktionswert $f(x_n)$ und erzeuge anschliessend wieder eine Zufallszahl $Z_{n+1} = y_n$ ($0 \leq Z_{n+1} < 1$) und baue in das Rechenprogramm die Abfrage ein, ob $f(x_n) \leq y_n$ ist oder nicht. Bei jeder Abfrage addieren wir

a) in einem Summenspeicher S_1 eine «1» (Start mit Summe = 0), dagegen

b) in einem Summenspeicher S_2 (Start mit Summe = 0) eine «1» *nur bei günstigem Ausgang* – $f(x_n) \leq y_n$, das heisst der durch x_n und y_n bestimmte Gitterpunkt $P(x_n, y_n)$ fällt in die Fläche W – der Abfrage.

Bei einer Anzahl von m solchen Abfragen zeigt der Summenspeicher S_1 die Anzahl m aller Abfragen und der Summenspeicher S_2 die Anzahl m^* aller günstigen Abfragen an. Damit kann man die relative Häufigkeit m^*/m berechnen und daraus den gesuchten Näherungswert für das bestimmte Integral (1)

$$Y \approx \frac{m^*}{m} \cdot F \quad (\text{hier ist } F = 1) \quad (3)$$

ermitteln.