Werk

Titel: Un peu de mathématiques à propos d'une courbe plane.

Autor: De Rham, Georges

Jahr: 1947

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?378850199_0002|log26

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

El. Math. Band II Nr. 4 Seiten 73–88 Basel, 15. Juli 1947

Un peu de mathématiques à propos d'une courbe plane[1])

1. Les points qui divisent en trois parties égales les côtés d'un polygone fermé à n côtés P sont les sommets d'un nouveau polygone fermé P' à $2n$ côtés. Pour abréger, disons que P' se déduit de P par *trisection* (fig. 1).

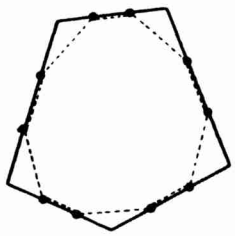

Fig. 1. Trisection d'un polygone

En partant d'un carré P_0 et en répétant cette opération, on obtient une suite de polygones P_n ($n = 0, 1, \ldots$), dont chacun se déduit du précédent par trisection. Ces polygones P_n tendent vers une *courbe limite* C, convexe, qui limite la région du plan formée des points qui appartiennent à tous les polygones P_n.

Ce procédé de trisection est utilisé pour tailler les manches de marteaux et donner au profil primitivement rectangulaire de l'ébauche une forme «arrondie». Après deux ou trois opérations, un coup de lime tient lieu de passage à la limite. M. ANDRÉ AMMANN, étudiant à Genève, à qui un élève de l'Ecole des Arts et Métiers qui construisait ainsi des marteaux avait demandé «l'équation» de la courbe C, en remarqua l'intérêt, et c'est à lui que je dois le sujet de cette conférence.

Dans les nos 2, 3 et 4, j'établis quelques propriétés de cette courbe et je prouve qu'*elle n'a aucun arc analytique*. Cette étude fait intervenir des suites de nombres rationnels, analogues aux suites de FAREY, considérées notamment par BROCOT, HALPHEN et LUCAS, que ce dernier appelle les *suites de* BROCOT. Pour ne pas renvoyer le lecteur à d'autres ouvrages, j'établis leurs propriétés essentielles au no 5.

Aux nos 6 et 7, je détermine des procédés permettant de calculer les coordonnées d'un point de C et le coefficient angulaire de la tangente, soit en fonction d'un para-

[1]) Le thème de cet article a fait l'objet d'une conférence présentée au *Cours de Perfectionnement* organisé par la Société suisse des Professeurs de l'enseignement secondaire à Lausanne en octobre 1946.

mètre qui s'introduit naturellement, soit en fonction de l'abscisse. Là se présentent des fonctions remarquables, dont l'une est la fonction «point d'interrogation de x» de MINKOWSKI. Au n° 8, j'établis quelques propriétés d'une suite particulière de nombres entiers, la suite de STERN, qui permet de retrouver les résultats précédents.

Dans un autre article, j'envisagerai la courbe et les fonctions définies ici d'un point de vue plus général, en les rattachant à des équations fonctionnelles.

2. Il est clair que les points milieux des côtés de P_n sont aussi points milieux de côtés de P_{n+1}, et par suite aussi points milieux de côtés de P_{n+k} ($k = 1, 2, \ldots$). Ils appartiennent donc à la courbe C.

Désignons par Q_n le polygone obtenu en joignant les points milieux des côtés successifs de P_n. Q_n est un polygone convexe inscrit dans la courbe C, tandis que P_n est circonscrit à cette même courbe. Q_n est contenu dans Q_{n+1}. La région du plan comprise entre Q_n et P_n se compose de triangles, en nombre égal au nombre des côtés de P_n ou de Q_n, soit 2^{n+2}. On les appellera les *triangles d'ordre n*. Chacun de ces triangles est limité par un côté de Q_n, qu'on appellera sa *base principale*, et par deux demi côtés de P_n (fig. 2).

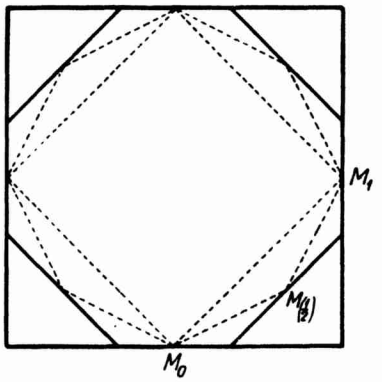

Fig. 2. Les polygones P_0 et P_1 (en trait plein), Q_0 et Q_1 (en trait pointillé), délimitant les 4 triangles d'ordre 0 et les 8 triangles d'ordre 1.

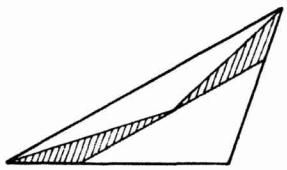

Fig. 3. Construction des deux triangles d'ordre $n+1$ contenus dans un triangle d'ordre n.

Chaque triangle d'ordre n contient deux triangles d'ordre $n+1$, que l'on obtient par la construction suivante: *on joint le centre de gravité du triangle d'ordre n aux deux extrémités de sa base principale, ce qui fournit les bases principales des deux triangles d'ordre $n+1$, et l'on mène par le centre de gravité une parallèle à la base principale* (fig. 3).

La courbe C est l'ensemble des points qui, pour tout entier n, appartiennent à un triangle d'ordre n. L'arc de C contenu dans un triangle d'un ordre donné est par suite complètement défini par la construction ci-dessus, et le caractère affine de cette construction entraîne la proposition suivante:

Les arcs de la courbe C contenus respectivement dans un triangle T d'ordre n et dans un triangle T' d'ordre n' sont affines. L'affinité qui change T en T' de manière que la base principale de T soit changée en la base principale de T' change l'arc situé dans T en l'arc situé dans T'.

3. Soient M_0 et M_1 les milieux de deux côtés consécutifs du carré P_0. Ce sont aussi deux sommets consécutifs du carré Q_0, et les extrémités de la base principale d'un triangle d'ordre 0.

Le polygone Q_n a $2^n - 1$ sommets compris entre M_0 et M_1. Chacun de ces sommets appartient aussi à Q_{n+1}, et celui qui dans Q_n occupe le rang h après M_0, occupe dans Q_{n+1} le rang $2h$ après M_0, et dans Q_{n+k} le rang $2^k h$ après M_0. Associons à ce point le nombre $\frac{h}{2^n}$ et désignons le par $M\left(\frac{h}{2^n}\right)$. Aux sommets M_0 et M_1 de Q_0 sont associés les nombres 0 et 1, $M_0 = M(0)$ et $M_1 = M(1)$.

L'ensemble des sommets des polygones Q_n situés sur l'arc $M_0 M_1$ de C est mis ainsi en correspondance biunivoque avec l'ensemble des nombres dyadiques (nombres rationnels dont le dénominateur est une puissance de 2) de l'intervalle (0,1).

Cette correspondance s'étend par continuité en une correspondance biunivoque et continue entre l'intervalle (0,1) et l'arc $M_0 M_1$ de C. En effet, chaque nombre t de l'intervalle (0,1) appartient à une suite d'intervalles $\left(\frac{h_n}{2^n}, \frac{h_n + 1}{2^n}\right)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ emboités les uns dans les autres, à laquelle correspond une suite de triangles T_n d'ordres $n = 1, 2, \ldots$ emboités également les uns dans les autres. D'après la construction indiquée au n° 2, L désignant la base principale de T_0, la base de T_n est inférieure à $\left(\frac{2}{3}\right)^n L$ et tend par suite vers zéro pour $n = \infty$. Il y a donc un point et un seul appartenant à tous les triangles T_n de la suite: *c'est le point $M(t)$ associé au nombre t.* Il décrit l'arc $M_0 M_1$ lorsque t varie de 0 à 1.

4. Introduisons un système de coordonnées rectangulaires Oxy, d'origine O au point M_0, l'axe des x passant par le côté du carré qui porte M_0 et l'unité étant choisie de manière que les coordonnées de M_1 soient $x = 1$ et $y = 1$ (fig. 4). Le côté du carré P_0 est alors égal à 2.

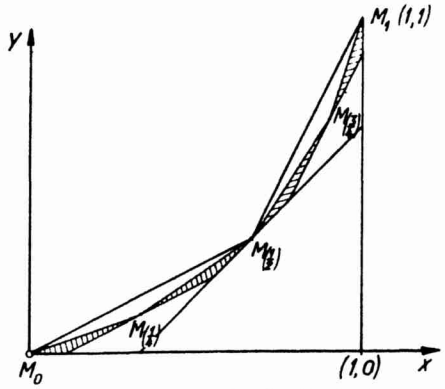

Fig. 4. Les axes de coordonnées et les 4 triangles d'ordre 2 contenant l'arc $M_0 M_1$.

L'affinité A qui change le triangle d'ordre 0 de base $M_0 M_1$ en le triangle d'ordre 1 de base $M_0 M\left(\frac{1}{2}\right)$ se traduit alors par les équations

$$x' = \frac{x + y}{3}, \qquad y' = \frac{y}{3}$$