Paul Koebe zum Gedächtnis.

Beide Autoren mußten ihre gemeinsame Liebe, die eine Variable, der sie selbst nicht immer winkeltreu waren, außer mit manchem andern auch mit Paul Koebe teilen. Es war indes keineswegs schwer, sie zu diesem Nachruf auf ihn zu bewegen. Ludwig Bieberbach würdigt seine wissenschaftlichen Leistungen und Hubert Cremer, unseren Lesern durch seine Carmina Mathematica bekannt, erzählt einige persönliche Erinnerungen.

Die Redaktion.

Bieberbach, Ludwig
Jahresbericht d. DMV
Bd. 70 (1968) S. 148–158

Das Werk Paul Koebes.

Von LUDWIG BIEBERBACH in Oberaudorf.

Paul Koebe wurde am 15. 2. 1882 in Luckenwalde als Sohn des Fabrikbesitzers Hermann Koebe geboren. Der Reifeprüfung am Joachimsthalschen Gymnasium in Berlin und einem Studium in Kiel (SS 1900) und Berlin, Universität und technische Hochschule, folgte am 24. 6. 1905 die Promotion mit einer von H. A. Schwarz angeregten Dissertation [1]. Diese Arbeit hat der Verfasser 1914 aus Anlaß des goldenen Doktorjubiläums seines Lehrers, überarbeitet und ergänzt, nochmals erscheinen lassen [34]. 1907 habilitierte sich Koebe in Göttingen, wurde dort 1910 außerplanmäßiger a.o. Professor, 1911 siedelte er als planmäßiger a.o. Prof. nach Leipzig über, wurde 1914 o. Prof. in Jena und kam 1926 als o. Prof. nach Leipzig. Dort fiel er am 6. 8. 1945 einem Magenkarzinom zum Opfer.

Mit der Arbeit [2] beginnt das eigentliche Lebenswerk. Von da ab hat nach der Formulierung von Hermann Weyl (Die Idee der Riemannschen Fläche. 4. Aufl. Stuttgart 1964, S. 137) Paul Koebe sein ganzes Forscherleben darauf verwendet, das Problem der *Uniformisierung* nach allen Richtungen und mit den verschiedensten Methoden durchzudenken. Auch die Frage, der sich Koebe in [2] zuwendet, gehört in dieses Gebiet. Schon Mitte der siebziger Jahre des vorigen Jahrhunderts kommt das Problem der schlichten konformen Abbildung eines beliebigen n-fach zusammenhängenden Gebietes auf ein von lauter Vollkreisen begrenztes Gebiet als Verallgemeinerung des Riemannschen Abbildungssatzes ($n = 1$) in einem Nachlaßstück von Riemann selbst und in der Dissertation von Friedrich

Schottky [Crelles Journal **83** (1877), 300–351] zum Vorschein. Letzterer hat es als Problem aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten formuliert. Aber erst Koebe gelang es, die Aufgabe in mehreren Anläufen [2], [5], [19] zu lösen. Ein in allen Einzelheiten durchgeführter Beweis erscheint erst in [50] 1920. In der Zwischenzeit wendet sich Koebe von [6] an dem alten, von David Hilbert 1900 in seinem berühmten Vortrag über mathematische Probleme als Nr. 22 nachdrücklich hervorgehobenen Uniformisierungsproblem zu. In [7] erscheint 1907 ein Verzerrungssatz, mit dessen Hilfe sich sowohl bei dem Riemann-Schottkyschen Abbildungsproblem als auch bei der Schwarz-Poincaré-Kleinschen Uniformierungsfrage die Lösung ergibt. Es ist die Entdeckung, daß die Familie der schlichten konformen Abbildungen eines Gebietes analog zu der Familie der in einem Gebiet die Werte 0 und 1 auslassenden analytischen Funktionen universelle Eigenschaften hat, d. h. Eigenschaften, die allen Gliedern der Familie gemeinsam sind. So haben der Landausche und der Schottkysche Satz, beide erst wenige Jahre zuvor entdeckt, den Verzerrungssätzen das Vorbild gegeben. Der erste hierher gehörige ist der heute sogenannte *Viertelsatz*. Koebe formuliert ihn in [7] so: „Es sei ein die z-Ebene schlicht überdeckender ganz im Endlichen liegender Bereich Σ gegeben, der den Nullpunkt in seinem Inneren enthält. Faßt man die Gesamtheit aller ganz im Endlichen gelegenen Bereiche Σ' ins Auge, welche den Nullpunkt im Inneren enthalten, die Ebene schlicht überdecken und mittels eindeutig umkehrbarer konformer Abbildung in den Bereich Σ übergeführt werden können, derart, daß der Nullpunkt bei der Abbildung in sich übergeht und daß das Vergrößerungsverhältnis an der Nullstelle den Wert eins hat, so gibt es eine nicht verschwindende Kreisfläche K, welche den Nullpunkt zum Mittelpunkt hat und ganz im Inneren aller Bereiche Σ' liegt." Im Falle, daß Σ die Kreisscheibe $|z| < 1$ ist, lautet dieser Satz: Ist $f(z)$ in $|z| < 1$ holomorph und schlicht (d. h. nimmt $f(z)$ in $|z| < 1$ keinen Wert mehr als einmal an), ist außerdem $f(0) = 0$, $|f'(0)| = 1$, so gibt es eine von $f(z)$ unabhängige positive Zahl ϱ, so daß $f(z)$ in $|z| < 1$ jeden Wert aus $|w| < \varrho$ annimmt. Vgl. [15]. Hier gibt Koebe auch $\varrho = 1/4$ als Vermutung an. Die *Extremalfunktion* bei diesem und den übrigen *Koebeschen Verzerrungssätzen* trägt zu recht Koebes Namen. Ihre Wichtigkeit für viele Beweisführungen hat Koebe zuerst richtig erkannt. Für einen Beweis ihrer Extremaleigenschaften hat er selbst sich freilich nicht aus eigenem Bemühen interessiert. Das zeigt sich noch in der Preisschrift [53], in der für den Viertelsatz und die übrigen Koebeschen Verzerrungssätze 1920 eine schöne systematische Herleitung ohne Eingehen auf die inzwischen durch andere Methoden gesicherten genauen Schranken gegeben wird. Aufgrund des Viertelsatzes gelang Koebe 1907 in [7] der Beweis des *Hauptsatzes der Uniformisierungstheorie.* Das bedeutet die Verallgemeinerung des Riemannschen Abbildungssatzes auf eine beliebige einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche. Darauf hatte schon H. A. Schwarz, nach einer mündlichen Tradition, das Uniformisierungsproblem, d. i. die eindeutige Parameterdarstellung analytischer Funktionen $w(z)$, reduziert durch Einführung der universellen Überlagerungsfläche der gegebenen Riemannschen Fläche der Funktion $w(z)$. Auf ihr sind alle auf der gegebenen Riemannschen Fläche lokal eindeutigen und lokal meromorphen Funktionen global eindeutig und lokal meromorph. Die universelle Überlagerungsfläche ist einfach zusammenhängend. Ihre schlichte konforme Abbildung bedeutet die Lösung des Uniformisierungsproblems. Erfolgt nämlich die konforme Abbildung auf ein schlichtes Gebiet einer t-Ebene, so werden w und z im Bildgebiet der t-Ebene eindeutige lokal meromorphe Funktionen von t. Das Bildgebiet ist entweder die volle Riemannsche Zahlenebene oder die Gaußsche Zahlenebene oder der Einheitskreis $|t| < 1$. Dem Aufbau der Überlagerungsfläche aus Exemplaren der gegebenen Riemannschen Fläche von $w(z)$ entspricht eine Parzellierung des Bildgebietes der t-Ebene. Die einzelnen Parzellen gehen durch die Operationen einer Gruppe linearer Transformationen des Bildgebietes in sich aus einander hervor. $z(t)$ und $w(t)$ sind automorphe Funktionen dieser Gruppe. Schon 1883 konnte Henri Poincaré dieses Problem für alle Riemannschen Flächen lösen, die 3 Punkte der Ebene unbedeckt lassen. 1907 konnte Poincaré gleichzeitig mit Koebe den eben erwähnten Hauptsatz der Uniformisierungstheorie mit seiner *méthode de balayage* beweisen [Acta Math. *31* (1908) 1–64]. Koebe griff den Poincaréschen Gedanken auf und gab in [9] 1907 eine Variante der Poincaréschen Beweisführung. Dabei war nun freilich das neue von Koebe eingeführte Hilfsmittel (Viertelsatz) entbehrlich. Der Harnacksche Satz der Potentialtheorie reichte aus.

Das neue Hilfsmittel erwies sich nun aber als nützlich beim Beweis der weiteren von Klein in Aussicht genommenen Uniformisierungssätze. Diese laufen in der Koebeschen Formulierung auf die schlichte konforme Abbildung einer jeden im topologischen Sinn schlichtartigen Riemannschen Fläche hinaus, d. h. einer Riemannschen Fläche, auf der es keine nichtzerstückenden geschlossenen Kurven gibt [11]. Beim Beweis wird nun neben dem Viertelsatz ein allgemeiner Konvergenzsatz benutzt. Das ist nichts anderes als das, was man in Montels

Theorie der normalen Funktionenfamilien heute kurz den *Vitalischen Reihensatz* nennt. Koebe hat ihn selbständig entdeckt [11]. Er leitet ihn aus der Wurzel ab, die auch den anderen Forschern die Anregung gab: Hilberts Arbeit über das Dirichletsche Prinzip (1901) und die vierte Mitteilung über Integralgleichung (1906) des gleichen Forschers. In [11] klingen überdies gewisse Abschätzungen an den Moduln (konforme Invarianten) zweifach zusammenhängender Gebiete schon ein wenig an die berühmte Streifenmethode von H. Grötzsch an. In [13] tritt zuerst der *Verzerrungssatz* auf, der von den Schranken für den Betrag der Ableitungen schlichter Abbildungen eines gegebenen Gebietes handelt. Mit diesen Mitteln gelingt der Beweis der von Klein formulierten allgemeinen Uniformisierungsaufgaben, namentlich auch der Nachweis, daß auch sie auf Gruppen linearer Transformationen führen. Koebe stellt in [23] auch fest, daß jedes Uniformisierungsproblem zu einer ausgezeichneten Untergruppe der Gruppe der Hauptuniformisierenden gehört. Die in Betracht kommenden ausgezeichneten Untergruppen näher zu charakterisieren oder gar sie aufzuzählen, findet Koebe [23] uninteressant. Offen bleibt so auch die Frage, ob jedes Uniformisierungsproblem (über die von Klein in Aussicht genommenen hinaus) auf eine Gruppe linearer Transformationen führt, mit anderen Worten, ob die schlichte konforme Abbildung der Überlagerungsfläche des Problems stets so gewählt werden kann, daß jede bijektive konforme Abbildung des Bildgebietes linear ist. Diese Fragen sind auch heute noch offen.

1910 gibt Hilbert durch eine Abwandlung des Dirichletschen Prinzips seinerseits eine Methode zur schlichten konformen Abbildung einer jeden schlichtartigen Riemannschen Fläche an. Koebe kann bald [14], [20] gleichzeitig mit Richard Courant zwei Durchführungen des Hilbertschen Ansatzes geben. Schon Schottky hatte in seiner erwähnten Dissertation einen Beweis des Riemannschen Satzes versucht, daß man jedes n-fach zusammenhängende schlichte Gebiet bijektiv konform auf ein von n zu einander parallelen Strecken begrenztes Gebiet abbilden kann. Hilberts neues Verfahren führt zu dem Beweis dieses Satzes für beliebige schlichtartige Riemannsche Flächen. Jedes Randkontinuum des Bildgebietes ist eine Strecke aus einem Büschel paralleler Geraden. Koebe stellt aber über Hilbert hinaus fest, daß das vom Hilbertschen Verfahren gelieferte Bildgebiet die ganze Ebene bis auf eine Menge vom Maß 0 bedeckt. Zugleich beweist Koebe durch weitere den Hilbertschen verwandte Extremalaufgaben, daß der Bildbereich auch so gewählt werden kann, daß ein jedes Randkontinuum ein Bogen auf den Kreisen eines beliebig vorgegebenen

Kreisbüschels ist. Auch hier lehrt die Extremaleigenschaft, daß die Komplementärmenge des Bildgebietes das Maß O hat. Bei dieser Gelegenheit hebt Koebe auch sein allgemeines Kreisnormierungsprinzip hervor. Es ist die heute noch offene Frage, ob man jede schlichtartige Riemannsche Fläche auf ein schlichtes Gebiet konform abbilden kann, bei dem jedes maximale Randkontinuum ein Punkt oder ein Kreis ist, und ob dann der Gebietsrand das Flächenmaß O hat bei passender Wahl der Abbildung.

Koebe hat seine Untersuchungen zunächst in vorläufigen Mitteilungen bekannt gemacht und sie dann anschließend in mehreren Abhandlungsserien in aller Ausführlichkeit unter Erschöpfung aller Einzelheiten dargelegt. Es sind die Abhandlungsserien über die Uniformisierung der algebraischen Kurven: [15], [22], [28], [35], über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven [23], [24] und über die Abbildung schlichter, endlich vielfach zusammenhängender Gebiete auf Normalgebiete [37], [39], [40], [45], [46], [50].

Bis dahin schienen Koebes und der anderen Verfasser Methoden von dem Gedanken beherrscht, passende Überlagerungsflächen schlicht abzubilden. Oft wurden diese auch durch einfachere Näherungsbereiche ausgeschöpft. Zuerst wohl an dem Problem der Abbildung eines endlich vielfach zusammenhängenden Gebietes auf ein von lauter Vollkreisen begrenztes Gebiet zeigt sich der Übergang zu einem iterierenden Verfahren. Man kann in diesem Fall nämlich die benötigte Überlagerungsfläche wie folgt aufbauen: Man bilde den gegebenen Bereich nach dem Riemannschen Abbildungssatz so ab, daß eine Randkurve zum Vollkreis wird. An diesem Vollkreis spiegele man den gegebenen Bereich (d. h. sein eben gewonnenes Bild). So tut man einen ersten Schritt zum Aufbau der Überlagerungsfläche, indem man einen aus zwei spiegelbildlichen Exemplaren des gegebenen aufgebauten Bereich erhält. Eine seiner Randkurven führe man wieder nach dem Riemannschen Abbildungssatz in einen Vollkreis über und spiegele erneut. So hat man schon einen aus vier Exemplaren des gegebenen aufgebauten Bereich. Fortsetzung des Verfahrens in infinitum führt zur Überlagerungsfläche. Statt nun diesen Prozeß lediglich zum Aufbau der universellen Überlagerungsfläche zu verwenden, bemerkt Koebe, daß man in den sukzessiven Abbildungen nach dem Riemannschen Abbildungssatz eine Funktionenfolge hat, die gegen die gesuchte Abbildung des gegebenen n-fach zusammenhängenden Bereichs auf ein Vollkreisgebiet konvergiert. Denn im Laufe des iterierenden Verfahrens erhöht sich die Spiegelungsfähigkeit immer weiter, und es zeigt sich, daß ein Gebiet unendlicher Spiegelungsfähigkeit ein Vollkreisgebiet ist, indem alle Spiegelungen linear werden. Solche iterierenden Verfahren entwickelt Koebe über Jahrzehnte hin immer weiter, bis alle Uniformisierungsprobleme algebraischer Gebilde dem iterierenden Verfahren zugänglich werden. Dabei werden im allgemeinen nicht mehr die bei den einzelnen Schritten der Abbildung unterworfenen Gebiete Teilgebiete der universellen Überlagerungsfläche sein [10], [28], [50], [53], [66], [67], [68]. Der Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes durch wiederholte Quadratwurzelabbildungen [27], [37] ist selbst ein iterierendes Verfahren, das Koebe Schmiegungsverfahren nennt. In den Ruhm der Entdeckung dieser Methode teilt sich Koebe mit C. Carathéodory. Die iterierenden Verfahren sind heute auch für die Praxis wichtig.

Auch die Kontinuitätsmethode, die schon Klein und Poincaré in Aussicht genommen hatten, greift Koebe wieder auf. Dabei kommen ihm namentlich die von Brouwer bewiesenen allgemeinen topologischen Sätze der Invarianz des Gebietes und der Dimension zu statten [26], [29], [35], [38], [41], [43], [61], [65].

Nach dem Zeugnis von H. Weyl (a. a. O., S. 29) geht auf Koebe [11] auch die allgemeine Fassung des Begriffs der Riemannschen Mannigfaltigkeit zurück. Schon beim Beweis des Hauptsatzes der Uniformisierungstheorie war es nicht nötig, daß man analytische Funktionen kennt, deren Riemannsche Fläche die gegebene Riemannsche Fläche ist. Vielmehr kann diese abstrakt als topologische Fläche mit lokalem uniformisierendem Parameter gegeben sein. Aus dem für sie bewiesenen Hauptsatz der Uniformisierungstheorie folgt dann die Existenz analytischer Funktionen, deren Riemannsche Fläche die abstrakt gegebene Riemannsche Fläche ist [18], [33], [39]. Den Riemannschen Mannigfaltigkeiten ist die letzte der umfangreichen Abhandlungsserien Koebes gewidmet [53], [54], [56], [57], [58], [59], [60], [61], [62]. Es handelt sich darin um eine Behandlung des alten Clifford-Kleinschen Raumproblems im zweidimensionalen Fall in erschöpfender Ausführlichkeit. Zwar erreicht Koebe nicht die Prägnanz der Formulierung, wie sie andere Bearbeiter, wie z. B. H. Weyl, H. Hopf, F. Löbell, auszeichnet; doch bieten Koebes Arbeiten manches Neue, ihm Eigentümliche. Die Gruppe der Hauptuniformisierenden der Riemannschen Mannigfaltigkeit ist die Invariante der Klasse aller Riemannschen Mannigfaltigkeiten, die bijektiv konform aufeinander abgebildet sind. Daher durchdringen sich in Koebes Behandlung die topologisch-differentialgeometrische Behandlung der Riemannschen Mannigfaltigkeit und die Kreisgeometrie der Gruppe. So gelingt Koebe u. a. der Nachweis, daß man den Fundamentalbereich einer im Einheitskreis eigentlich diskontinuierlichen, von elliptischen Substitutionen freien Gruppe linearer Substitutionen stets so wählen kann, daß die ihm entsprechende durch die Gruppe bewirkte Parzellierung des Einheitskreises durch lauter geodätische Kreise (Orthogonalkreise des Einheitskreises) bewirkt wird, die in ihrer ganzen Ausdehnung an der Parzellierung teilnehmen. Koebe ist wohl bisher der einzige, der auch singuläre Stellen der Riemannschen Mannigfaltigkeit in Betracht zieht. Ihrem erschöpfenden Studium ist der größte Teil seiner Abhandlungsserie gewidmet. Hier Koebe in allen Einzelheiten zu folgen, ist mir nicht gelungen.

Man hat wohl gefunden, daß Koebes Arbeiten oft schwer lesbar sind, siehe z. B. D. Gaier, Konstruktive Methoden der konformen Abbildung. Berlin-Heidelberg-New York 1964, S. 231. Zeitbedingte Mängel in der Schärfe der Begriffsbildung und Überladung der Darstellung mit Einzelheiten mögen dies zu einem guten Teil bewirken. So ist gewiß vieles von dem, was Koebe geleistet und angestrebt hat, noch nicht Allgemeingut geworden; und manches harrt noch, namentlich in seinen späteren Arbeiten, der Inangriffnahme durch andere. Eine der letzten Arbeiten [64] sei noch erwähnt. Da formuliert Koebe eine Frage, der eine geplante, aber nicht veröffentlichte Arbeit gelten sollte (ein schriftlicher Nachlaß hierzu scheint nicht zu existieren):

Kontaktprobleme der konformen Abbildung: Man denke sich ein einfachzusammenhängendes Gebiet, dessen Rand auf n geschlossenen analytischen Jordankurven liegt. Diese sollen außer Berührungen keine Punkte gemein haben. Es soll möglich sein, diese Kurven durch eine topologische Abbildung ihrer Ebene in n Vollkreise überzuführen, die außer Berührungen keine Punkte gemein haben. Koebe zeigt, daß es konforme Abbildungen gibt, die den Kontaktbereich in einen Kontaktkreisbereich überführen. Er formuliert folgenden Satz, dem die geplante Arbeit gewidmet sein sollte: „Die Aufgabe, auf der Kugeloberfläche n Kreisflächen, deren Größe unbekannt bleibt, nebeneinander ohne gegenseitige Überdeckung so zu lagern, daß sie ein durch ein beliebiges gewöhnliches Triangulationsschema vorgeschriebenes Kontaktschema erfüllen (Schließungsproblem), gestattet immer eine und, abgesehen von einer Kreisverwandtschaft, nur eine Lösung."

Schriftenverzeichnis.

[1] Über diejenigen analytischen Funktionen eines Arguments, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen. Diss. 32 S., Berlin 1905.

[2] Über konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche, insbesondere solcher Bereiche, deren Begrenzung von Kreisen gebildet wird. Jber. Deutsch. Math. Verein. **15** (1906) 142—153.

[3] Herleitung der partiellen Differentialgleichung der Potentialfunktion aus deren Integraleigenschaft. S.-B. Berlin. Math. Ges. **5** (1906) 39—42.

[4] Untersuchung der birationalen Transformationen, durch welche ein algebraisches Gebilde vom Range eins in sich selbst übergeht, in bezug auf ihr Verhalten bei der Iteration. S.-B. Berlin. Math. Ges. **5** (1906) 57—64.

[5] Über konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche. Jber. Deutsch. Math. Verein. **16** (1907) 116–130.

[6] Über die Uniformisierung reeller algebraischer Kurven. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.phys.Kl. (1907) 177–190.

[7] Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.phys.Kl. (1907) 191–210.

[8] Zur Uniformisierung der algebraischen Kurven. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.phys.Kl. (1907) 410–414.

[9] Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. (2. Mitt.). Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.phys.Kl. (1907) 633–669.

[10] Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven. (Imaginäre Substitutionsgruppen) (Voranzeige) Mitteilung eines Grenzübergangs durch iterierendes Verfahren. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.phys.Kl. (1908) 112–116.

[11] Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. (3. Mitt.). Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.phys.Kl. (1908) 337–358.

[12] Konforme Abbildung der Oberfläche einer von endlich vielen regulären analytischen Flächenstücken gebildeten körperlichen Ecke auf die schlichte Fläche eines Kreises. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.phys.Kl. (1908) 359–360.

[13] Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven durch automorphe Funktionen mit imaginärer Substitutionsgruppe. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. phys.Kl. (1909) 68–76.

[14] Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. (4. Mitt.). Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.phys.Kl. (1909) 324–361.

[15] Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven, I. Math. Ann. **67** (1909) 145–224.

[16] Über ein allgemeines Uniformisierungsprinzip. Congr. Internat. Rom. (1909) 25–30.

[17] Sur un principe général d'uniformisation. Comptes Rendus Paris **148** (1909) 824–828.

[18] Fonction potentielle et fonction analytique ayant une domaine d'existence donné à un nombre quelconque (fini ou infini) de feuillets. Comptes Rendus Paris **148** (1909) 1446–1448.

[19] Über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche. Jber. Deutsch. Math. Verein. **19** (1910) 339–348

[20] Über die Hilbertsche Uniformisierungsmethode. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.phys.Kl. (1910) 59–74.

[21] Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven durch automorphe Funktionen mit imaginärer Substitutionsgruppe. (Fortsetzung und Schluß) Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.phys.Kl. (1910) 180–189.

[22] Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven, II. Math. Ann. **69** (1910) 1–81.

[23] Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. I. Teil: Das allgemeine Uniformisierungsprinzip. J. Reine Ang. Math. **138** (1910) 192–253.

[24] Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. II. Teil: Die zentralen Uniformisierungsprobleme. J. Reine Ang. Math. **139** (1911) 251–292.

[25] Referat über automorphe Funktionen und Uniformisierung. Jber. Deutsch. Math. Verein. **21** (1912) 157–163.

[26] Begründung der Kontinuitätsmethode im Gebiete der konformen Abbildung und Uniformisierung. (Voranzeige) Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.phys.Kl. (1912) 879–886.

[27] Über eine neue Methode der konformen Abbildung und Uniformisierung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. phys. Kl. (1912) 844–848.

[28] Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven. III. (Erster Beweis der allgemeinen Kleinschen Fundamentaltheoreme. Das iterierende Verfahren) Math. Ann. **72** (1912) 437–516.

[29] Zur Begründung der Kontinuitätsmethode. Ber. Math.phys.Kl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig **64** (1912) 59–62.

[30] Diskussion im Anschluß an den Vortrag von D. Hilbert: „Begründung der elementaren Strahlungstheorie". Phys. Z. **13** (1912) 1064.

[31] Ränderzuordnung bei konformer Abbildung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. phys.Kl. (1913) 286–288.

[32] Lösung der Randwertaufgabe der Potentialtheorie für Kreisring, Ellipse und Rechteck mittels des Poissonschen Integrals. Ber. Math.phys.Kl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig **65** (1913) 210–213.

[33] Das Uniformisierungstheorem und seine Bedeutung für Funktionentheorie und nichteuklidische Geometrie. Ann. di. mat. Ser. 3, **21** (1913) 57–64.

[34] Über diejenigen analytischen Funktionen eines Arguments, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen, und die endlich-vieldeutig umkehrbaren Abelschen Integrale. Schwarz-Festschrift (1914) 192–214.

[35] Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven. IV. (Zweiter Existenzbeweis der allgemeinen kanonischen uniformisierenden Variablen: Kontinuitätsmethode) Math. Ann. **75** (1914) 42–129.

[36] Zur Theorie der konformen Abbildung und Uniformisierung. (Voranzeige) Ber. Math.phys.Kl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig **66** (1914) 67–75.

[37] Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. I. Die Kreisabbildung des allgemeinsten einfach und zweifach zusammenhängenden schlichten Bereichs und die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung. J. Reine Ang. Math. **145** (1915) 177–223.

[38] Begründung der Kontinuitätsmethode im Gebiete der konformen Abbildung und Uniformisierung. (Voranzeige, 2. Mitt.) Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. phys.Kl. (1916) 266–269.

[39] Abhandlungen zur Theorie der konformen Abildung, II. (Die Fundamentalabbildung beliebiger mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche nebst einer Anwendung auf die Bestimmung algebraischer Funktionen zu gegebener Riemannscher Fläche) Acta Math. **40** (1916) 251–290.

[40] Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung, III. (Der allgemeine Fundamentalsatz der konformen Abbildung nebst einer Anwendung auf die konforme Abbildung der Oberfläche einer körperlichen Ecke.) J. Reine Ang. Math. **147** (1917) 67–104.

[41] Kontinuitätsbeweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.phys.Kl. (1918) 45–53.

[42] Zur Geometrie der automorphen Fundamentalgruppen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.phys.Kl. (1918) 54–56.

[43] Begründung der Kontinuitätsmethode im Gebiet der konformen Abbildung und Uniformisierung. (Voranzeige, 3. Mitt.) Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.phys. Kl. (1918) 57–59.

[44] Zur konformen Abbildung unendlich-vielfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Schlitzbereiche. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.phys.Kl. (1918) 60–71.

[45] Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung, IV. (Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Schlitzbereiche) Acta Math. **41** (1918) 305–344.

[46] Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. V. (Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Schlitzbereiche. Fortsetzung) Math. Z. **2** (1918) 198–236.

[47] Über die Strömungspotentiale und die zugehörenden konformen Abbildungen Riemannscher Flächen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.phys.Kl. (1919) 1–46.

[48] Über das Schwarzsche Lemma und einige damit zusammenhängende Ungleichheitsbeziehungen der Potentialtheorie und Funktionentheorie. Math. Z. **6** (1920) 52–84.

[49] Zum Verzerrungssatz der konformen Abbildung. Math. Z. **6** (1920) 311–313.

[50] Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. VI. (Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Kreisbereiche. Uniformisierung hyperelliptischer Kurven. Iterationsmethoden) Math. Z. **7** (1920) 235–301.

[51] Über die konforme Abbildung endlich- und unendlich-vielfach zusammenhängender symmetrischer Bereiche. Acta Math. **43** (1922) 263–287.

[52] Fundamentalabbildung und Potentialbestimmung gegebener Riemannscher Flächen. Math. Z. **12** (1922) 248–254.

[53] Allgemeine Theorie der Riemannschen Mannigfaltigkeiten. (Konforme Abbildung und Uniformisierung) Preisgekrönt von S.M. König Gustav V. am 27. 12. 1920, Acta Math. **50** (1927) 27–157.

[54] Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen. (Erste Mitt.) Sitzber. Akad. Wiss. Berlin, Math.phys.Kl. (1927) 164–196.

[55] Methoden der konformen Abbildung und Uniformisierung. Bologna Math. Kongress **3** (1928) 195–203.

[56] Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen. (Zweite Mitt.): Allgemeine und niedere Raumformen. Sitzber. Akad. Wiss. Berlin, Math.-phys.Kl. (1928) 345–384.

[57] Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen. (Dritte Mitt.): Elementarsynthese aller hyperbolischen Raumformen. Besondere Behandlung einiger wichtiger Typen. Elementarmodelle und Konformmodelle. Sitzber. Akad. Wiss. Berlin, Math.phys.Kl. (1928) 385–442.

[58] Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen. (Vierte Mitt.): Verlauf geodätischer Linien. Sitzber. Akad. Wiss. Berlin, Math.phys.Kl. (1929) 414–457.

[59] Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen. (Fünfte Mitt.): Uniformisable singularitätenbehaftete Raumformen. Verlauf geodätischer Linien. Quasihomotopie. Sitzber. Akad. Wiss. Berlin, Math.phys.Kl. (1930) 304–364.

[60] Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen. (Sechste Mitt.): Elementarsynthese der allgemeinen singularitätenbehafteten Raumformen endlicher Signatur. Sitzber. Akad. Wiss. Berlin, Math.phys.Kl. (1930) 505–541.

[61] Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen. (Siebente Mitt.): Singularitätenbehaftete Absolutmessung Riemannscher Mannigfaltigkeiten. Kontinuitätsmethode. Sitzber. Akad. Wiss. Berlin, Math.phys.Kl. (1931) 506–534.

[62] Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen. (Achte Mitt.) Erweiterung der Aufbautheorie und der Metrisierungstheorie. Konvexformen und Konkavformen. Sitzber. Akad. Wiss. Berlin, Math.phys. Kl. (1932) 249–284.