Werk

Titel: Topologische Gesichtspunkte in der Nomographie. (Fortsetzung).

Autor: Jeger, M.

Jahr: 1953

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?378850199_0008|log18

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare
Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

El. Math. Band VIII Nr. 3 Seiten 49–72 Basel, 15. Mai 1953

Topologische Gesichtspunkte in der Nomographie

Eine Einführung in die Geometrie der Gewebe

(Fortsetzung)

Anamorphose von Geradennetztafeln durch eine Reziprozität. Leiternomogramme

Die geometrischen Veränderungen unserer Netztafel haben bis jetzt nur aus topologischen Deformationen bestanden. Netztafeln, deren Träger Geradengewebe sind, gestatten nebst diesen Deformationen noch einen andern Typus von Anamorphose, nämlich Abbildungen, welche Geraden in Punkte und Punkte in Geraden überführen unter Festlassung der Inzidenzen[1]). Eine derartige Abbildung wird in der projektiven Geometrie als *Reziprozität* oder auch etwa als *Dualität* bezeichnet. Als Beispiel sei die Polarverwandtschaft an einem Kreise genannt.

Wir wollen nun zunächst die Parallelnetztafel einer Sechseckfunktion einer reziproken Abbildung unterwerfen.

Das reziproke Bild einer Gewebegeraden ist ein Punkt, das Bild einer (einparametrigen) Geradenschar somit eine einparametrige Schar von Punkten, auch *Punktreihe* genannt. Dabei wollen wir beachten, dass die Geraden jeder Schar numeriert sind, das heisst einen Parameterwert zugeordnet besitzen. Dasselbe gilt auch für die reziproken Punktreihen. In der Sprache der Nomographie heisst eine einparametrige Punktreihe eine *Skala*. Das reziproke Bild unserer Geradennetztafel besteht demnach aus drei Skalen. Da einem Geradenbüschel speziell eine lineare Punktreihe (Punktreihe auf einer Geraden) entspricht, geht unsere Parallelennetztafel in drei lineare Skalen über, deren Trägergeraden sich in einem Punkte schneiden. Durch eine Projektivität lässt sich dieser Schnittpunkt stets ins Unendlichferne befördern, so dass wir für das Weitere ohne Einschränkung der Allgemeinheit drei Parallelen als Träger annehmen dürfen. In der Netztafel laufen die drei Gewebekurven zu zusammengehörenden Variablenwerten x_0, y_0, z_0 durch einen Punkt P, den wir als Ablesepunkt bezeichnet haben. Dies hat zur Folge, dass im reziproken Bild die Skalenpunkte zu zusammengehörenden Variablenwerten auf einer Geraden p, der sogenannten *Ablesegeraden*, liegen. Diese Art graphische Rechentafel wird als *Leiternomogramm* bezeichnet.

Als Resultat unserer Betrachtungen wollen wir festhalten: Das reziproke Bild der Parallelennetztafel einer Sechseckfunktion ist ein Leiternomogramm mit drei inzidenten oder (was damit projektiv äquivalent ist) mit drei parallelen linearen Skalen

[1]) Liegt ein Punkt P auf einer Geraden g, so läuft die Bildgerade p durch den Bildpunkt G.

(Leiternomogramm vom Typus III). In der Figur 11 ist die Parallelennetztafel für $x\,y - z = 0$ nochmals aufgezeichnet und mit ihr das dazu reziproke Leiternomogramm.

Weiter entnimmt man den vorangegangenen Betrachtungen folgenden Satz:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $F(x, y, z) = 0$ ein Leiternomogramm vom Typus III zulässt, besteht darin, dass F Sechseckfunktion ist.

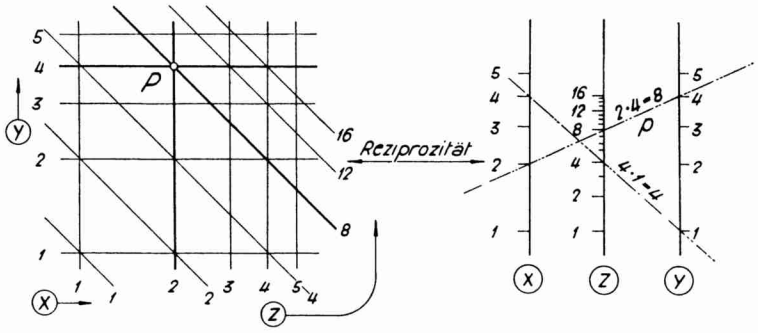


Fig. 11

Sind die Skalen in einem Leiternomogramm vom Typus III speziell äquidistant, so wird die sogenannte *Schlüsselgleichung* sehr einfach. Man findet direkt aus der Figur 12:

$$2\,\varphi_3(z) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y), \tag{6}$$

das heisst eine Beziehung von der Gestalt

$$f_1(x) + f_2(y) + f_3(z) = 0,$$

dies in Übereinstimmung mit einer bereits festgestellten Eigenschaft der Sechseckfunktionen.

Falls wir das Leiternomogramm der Figur 11 für die Funktion $x\,y - z = 0$ direkt herstellen wollen, haben wir die folgenden Identifikationen vorzunehmen:

$$\varphi_1(x) = \log x; \qquad \varphi_2(y) = \log y; \qquad \varphi_3(z) = \frac{\log z}{2}.$$

Dann wird nämlich aus (6):

$$\log z = \log x + \log y \qquad \text{oder} \qquad x\,y = z.$$

Die Leiternomogramme vom Typus III sind nicht die allgemeinsten; vielmehr besteht das allgemeinste Leiternomogramm aus drei krummen Skalen (Figur 13*a*). Das reziproke Bild davon ist eine Geradennetztafel, und umgekehrt geht jede Geradennetztafel durch eine Reziprozität in ein Leiternomogramm über. Diese Überlegung führt uns auf den folgenden wichtigen Satz der theoretischen Nomographie:

Eine Funktion $F(x, y, z) = 0$ lässt dann und nur dann ein Leiternomogramm zu, wenn das Trägergewebe der Netztafel einem Geradengewebe topologisch äquivalent ist.

Im Gegensatz zur Netztafel, die für jedes $F(x, y, z) = 0$ gezeichnet werden kann, lassen entsprechend dem eben formulierten Satze nur ganz bestimmte Funktionen

Leiternomogramme zu. Vom Standpunkt der Nomographie aus ist ein Kriterium dafür, ob eine vorgelegte Funktion $F(x, y, z) = 0$ ein Leiternomogramm zulässt, sehr erwünscht. Wie wir eben festgestellt haben, hat dieses Problem gewebegeometrischen Charakter; die Deformierbarkeit eines gewissen 3-Gewebes in ein Geradengewebe ist

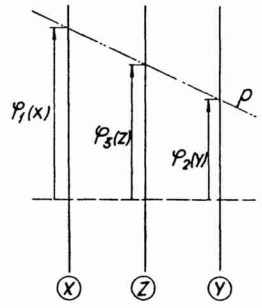
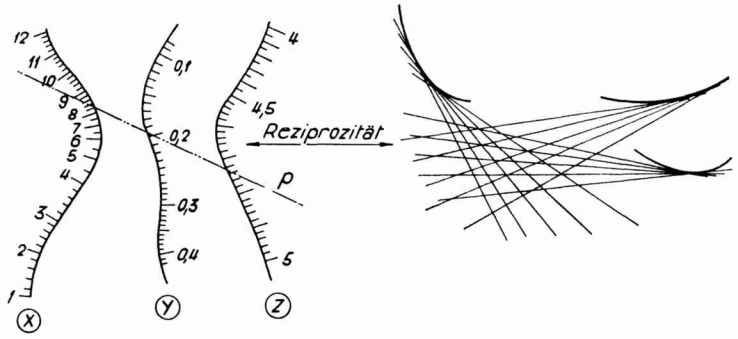


Fig. 12

für die Existenz eines Leiternomogramms massgebend. Im Falle des tatsächlichen Bestehens einer derartigen Deformation wäre als weitere Forderung der Nomographie die genaue Kenntnis dieser Deformation von grossem Wert; mit der Geradennetztafel ist ja via eine Reziprozität auch das Leiternomogramm bekannt.



a Fig. 13 *b*

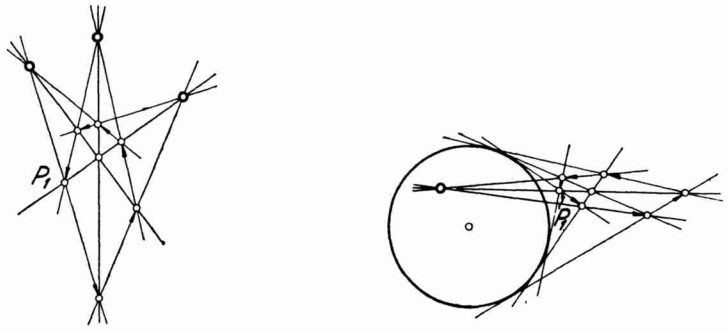
Eine vollständige Lösung dieses für die Nomographie eminent wichtigen Problems der Deformierbarkeit eines 3-Gewebes in ein Geradengewebe ist bis heute noch nicht gelungen. Die Lösungsansätze haben zur folgenden Fallunterscheidung geführt:

a) *Sechseckgewebe, das heisst* $F(x, y, z) = 0$ *ist Sechseckfunktion*

Diese Gewebeklasse ist am meisten erforscht, und die Frage der topologischen Äquivalenz mit einem Geradengewebe ist vollständig geklärt. Machen wir zwischen *projektiv-verwandten*[1]) Geradengeweben keinen Unterschied, so kennen wir bis jetzt

[1]) Zwei Geradengewebe sollen projektiv-verwandt heissen, wenn sie durch eine projektive Abbildung auseinander hervorgehen. Andernfalls bezeichnen wir sie als projektiv-verschieden.

genau eine gerade Realisation eines Sechseckgewebes, nämlich das Parallelengewebe. Als dazugehöriges Leiternomogramm haben wir den Typus III festgestellt. Daneben bestehen aber noch unendlich viele andere Möglichkeiten, ein Sechseckgewebe in



a Fig. 14 *b*

ein Geradengewebe zu verzerren; es gibt sogar unendlich viele *projektiv-verschiedene* gerade Realisationen. Ein Satz von GRAF und SAUER aus dem Jahre 1924 besagt folgendes:

Jedes Sechseckgewebe lässt sich in das Tangentengewebe einer beliebigen Kurve dritter Klasse deformieren, und dies sind die einzigen geraden Realisationen. Die Kurve dritter Klasse darf dabei auch ausgeartet sein.

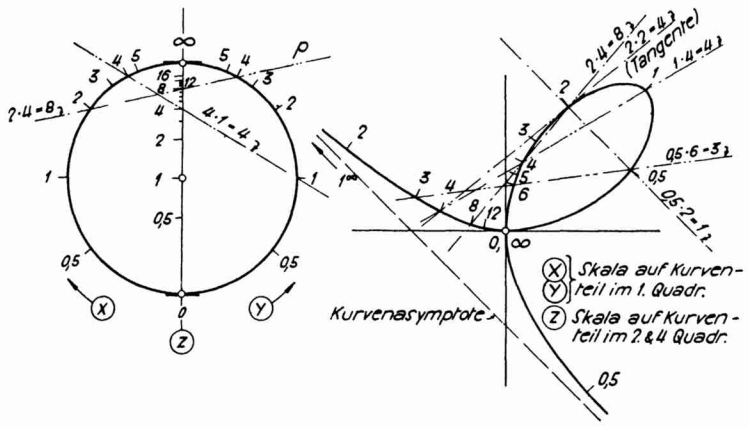


Fig. 15

Beim Parallelengewebe besteht die Kurve dritter Klasse aus den Tangenten an drei unendlichferne Punkte. Die Figur 14 zeigt zwei weitere Beispiele von geraden Sechseckgeweben.

Geht man von den geraden Realisationen eines Sechseckgewebes durch eine Reziprozität zu den Leiternomogrammen über, so folgt aus dem Satz von GRAF und SAUER, dass eine Sechseckfunktion unendlichviele projektiv-verschiedene Leiternomogramme

zulässt, und die drei Skalen liegen stets auf einer Kurve dritter Ordnung[1]). Umgekehrt erzeugt die Ablesegerade aus drei beliebigen Skalen auf einer Kurve dritter Ordnung immer eine Sechseckfunktion.

Die Figur 15 zeigt für unser Beispiel $F(x, y, z) = x\,y - z = 0$ noch zwei weitere Leiternomogramme. Im ersten Falle ist der Skalenträger eine zerfallende Kurve dritter Ordnung (Kreis und Gerade), im zweiten Falle dagegen eine irreduzible Kurve dritter Ordnung vom Geschlecht o, nämlich das sogenannte *Folium von Descartes*. In beiden Leiternomogrammen der Figur 15 bestätigt man für die Trägerkurve leicht die folgende Eigenschaft: Schneiden sich zwei Gegenseitenpaare eines auf der Trägerkurve liegenden Sechsecks wieder auf der Trägerkurve, so auch das dritte Paar. Diese Konfiguration ist für die Kurven dritter Ordnung charakteristisch (Satz von CHASLES; zerfällt die Kurve dritter Ordnung in einen Kegelschnitt und eine Gerade und liegt das Sechseck auf dem Kegelschnitt, so stimmt die Konfiguration in diesem Spezialfalle mit dem Pascalschen Kegelschnittsatz überein). Die duale Konfiguration für die Kurven dritter Klasse bildet den Kern für den Beweis des Satzes von GRAF und SAUER.

b) *Nichtsechseckgewebe*

Für diese ist das Problem der topologischen Äquivalenz mit einem Geradengewebe noch vollständig ungelöst. Diese Tatsache ist dafür verantwortlich, dass sich die praktische Nomographie mit einem Katalog von Schlüsselgleichungen begnügen muss, wie man ihn in fast sämtlichen Büchern über Nomographie findet. Für zahlreiche Typen von Leiternomogrammen sind die Schlüsselgleichungen hergeleitet worden; in einem konkreten Falle hat man dann zu versuchen, die vorgelegte Funktion auf die Gestalt einer solchen Schlüsselgleichung zu bringen. GRONWALL hat im Jahre 1912[1]) die Vermutung ausgesprochen, dass nur die Sechseckfunktionen projektiv-verschiedene Leiternomogramme besitzen. Dieses *Eindeutigkeitsproblem der Nomographie* ist aber bis heute ungelöst geblieben.

Es sei noch bemerkt, dass diese Abbildungsfragen interessanterweise bei höheren Geweben geklärt sind. Für Gewebe aus $n > 3$ Kurvenscharen lässt sich die Deformierbarkeit in ein Geradengewebe ohne weiteres feststellen. Dies sind aber gerade die Fälle, welche für die Nomographie keine Bedeutung haben.

Zum Abschluss noch eine historische Bemerkung. Die Geometrie der Gewebe geht zurück auf die beiden Hamburger Geometer BLASCHKE und THOMSEN. Durch eine kleine Schrift des letztern aus dem Jahre 1927 angeregt, sind in der Folge eine Reihe von Arbeiten unter dem gemeinsamen Obertitel *Topologische Fragen der Differentialgeometrie* entstanden. Die bis zum Jahre 1938 erschienenen Arbeiten dieser Reihe sind von BLASCHKE und BOL zu einem Lehrbuch[2]) zusammengestellt worden. Dort finden sich auch die Beweise der beiden in diesem Bericht erwähnten Sätze von BLASCHKE-THOMSEN und GRAF-SAUER.

M. JEGER, Olten und Zürich.

---

[1]) In dieser Form steht der Satz von GRAF und SAUER im wesentlichen schon bei T. H. GRONWALL, *Sur les équations entre trois variables*, J. Math. pures appl. *8* (1912).

[2]) W. BLASCHKE und G. BOL, *Geometrie der Gewebe* (Springer, Berlin 1938 [Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. XLIX]).