ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XV Nr. 4 Seiten 73–96 Basel, 10. Juli 1960

Sur un problème concernant les nombres $k \cdot 2^n + 1$

Dans son travail [1] M. R. M. Robinson a donné une table de plusieurs nombres premiers de la forme $k \cdot 2^n + 1$. Il résulte de cette table que pour tout nombre naturel $k \leqslant 100$, sauf, peut-être, pour les nombres $k = 47$ et $k = 94$, il existe au moins un nombre naturel n tel que le nombre $k \cdot 2^n + 1$ est premier (pour $k = 47$ on a trouvé seulement que tous les nombres $47 \cdot 2^n + 1$ pour $n < 512$ sont composés). Cela suggère le problème, s'il existe pour tout nombre naturel k au moins un nombre naturel n pour lequel le nombre $k \cdot 2^n + 1$ serait premier.

Je prouverai ici que la réponse à ce problème est *négative*. Je démontrerai notamtent ce

Théorème: *Il existe une infinité de nombres naturels k tels que tous les nombres $k \cdot 2^n + 1$, où $n = 1, 2, \ldots$, sont composés.*

Démonstration[1]). Comme on sait, les nombres $F_m = 2^{2^m} + 1$ sont premiers pour $m = 0, 1, 2, 3$ et 4 et le nombre F_5 est le produit de deux nombres premiers 641 et $p > F_4$. D'après le théorème chinois bien connu sur les restes, il existe une infinité de nombres naturels k satisfaisant aux deux congruences

$$k \equiv 1 \pmod{(2^{32} - 1) \cdot 641} \quad \text{et} \quad k \equiv -1 \pmod{p}. \tag{1}$$

Je démontrerai que, si k est un entier $> p$ satisfaisant aux congruences (1), les nombres $k \cdot 2^n + 1$, où $n = 1, 2, \ldots$, sont composés.

Soit d'abord $n = 2^m(2t + 1)$, où m est un des nombres 0, 1, 2, 3, 4 et où t est un entier non négatif. D'après (1) on aura $k \cdot 2^n + 1 \equiv 2^{2^m(2t+1)} + 1 \pmod{2^{32} - 1}$ et, comme $F_m \mid 2^{32} - 1$ et $F_m \mid 2^{2^m(2t+1)} + 1$, on conclut que le nombre $k \cdot 2^n + 1$ est divisible par F_m et plus grand que $p > F_m$, donc composé.

Soit maintenant $n = 2^5 (2t + 1)$, où $t = 0, 1, 2, \ldots$ D'après (1) on aura $k \cdot 2^n + 1 \equiv$ $\equiv 2^{2^5(2t+1)} + 1 \pmod{641}$ et, comme $641 \mid 2^{2^5} + 1 \mid 2^{2^5(2t+1)} + 1$, on conclut que le nombre $k \cdot 2^n + 1$ est divisible par 641 et plus grand que 641, donc composé.

Il nous reste évidemment à examiner le cas, où le nombre n est divisible par 2^6, donc $n = 2^6 t$, où $t = 1, 2, 3, \ldots$ D'après (1), on aura $k \cdot 2^n + 1 \equiv -2^{2^6 t} + 1 \pmod{p}$, et comme $p \mid 2^{2^5} + 1 \mid 2^{2^6} - 1 \mid 2^{2^6 t} - 1$, on trouve que le nombre $k \cdot 2^n + 1$ est divisible par p et $> p$, donc composé.

[1]) Une simplification de ma démonstration est due à M. A. Schinzel.