Werk

Titel: Aufgaben.

Jahr: 1955

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?378850199_0010|log50

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

auslaufenden Halbsehne bezeichnet. Nun wende man die Aussage ac) im «orthogonalen» Fall an.

Erweiterungen der Sätze über stetige Richtungsfunktionen der hier besprochenen Art auf Räume höherer Dimensionen sind nur in einzelnen Fällen bekannt. So haben H. YAMABE und Z. YUJOBO[1]) das Theorem von S. KAKUTANI verallgemeinert. Danach nimmt eine stetige Richtungsfunktion des k-dimensionalen Raumes in k paarweise orthogonalen Richtungen den nämlichen Wert an. Hier stellt sich das Problem, alle Aussagen, die oben im Falle des gewöhnlichen Raumes erläutert worden sind, sinngemäss auf Räume beliebiger Dimension zu übertragen. H. HADWIGER.

Aufgaben

Aufgabe 221. Alle vier Seitenflächen eines Tetraeders sollen gleichen Flächeninhalt haben. Man beweise, dass folgende drei Punkte zusammenfallen:

1. Der Mittelpunkt der einbeschriebenen Kugel, das heisst der alle vier Seitenflächen innerlich berührenden Kugel.
2. Der Mittelpunkt der Umkugel, das heisst der durch die vier Eckpunkte gehenden Kugel.
3. Der Schwerpunkt des Tetraeders. F. GOLDNER, London.

Lösung: Zu einem beliebigen Dreieck als Grundfläche kann man direkt ein Tetraeder mit den vorausgesetzten und behaupteten Eigenschaften finden, indem man durch die Ecken des Dreiecks Parallele zu den Gegenseiten zieht und die so entstehenden vier kongruenten Dreiecke als Netz des Tetraeders auffasst. Weil die Umkreise der Seitenflächen dieses Tetraeders kongruent sind, hat der Mittelpunkt der Umkugel von den Seitenflächen gleiche Abstände und fällt also mit dem Inkugelmittelpunkt zusammen. Der Abstand des Tetraederschwerpunktes von einer Seitenfläche ist gleich einem Viertel der zugehörigen Tetraederhöhe. Aus der Betrachtung des Volumens folgt, dass die Tetraederhöhen gleich lang sind, also fällt der Schwerpunkt in den Inkugelmittelpunkt.

Das angegebene Tetraeder ist aber auch das einzige mit flächengleichen Seitenflächen. Geometrische Örter für die Spitze des zum gegebenen Dreieck als Grundfläche gehörenden Tetraeders sind drei Kreiszylinder, von denen jeder eine Dreiecksseite als Achse und die zugehörige Dreieckshöhe als Radius hat. Ihre Durchdringungen haben die Grundfläche zur Symmetrieebene und projizieren sich also darauf als drei Kurvenbögen *zweiter* Ordnung (Hyperbelbögen) eines durch vier Grundpunkte bestimmten Kegelschnittbüschels, indem jede Kurve durch die vier Schnittpunkte der beiden andern geht. Drei der Grundpunkte sind aber identisch mit den Ecken des erwähnten Netz-Dreiecks, die zugehörigen Zylinderschnittpunkte liegen in der Ebene der Grundfläche und ergeben keine eigentlichen Tetraeder. Es verbleibt der vierte Grundpunkt als Höhenfusspunkt des einzig möglichen Tetraeders.

Es sei noch bemerkt, dass die Höhe h sich in folgender Weise durch die Seiten a, b, c der Grundfläche ausdrückt:

$$h = \frac{2}{2\sqrt{2}F}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)\,(a^2-b^2+c^2)\,(-a^2+b^2+c^2)}, \qquad F = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}.$$

G. BALASTÈR, Zürich.

Die Tatsache, dass die Seitenflächen des Tetraeders bei gleichem Flächeninhalt kongruent sind, woraus die behaupteten Eigenschaften wie oben unmittelbar folgen,

[1]) Osaka math. J. *2*, 19–22 (1950).

beweist R. LAUFFER (Graz) folgenderweise: Projiziert man das Tetraeder parallel zu einer Kante, dann ist die Normalprojektion ein gleichschenkliges Dreieck. Die Achse dieses Dreiecks ist Projektion der Binormalen eines Gegenkantenpaares. Es halbiert daher die Binormale eines Gegenkantenpaares diese Kanten. Projiziert man das Tetraeder auf die zu den Kanten $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ parallele Ebene, dann ist die Normalprojektion ein Parallelogramm. Da auch die Kanten $\overline{BC}$ und $\overline{DA}$ durch ihre Binormale (die in dieser Projektion Hauptgerade ist) halbiert werden, muss die Projektion ein Rechteck sein. Es ist daher jede Kante gleich ihrer Gegenkante, und die Flächen sind kongruent.

Wie mehrere Löser bemerkten, sind noch viele andere Eigenschaften dieses «gleichseitigen Tetraeders» bekannt. Vergleiche etwa COUDERC-BALLICIONI, *Premier livre du tetraèdre*, S. 164.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), M. G. BEUMER (Enschede), A. KANTOR (Debrecen), J. SCHOPP (Budapest), J. P. SYDLER (Zürich), G. N. VLAHAVAS (London).

Aufgabe 222. Bei welchen ebenen Kurven ist jeder Kurvenpunkt seine eigene vierte Krümmungsmitte? R. BEREIS, Wien.

Lösung des Aufgabenstellers: Verstehen wir unter $h(\varphi)$ die Stützfunktion einer ebenen Kurve c (h und φ sind somit polare Speerkoordinaten), dann fällt die vierte Krümmungsmitte T_4 offensichtlich dann und nur dann in den zugehörigen Kurvenpunkt T, wenn

$$h + h'' = h'' + h^{(4)},$$

also

$$h - h^{(4)} = 0 \tag{1}$$

ist.

Aus (1) folgt durch Differentiation nach φ

$$h' - h^{(5)} = 0$$

und in weiterer Folge

$$h^{(n)} - h^{(n+4)} = 0, \tag{2}$$

woraus folgt, dass die Existenz von (1) nicht nur das Zusammenfallen von T_4 mit T, sondern auch die Identität von T_5 mit T_1, allgemeiner die Identität von T_{n+4} mit T_n zur Folge hat.

Zur Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 4. Ordnung (1) mit konstanten Koeffizienten verwendet man bekanntlich den Ansatz

$$h = e^{\lambda\varphi}.$$

Man erhält sodann die charakteristische Gleichung

$$\lambda^4 - 1 = 0 \tag{3}$$

und mithin als allgemeines Integral

$$\underline{h = C_1 e^{\varphi} + C_2 e^{-\varphi} + C_3 e^{i\varphi} + C_4 e^{-i\varphi}.} \tag{4}$$

Die durch (4) gekennzeichneten ebenen Kurven enthalten folgende erwähnenswerten Sonderfälle:

1. $h = e^{\varphi}$, eine *logarithmische Spirale*, die das Strahlbüschel ihres Spiralpunktes unter $\pi/4$ durchsetzt. Jede höhere Evolute geht aus der vorhergehenden durch eine Vierteldrehung um ihren Spiralpunkt hervor.

2. $h = (e^{\varphi} + e^{-\varphi})/2$, eine *Hyperzykloide*. Die höheren Evoluten sind abwechselnd Para- und Hyperzykloiden, und zwar sind alle Evoluten ungerader Ordnung Parazykloiden, alle gerader Ordnung Hyperzykloiden. Gleichartige Evoluten sind entweder identisch oder gehen durch zentrische Spiegelung auseinander hervor.

3. $h = (e^{\varphi} - e^{-\varphi})/2$, eine *Parazykloide*. Es gelten dieselben Bemerkungen wie bei 2. in sinngemässer Vertauschung.

4. $h = C_1 e^{i\varphi} + C_2 e^{-i\varphi}$ oder $h = A\cos\varphi + B\sin\varphi$, mithin ein *Strahlbüschel.* Bei dieser trivialen Lösung fallen sämtliche Krümmungsmitten nach T.

Weitere Lösungen sandten R. LAUFFER (Graz) und H. WAGNER (Karlsruhe).

Aufgabe 223. Calculer

$$1.\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\alpha}{n} + \sin 2\frac{\alpha}{n} + \cdots + \sin\alpha}{\frac{\alpha}{n} + \frac{2\alpha}{n} + \cdots + \alpha};$$

$$2.\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\alpha + \sin\frac{\alpha}{2} + \cdots + \sin\frac{\alpha}{n}}{\alpha + \frac{\alpha}{2} + \cdots + \frac{\alpha}{n}}.$$

H. BREMEKAMP, Delft.

Lösung: 1. Es sei $\alpha \neq 0$. Wir setzen $t = \alpha/n$, dann ist bei Summation von $i = 1$ bis $i = n$ und Bildung des Limes für $t \to 0$

$$\lim \frac{\Sigma \sin i\,t}{\Sigma i\,t} = \frac{\lim t \Sigma \sin i\,t}{\lim t \Sigma i\,t} = \frac{1}{\lim t^2 \Sigma i} \int_0^\alpha \sin x\,dx = \frac{2(1-\cos\alpha)}{\lim (t+\alpha)\,\alpha} = \frac{4\sin^2\alpha/2}{\alpha^2}.$$

R. LAUFFER, Graz; W. STRICKLER, Zürich.

Die andern Löser benutzten die bekannte Formel für $\Sigma \sin i\,t$.

2. Es sei $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ der gesuchte Grenzwert. Aus der Ungleichung

$$\frac{\alpha}{k} - \frac{\alpha^3}{3!\,k^3} < \sin\frac{\alpha}{k} < \frac{\alpha}{k} \qquad (\alpha > 0)$$

folgt

$$\alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{\alpha^3}{3!} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} < \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{\alpha}{k} < \alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Also ist

$$1 - \varepsilon_n < S_n < 1,$$

wo

$$\varepsilon_n = \frac{\alpha^2 \sum_{k=1}^{n} 1/k^3}{3! \sum_{k=1}^{n} 1/k}.$$

Weil $\Sigma 1/k^3$ konvergiert und $\Sigma 1/k$ divergiert, kann ε_n beliebig klein gemacht werden. Somit ist $S = 1$.

Lösungen von dieser Art sandten A. BAGER (Hjørring), J. BERKES (Szeged), A. KÁNTOR (Debrecen), K. RIEDER (Riehen), R. ROSE (Saarbrücken), H. WAGNER (Karlsruhe).

Das obige Resultat kann auch unmittelbar aus folgendem Satz von STOLZ[1]) gefolgert werden: Sind α_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ irgendwelche positive Zahlen, für die die Summen $\sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ nach $+\infty$ streben, so folgt aus $x_n \to \xi$, dass auch

$$x'_n = \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \to \xi.$$

Den Satz von STOLZ oder mit diesem verwandte Aussagen benutzen die Lösungen von L. BERNSTEIN (Tel-Aviv), M. G. BEUMER (Enschede), R. LAUFFER (Graz), W. STRICKLER (Zürich).

[1]) Vgl. K. KNOPP, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen* (J. Springer, Berlin 1924), S. 74.

Aufgabe 224. In einem Dreieck seien zwei Seiten a und b und der eingeschlossene Winkel γ gegeben. Es sei $a > b$ und $b/a = v$. Dann ist der Winkel gegenüber b die Summe der Reihe

$$\beta = v \sin\gamma + \frac{v^2}{2} \sin 2\gamma + \frac{v^3}{3} \sin 3\gamma + \cdots .$$

B. L. VAN DER WAERDEN, Zürich.

Lösung: Man zeichne das Dreieck mit den Seiten $BC = 1$, $CA = v$, $AB = w$ und der Höhe $AU = v \sin\gamma$. Aus dem Teildreieck ABU ergibt sich sofort

$$w e^{i\beta} = 1 - v\cos\gamma + i\, v \sin\gamma = 1 - v e^{-i\gamma}.$$

Folglich ist

$$\beta = \Im[\log(1 - v e^{-i\gamma})] \qquad \text{(Hauptwert)}$$

$$\beta = -\Im\left[\sum_1^\infty \frac{v^n e^{-in\gamma}}{n}\right] = \sum_1^\infty \frac{v^n \sin n\gamma}{n}.$$

WILLY LÜSSY, Winterthur.

L. BERNSTEIN (Tel-Aviv) und R. LAUFFER (Graz) gewinnen die Reihe für β auf reellem Wege durch Taylorsche Entwicklung der Funktion

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{v \sin\gamma}{1 - v\cos\gamma}.$$

Die Reihe für β findet man auch in H. DÖRRIE, *Unendliche Reihen* (R. Oldenbourg, München 1951), S. 680.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), J. BERKES (Szeged), J. BEST (Amsterdam), C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), H. WAGNER (Karlsruhe), J. ZBORNIK (Chur).

Aufgabe 225. Gegeben sind drei konzentrische Kreise k_1, k_2, k_3 mit den Radien $r_1 = 1$, $r_2 = 1/\sqrt{2}$, $r_3 = 1/\sqrt{3}$. Man wähle auf jedem der drei Kreise k_j je einen Punkt P_i derart, dass ein Dreieck mit maximalem Umfang entsteht.

Man zeige ferner (für beliebige Radienverhältnisse), dass die gemeinsame Kreismitte stets Inkreismittelpunkt aller Dreiecke mit maximalem Umfang ist. R. BEREIS, Wien.

Lösung: Der Aufgabensteller teilt folgenden allgemeineren Satz mit: Liegt von einem Dreieck je ein Eckpunkt A_i ($i = 1, 2, 3$) auf einer Kurve C_i, so gehen die Kurvennormalen in den Dreiecksecken durch den Inkreismittelpunkt, wenn der Dreiecksumfang ein relatives Extremum aufweist. Denkt man sich nämlich ein den Kurven C_i eingeschriebenes Dreieck mit extremem Umfang gefunden und hält zum Beispiel die Ecken A_2 und A_3 fest, so kann sich A_1 nur auf einer Ellipse mit den Brennpunkten A_2 und A_3 bewegen, wenn der Dreiecksumfang unverändert bleiben soll. C_1 muss also in der Umgebung von A_1 auf derselben Seite dieser Ellipse verlaufen und diese in A_1 berühren. Die Kurvennormale an C_1 in A_1 muss also die zu A_1 gehörende Innenwinkelhalbierende des Dreiecks $A_1A_2A_3$ sein. Da dies in analoger Weise auch für die beiden andern Ecken gilt, ist der Satz bewiesen.

Sind die C_i konzentrische Kreise mit den Radien r_i, deren Mittelpunkt also mit dem Inkreismittelpunkt des Dreiecks $A_1A_2A_3$ zusammenfällt, so genügt zur Konstruktion der Dreiecke mit extremem Umfang die Kenntnis des Inkreisradius ϱ. Zur Bestimmung von ϱ benutzt J. ZBORNIK (Chur) die Beziehungen

$$\sin\frac{\alpha_i}{2} = \varrho\, r_i^{-1}, \qquad \sum\cos\alpha_i = 3 - 2\sum\sin^2\frac{\alpha_i}{2} = 1 + 4\prod\sin\frac{\alpha_i}{2}.$$

Für die in der Aufgabe angegebenen r_i ergibt sich für ϱ die kubische Gleichung

$$2\varrho^3\sqrt{6} + 6\varrho^2 - 1 = 0$$