## Werk

**Titel:** Eine Studie zum Begriff der Teilfolge.

**Autor:** Hoheisel, Guido

**Jahr:** 1961

**PURL:** https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?37721857X_0063|log5


## Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Schmidt, Jürgen
Jahresbericht d. DMV
Bd. 63 (1960) S. 28–50

# Eine Studie zum Begriff der Teilfolge.

GUIDO HOHEISEL zum 65. Geburtstag.

Von JÜRGEN SCHMIDT in Köln.

**1. Filter und allgemeine Folgen.** Der Begriff des Filters und der Filterbasis[1]) — nach der theoretischen Seite hin ideales Instrument der abstrakten Konvergenztheorie — bedarf nach der praktischen Seite hin doch der Ergänzung durch irgendeinen für die Anwendung genügend elastischen Begriff der verallgemeinerten „Folge". In der Tat hat man es in den Anwendungen, wenn von Konvergenz die Rede ist, meist nie mit einem Filter $\mathfrak{F}$ (bzw. einer seiner Basen) zu tun, sondern mit irgendeiner den Filter $\mathfrak{F}$ „erzeugenden Folge". Was auch im Einzelfall unter einer „Folge" zu verstehen sei: in erster Linie handelt es sich dabei um eine eindeutige Abbildung $f$ von einer Menge $I$, dem *Indexbereich*, in den Raum $E$[2]). Eine solche, soweit noch beliebige Funktion mit Werten in $E$ wird aber erst dadurch zu einer „Folge" (der man, mittels einer Topologie $\tau$ von $E$, ein Konvergenzverhalten zuzuschreiben vermag), daß man den Indexbereich $I$ mit einer gewissen Struktur versieht. Man wird so ziemlich allen theoretisch und praktisch vorkommenden Fällen gerecht durch die Annahme, diese Struktur bestehe allemal in der Auszeichnung eines gewissen Filters $\mathfrak{J}$ über $I$, des *Indexfilters* (bzw. einer seiner Basen); eine so allgemeine Folge ist also nichts anderes als das, was man mit Nöbeling systematisch eine *gefilterte Familie*[3]) nennt: ein geordnetes Paar $(f, \mathfrak{J})$, be-

1) Im Sinne von Bourbaki [9, p. 20ff.]; insbesondere werden der „uneigentliche Filter" (die volle Potenzmenge, siehe J. Schmidt [28, p. 361]) und seine Basen (die die leere Menge $O$ als Element enthaltenden Mengensysteme) nicht zugelassen: alle Filter(basen) der Note sind „eigentlich".

2) Mit anderen Worten: wir betrachten Folgen von Punkten (Elementen) aus $E$. Was Folgen von Teilmengen von $E$ (Mengenfolgen, „Kurvenscharen") anlangt — die jedem Index („Wert des Scharparameters") eine beliebige leere oder nichtleere Teilmenge von $E$ („Kurve") zuordnen, so ließen sich diese zwar als Punktfolgen aus $E$ auffassen; allein man wird meist gut daran tun, diese als mehrdeutige Abbildungen aus (nicht notwendig von) dem (irgendeinem) Indexbereich zu betrachten (siehe hierzu **8** und **9** dieser Note). Für solche Mengenfolgen ist eine allgemeine Theorie von B. J. Pettis angekündigt worden (Smiley [30, p. 338]).

3) Auch gefilterte (gerasterte) Funktion; siehe Nöbeling [24, p. 135] und [25, p. 54]. Aumann [4, p. 51]: gerastertes System; McShane [22, p. 162]: syntax.

stehend aus einer eindeutigen Abbildung (Funktion, Familie) $f$ (mit Werten im Raum $E$) und einem Filter $\mathfrak{J}$ (bzw. einer Basis von $\mathfrak{J}$) über dem Definitionsbereich $I$ von $f$. In der Tat „erzeugt" jede derartige Folge $(f, \mathfrak{J})$ eine Filterbasis und damit einen Filter über dem Raum $E$: das Bildsystem $f(\mathfrak{J})$ (bestehend aus allen Bildmengen $f(I')$ mit $I' \in \mathfrak{J}$) ist ja eine Filterbasis, also Basis eines Filters $\mathfrak{F}$ über $E$, und das Konvergenzverhalten der Folge $(f, \mathfrak{J})$ (Bourbaki: der Funktion $f$ längs[4]) des Filters $\mathfrak{J}$) hängt nur von diesem durch die Basis $f(\mathfrak{J})$ repräsentierten *Bildfilter* $\mathfrak{F}$ ab. Es läßt sich übrigens auch umgekehrt jeder Filter $\mathfrak{F}$ über $E$ auf diese Art „erzeugen": man braucht ja als $f$ nur die identische Selbstabbildung von $E$, als Indexbereich $I$ also den Raum $E$, und als Indexfilter $\mathfrak{J}$ den gegebenen Filter $\mathfrak{F}$ zu wählen[5]). So betrachtet, ordnet sich zunächst einmal der einfache Begriff des Filters (über $E$) selbst — als mehr theoretisch bedeutsamer Spezialfall — unserem allgemeinen Begriff der „Folge" unter.

Der nach der praktischen Seite hin wichtigste „Spezialfall" ist der der Moore-Smith-Folge. In den meisten praktischen Fällen nämlich ist ja auch der Indexfilter $\mathfrak{J}$ noch nicht unmittelbar, sondern seinerseits erst mittels einer gewissen Anordnung des Indexbereiches $I$ gegeben, technisch: mittels einer meist $\leqq$ oder ähnlich geschriebenen Quasi-Ordnung (reflexiven und transitiven Relation) oder gar Ordnung (anti-symmetrischen Quasi-Ordnung) des Indexbereiches $I$: $\mathfrak{J}$ besteht dann aus allen etwa als *perfinal*[6]) zu bezeichnenden Mengen $I' \subseteq I$, welche „von einem gewissen Index $i_0$ ab alle" Indizes $i \in I$, d. h. ein *Hauptende* $\mathfrak{l}i_0, \to\mathfrak{l} = \{i \mid i_0 \leqq i\}$ enthalten. Damit allerdings das System $\mathfrak{J}$ dieser perfinalen Teilmengen wirklich ein — dann etwa als *Perfinalitätsfilter*[7]) zu bezeichnender — Filter, anders ausgedrückt: damit das System der Hauptenden $\mathfrak{l}i_0, \to\mathfrak{l}$ wirklich eine Filterbasis sei, ist notwendig und hinreichend, daß zu je zwei Indizes $i_1, i_2$ in $I$ stets ein Index $i_0$ mit $i_1, i_2 \leqq i_0$ existiert, wodurch die (quasi-)geordnete Menge $(I, \leqq)$ zu einer (quasi-)gerichteten Menge wird. Und eine

4) Bourbaki [9, p. 34, Def. 4]: suivant le filtre $\mathfrak{J}$.

5) An diese Unterordnung des Begriffs „Filter" unter den Begriff „gefilterte Funktion" dürfte Aumann [4, p. 52, 2. 10. 2.] gedacht haben (siehe auch Nöbeling [25, p. 141]); topologisch weniger sinnvoll erscheint die Deutung des Filters als einer gerichteten Mengenfolge (Nöbeling [18, p. 55f., p. 63]).

6) Bezeichnung, nach einem früheren Vorschlag von K. Krickeberg, wie bei J. Schmidt [29, p. 275]. Mehrere Bezeichnungen in Gebrauch, von denen sich keine durchgesetzt hat; so Tukey [31, p. 10]: residual; Haupt-Aumann-Pauc [16, p. 170]: Ende; Aumann [4, p. 59]: stark konfinal.

7) J. Schmidt loc. cit. Bourbaki [9, p. 23]: filtre des sections à droite.

Moore-Smith-Folge ist eine *(quasi-)gerichtete Familie* $(f, \leqq)$[8]), ein geordnetes Paar, bestehend aus einer Funktion $f$ (mit Werten im Raum $E$) und einer (Quasi-)Ausrichtung $\leqq$ ihres Definitionsbereiches. Indem wir von dieser Anordnung $\leqq$ zu dem zugehörigen Perfinalitätsfilter $\mathfrak{J}$ übergehen, erscheint die (quasi-)gerichtete wirklich als ein „Spezialfall" der gefilterten Familie. Es ist dabei allerdings zweierlei zu beachten:

1. Zu einem gegebenen Indexfilter $\mathfrak{J}$ über $I$ gibt es, wenn überhaupt, so gewiß sehr viele verschiedene Quasi-Ausrichtungen von $I$, die uns $\mathfrak{J}$ als zugehörigen Perfinalitätsfilter liefern: insofern ist die quasi-gerichtete Familie (Moore-Smith-Folge), weil strukturreicher, überhaupt kein richtiger Spezialfall der gefilterten Familie. Allein die Konvergenztheorie interessiert sich in Wahrheit doch nur für diesen Filter $\mathfrak{J}$ (ja, wie wir wissen, sogar nur für sein Bild $f\mathfrak{J}$): von diesem Standpunkt aus sind alle diese verschiedenen $\mathfrak{J}$ erzeugenden Quasi-Ausrichtungen von $I$ untereinander äquivalent.
2. Nicht jeder Indexfilter $\mathfrak{J}$ über $I$ ist *direkt darstellbar*[9]), d. h. Perfinalitätsfilter wenigstens einer passenden Quasi-Ausrichtung von $I$: insofern ist der Begriff der gefilterten Familie effektiv allgemeiner als der der quasi-gerichteten Familie (Moore-Smith-Folge). Allein es zeigt sich, daß sich jeder Filter $\mathfrak{F}$ über dem Raume $E$ nicht nur, wie oben, aus einer beliebig gefilterten, sondern auch noch aus einer quasi-gerichteten, ja gerichteten Familie erzeugen läßt[10]): von diesem Standpunkt aus sind beliebig gefilterte und quasi-gerichtete, ja gerichtete Familien, als konvergenztheoretisch genau dasselbe leistend, nämlich genau sämtliche Filter über $E$ erzeugend, untereinander (und mit den Filtern über $E$) äquivalent.

Theorie und Praxis irgendwelcher „Folgen" — mehr oder weniger spezieller gefilterter, quasi-gerichteter Familien — werden auf einen adäquaten Begriff der „Teilfolge", genauer: der „Teilfolge-Relation" — eine gewisse Quasi-Ordnung im Bereich der gerade betrachteten „Folgen" — niemals verzichten. So finden sich in der Literatur für den Bereich der Filter(basen) (gewissermaßen spezieller gefilterter Fami-

8) Kelley [18, p. 277] und [19, p. 65]: net; ebenso McShane [20, p. 2], [21, p. 14], Bartle [5], Smiley [30].

9) Bruns-Schmidt [10, p. 177ff.]; dort werden auch (p. 178) Kriterien für direkte Darstellbarkeit sowie (p. 179, p. 183f.) Beispiele für nicht direkt darstellbare Filter angegeben. Siehe auch Aumann [4, p. 54f.].

10) Bruns-Schmidt [10, p. 171f.]; Erzeugbarkeit durch quasi-gerichtete Familien (also ohne Anti-Symmetrie) auch schon bei anderen Autoren, z. B. Bartle [4, p. 554, Fußnote], Kelley [19, p. 83].

lien), aller gefilterten Familien, aller quasi-gerichteten Familien, aber auch der klassischen Folgen und anderer spezieller quasi-gerichteter Familien mehr oder weniger komplizierte „Teilfolge"-Begriffe, die untereinander zwar gewisse Züge gemein haben, sich aber doch auf den ersten Anblick stark genug voneinander unterscheiden, als daß man sie gleich alle ohne weiteres technisch auf einen Nenner brächte. Das Gemeinsame — und damit in etwa den wahren Sinn — aller dieser „Teilfolge"-Begriffe herauszuarbeiten, ist Gegenstand der folgenden Betrachtungen.

**2. Vergleich von Filterbasen und seine topologische Bedeutung.** In der technisch einfachsten, weil am stärksten algebraisierten[11]) „Folgen"-Theorie, der der Filter(basen), liegt naturgemäß auch die technisch einfachste und durchsichtigste „Teilfolge"-Relation vor, in Gestalt des Bourbakischen *Vergleichs von Filterbasen*: die *Filterbasis* $\mathfrak{B}$ heißt *gröber als die Filterbasis* $\mathfrak{A}$, in Zeichen $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$, wenn jede *Menge* $B \in \mathfrak{B}$ *gröber* ist *als die Filterbasis* $\mathfrak{A}$, $B \succ \mathfrak{A}$, d. h. *gröber als eine* passende *Menge* $A \in \mathfrak{A}$, $B \succ A$, d. h. $B \subseteq A$ (offenbar ist $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ gleichbedeutend, falls zumindest $\mathfrak{A}$ ein voller Filter[12]) ist); wir nennen dann $\mathfrak{A}$ auch *feiner als* $\mathfrak{B}$, in Zeichen $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, zu interpretieren: $\mathfrak{A}$ ist „Teilfolge" von $\mathfrak{B}$[13]). Diese Relation ist, wie jede „Teilfolge"-Relation, reflexiv und transitiv, also eine Quasi-Ordnung, im Bereich aller Filterbasen (über einer gewissen Grundmenge); die zugehörige „Assoziiertheits-Relation": $\mathfrak{A}$ *ebenso grob (fein) wie* $\mathfrak{B}$, in Zeichen $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, d. h. jedes der beiden gröber (feiner) als das andere, bezeichnet man nach Hausdorff und Bourbaki, ihrer formalen Eigenschaften wegen, auch einfach als *Äquivalenz*.

Obwohl ohne Bezug auf irgendeine Topologie definiert, besitzt dieser Vergleich von Filterbasen doch einen ganz klaren topologischen Sinn. Sei die Menge $E$ mit irgendeiner Topologie $\tau$ versehen; sei $\mathfrak{A}$ eine

11) Die Filter — und mit ihnen die Klassen äquivalenter Filterbasen — bilden ja (nach Hinzunahme des „uneigentlichen Filters", siehe Fußnote 1) einen Verband (Näheres über diesen Verband bei J. Schmidt [27]); der Bourbakische „Vergleich von Filter(basen)" ist nichts anderes als die diesem Verband zugrundeliegende (Quasi-) Ordnung.

12) Man braucht hier: daß $\mathfrak{A}$ ein aufsteigendes Mengensystem ist, d. h. mit einer Menge auch jede Obermenge (soweit Teilmenge der Grundmenge) als Element enthält (siehe J. Schmidt [28, p. 215, p. 218]).

13) Bourbaki [9, p. 21, p. 24]: $\mathfrak{B}$ moins fin que $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ plus fin que $\mathfrak{B}$. Haupt-Aumann-Pauc [16, p. 166]: $\mathfrak{B}$ nicht-feiner wie $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ mindestens ebenso fein wie $\mathfrak{B}$; Nöbeling [24, p. 134] und [25, p. 22]: $\mathfrak{A}$ mindestens so fein wie $\mathfrak{B}$. Aumann [4, p. 51]: $\mathfrak{A}$ feiner als $\mathfrak{B}$; von dort haben wir auch die Notation $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ übernommen. McShane [22, p. 163]: $\mathfrak{A}$ finer than $\mathfrak{B}$; Bartle [5, p. 553]: $\mathfrak{A}$ is a refinement of $\mathfrak{B}$; Smiley [30, p. 336]: $\mathfrak{A}$ refines $\mathfrak{B}$.

Filterbasis über $E$. Der Punkt $x \in E$ heißt ein *Grenzwert* oder *Limes-(punkt) von* $\mathfrak{A}$ *(bei der Topologie* $\tau$*)*[14], wenn sein Umgebungsfilter $\mathfrak{B}x$ (es genügt: irgendeine Basis $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{B}x$) gröber ist als $\mathfrak{A}$; die (leere oder nichtleere, möglicherweise mehr als ein Element enthaltende) Menge aller Limespunkte heiße die *Limesmenge*[15], kurz: der *Limes* von $\mathfrak{A}$, in Zeichen[16]

$$x \in \operatorname{Lim} \mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}x \succ \mathfrak{A}. \tag{1}$$

Es gilt nun der

**Satz 1:** *Folgende Aussagen über die Filterbasen*[17] $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *(über* $E$*) sind äquivalent*:

1. $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, *falls* $\mathfrak{A}$ *Filter*);

2. $\operatorname{Lim} \mathfrak{B} \supseteq \operatorname{Lim} \mathfrak{A}$ *in jeder Topologie* $\tau$ *von* $E$.

Beweis. $1 \to 2$ trivial[18].

$2 \to 1$: Angenommen, es sei $\mathfrak{B}$ nicht gröber als $\mathfrak{A}$, d. h. es gebe eine Menge $B_0 \in \mathfrak{B}$, die durch keine Menge $A \in \mathfrak{A}$ unterboten werden kann. Wegen $B_0 \in \mathfrak{B}$ ist die Menge $B_0$ nichtleer, enthält also ein Element $x_0$. Wir definieren in $E$ eine Ordnung in ihrer irreflexiven Form $<$ durch: $x < y$ genau dann, wenn $x = x_0$ und $y \in B_0$, $y \neq x_0$. Durch diese Ordnung wird in $E$ eine im Sinne von Alexandroff-Hopf diskrete $T_0$-Topologie $\tau$ definiert: die offenen Mengen sind genau die Enden, die Mengen $G \subseteq E$, die mit einem Element $x$ auch jedes $y > x$ enthalten, hier: die Mengen $G$ mit $x_0 \notin G$ oder $B_0 \subseteq G$. Die Menge $B_0$ bildet nun eine Basis des Umgebungsfilters $\mathfrak{B}x_0$; wegen $B_0 \in \mathfrak{B}$ hat man also

14) Bourbaki [9, p. 31]: $x$ est point limite de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ converge vers $x$. Die gleiche Terminologie einheitlich in der amerikanischen Literatur: $\mathfrak{A}$ converges to a limit (point) $x$; so für Filterbasen bei Birkhoff [7, p. 45], Kelley [19, p. 83], Bartle [5, p. 553], für Moore-Smith-Folgen bei Birkhoff [7, p. 41], Kelley [18, p. 278], [19, p. 66, 68], McShane [20, p. 8]. Aumann [4, p. 123]: $x$ Limespunkt von $\mathfrak{A}$ (für Filterbasen in $T_2$-Räumen); Nöbeling [24, p. 141]: $\mathfrak{A}$ konvergiert gegen $x$ (für gefilterte Punktfamilien), [25, p. 56f.]: $x$ stark adhärent (für gefilterte Mengenfamilien). Für gefilterte Mengenfamilien Choquet [11, p. 61]: point-limite inférieure.

15) Aumann [4, p. 121f.]. Spezialfall — siehe 1, insbesondere Fußnote 5 — der ensemble-limite inférieure einer gefilterten Element-, ja Mengenfamilie bei Choquet [11, p. 61] (Nöbeling [25, p. 56]: Limes inferior; für gerichtete Mengenfamilien als unterer topologischer Limes bei Aumann [4, p. 117]; siehe auch die Grenzmenge von Haupt-Aumann-Pauc [16, p. 126, p. 201]).

16) Die Notation $\operatorname{Lim} \mathfrak{A}$ nach Aumann [4, p. 121f].

17) In Wahrheit wird — wie der folgende Beweis lehrt — an speziellen Eigenschaften dem Mengensystem $\mathfrak{A}$ gar nichts abverlangt, dem Mengensystem $\mathfrak{B}$ nur, daß es die leere Menge $O$ nicht als Element enthalte (daß es „eigentlich" sei, siehe Fußnote 1).

18) Es handelt sich um den klassischen Schluß: mit einer Folge $\mathfrak{B}$ konvergiert auch jede Teilfolge $\mathfrak{A}$ gegen den Punkt $x$, — Bestandteil fast aller Konvergenzaxiomatiken seit Fréchet; siehe für Filterbasen insbesondere Aumann [4, p. 122, Axiom $(2_k)$].

$x_0 \in \operatorname{Lim} \mathfrak{B}$, dabei aber, nach Wahl von $B_0$, $x_0 \notin \operatorname{Lim} \mathfrak{A}$, mithin $\operatorname{Lim} \mathfrak{B} \not\subseteq \operatorname{Lim} \mathfrak{A}$.

Nach diesem Beweis gilt der Satz auch dann noch, wenn man anstatt beliebiger Topologien nur („diskrete") $T_0$-Topologien zuläßt; zu fragen ist: ob man sich auf Topologien mit stärkeren Trennungsaxiomen beschränken darf.

Zweimalige Anwendung dieses Satzes liefert das

**Korollar.** *Folgende Aussagen über die Filterbasen* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *(über* $E$*) sind äquivalent*:

1. $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, *falls* $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ *Filter*);

2. $\operatorname{Lim} \mathfrak{A} = \operatorname{Lim} \mathfrak{B}$ *in jeder Topologie* $\tau$ *von* $E$.

Der Vergleich von Filterbasen läßt sich noch auf eine andere, gewissermaßen „duale" Weise topologisch deuten. Dazu bemerken wir: in der Theorie der Filterbasen spielt neben der Vergleichsrelation $\succ$ noch eine andere binäre Relation eine wesentliche Rolle, für die die klassische Folgentheorie kein Vorbild kennt; wir nennen die *Filterbasis* $\mathfrak{B}$ *verzahnt mit der Filterbasis* $\mathfrak{A}$, in Zeichen $\mathfrak{B} * \mathfrak{A}$, wenn jede *Menge* $B \in \mathfrak{B}$ *verzahnt* ist *mit der Filterbasis* $\mathfrak{A}$, $B * \mathfrak{A}$, d. h. *verzahnt mit* jeder *Menge* $A \in \mathfrak{A}$, $B * A$, d. h. $B \cap A \neq 0$[19]. Ist nun $\mathfrak{B}$ der Umgebungsfilter $\mathfrak{B}x$ (es genügt: irgendeine seiner Basen) in irgendeiner Topologie $\tau$ von $E$, so heißt der Punkt $x$ im Falle $\mathfrak{B} * \mathfrak{A}$ ein *Berührungspunkt der Filterbasis* $\mathfrak{A}$ (*bei der Topologie* $\tau$)[20]; die Menge aller Be-

19) Terminologie und Schreibweise nach J. Schmidt [28, p. 202, p. 216ff.]. Smiley [30, p. 336f.] nennt verzahnte Filterbasen „compositive" und schreibt: we have borrowed the term „compositive" from the work of E. H. Moore since we feel that this important relation between filter-bases deserves a name.

20) Bourbaki [9, p. 33]: $x$ est adhérent à $\mathfrak{A}$. Smiley [30, p. 337]: $x$ $\tau$-adheres $\mathfrak{A}$; Bartle [5, p. 555]: $x$ is an adherence point of $\mathfrak{A}$. Bartle läßt daneben auch noch den älteren Terminus „cluster point" (= „Häufungspunkt") zu, der bis dahin in der amerikanischen Literatur bei gerichteten und gefilterten Familien einheitlich verwendet wurde; siehe z. B. Kelley [18, p. 279], [19, p. 71]; McShane [20, p. 8], [22, p. 164]. Ebenso verhält sich Nöbeling [25, p. 56f.]: $x$ adhärent $\mathfrak{A}$, daneben: $x$ ist Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$. In der Tat handelt es sich ja um die natürliche Verallgemeinerung des klassischen Begriffs „Häufungspunkt einer Folge". Vom filtertheoretischen Standpunkt indes ist diese klassische Sprechweise (also auch das amerikanische „cluster point") völlig ungeeignet: „Häufungspunkt einer Folge" (= des von der Folge erzeugten Elementarfilters, siehe Bourbaki [9, p. 29]) und „Berührungspunkt einer Menge" (= des von der Menge erzeugten Hauptfilters, siehe J. Schmidt [27, p. 365]) fallen unter den gleichen filtertheoretischen Oberbegriff, eben unseren „Berührungspunkt eines Filters"; hingegen gibt es für den „Häufungspunkt einer Folge" und den „Häufungspunkt einer Menge" keinen gemeinsamen filtertheoretischen Oberbegriff. Erwähnt sei noch die Terminologie von Choquet [11, p. 60]: point-limite supérieure.

rührungspunkte heißt die *Adhärenz* von $\mathfrak{A}$ [21]), in Zeichen

$$x \in \mathrm{Adh}\,\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}x * \mathfrak{A}. \tag{2}$$

Es gilt nun als „duales" Gegenstück zu Satz 1 der

**Satz 2:** *Folgende Aussagen über die Filterbasen*[22]) $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *(über* $E$*) sind äquivalent*:

1. $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, *falls* $\mathfrak{A}$ *Filter*);

2. $\mathrm{Adh}\,\mathfrak{B} \supseteq \mathrm{Adh}\,\mathfrak{A}$ *in jeder Topologie* $\tau$ *von* $E$.

Der Schluß von 1 auf 2 ist wieder trivial[23]), der von 2 auf 1 läßt sich wieder mit Hilfe einer diskreten $T_0$-Topologie ganz ähnlich durchführen wie der entsprechende des vorigen Satzes[24]).

Zweimalige Anwendung dieses Satzes liefert das

**Korollar**[25]). *Folgende Aussagen über die Filterbasen* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *(über* $E$*) sind äquivalent*:

1. $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, *falls* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *Filter*);

2. $\mathrm{Adh}\,\mathfrak{A} = \mathrm{Adh}\,\mathfrak{B}$ *in jeder Topologie* $\tau$ *von* $E$.

Die Korollare zu den Sätzen 1 und 2 kann man so zusammenfassen: *äquivalente Filterbasen, und nur diese, sind topologisch ununterscheidbar.* In diesem Sinne sind die Filter, die Charakteristika der Klassen äquivalenter Filterbasen, topologische Invarianten[26]).

**3. Vergleich von allgemeinen Folgen.** Schärfer noch tritt dieser Invarianzcharakter der Filter hervor, wenn wir nun von Filterbasen über dem Raume $E$ zu beliebigen allgemeinen „Folgen" in dem eingangs festgelegten Sinne, zu gefilterten Familien (von Elementen aus $E$) übergehen: zwischen erzeugende (Index-)Filterbasis (nicht notwendig mehr über $E$) und erzeugten Filter (über $E$) wird jetzt eine Abbildung $f$ zwischengeschaltet.

---

21) Bourbaki [9, p. 33]: adhérence de $\mathfrak{A}$. Spezialfall — siehe 1, insbesondere Fußnote 5 — der ensemble-limite supérieure einer gefilterten Element-, ja Mengenfamilie bei Choquet [11, p. 61] (Nöbeling [25, p. 56]: Limes superior; für gerichtete Mengenfamilien als oberer topologischer Limes bei Aumann [4, p. 117]; siehe auch die Limes-(wert)menge von Haupt-Aumann-Pauc [16, p. 126, p. 200f.]).

22) In Wahrheit wird an speziellen Eigenschaften dem Mengensystem $\mathfrak{B}$ gar nichts abverlangt, dem Mengensystem $\mathfrak{A}$ nur, daß es nichtleer sei.

23) Es handelt sich um den klassischen Schluß: ist $x$ „Häufungspunkt" der Teilfolge $\mathfrak{A}$, so auch der Folge $\mathfrak{B}$ selbst.

24) Siehe Smiley [30, Beweis des Lemmas p. 337]. Nach Ausdehnung der Begriffe „Limes" und „Adhärenz" auf beliebige Mengensysteme $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ läßt sich Satz 2 sogar direkt auf Satz 1 zurückführen, und zwar unter Verwendung des Begriffs der Verzahnung eines Mengensystems (siehe J. Schmidt [28, p. 217] und 9 dieser Note)

25) Bruns-Schmidt [10, p. 184].

26) Dieser Invarianzcharakter der Filter wurde wohl erstmalig bei Bruns-Schmidt loc. cit. herausgestellt.

Die für das Folgende wesentliche technische Grundtatsache hierzu ist die Monotonie:

$$\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B} \to f\mathfrak{A} \prec f\mathfrak{B} \tag{3}$$

und die daraus durch zweimalige Anwendung resultierende Erhaltung der Äquivalenz:

$$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B} \to f\mathfrak{A} \sim f\mathfrak{B}. \tag{4}$$

Und zwar gelten diese Erhaltungsregeln für völlig beliebige mehrdeutige Abbildungen aus (nicht nur: eindeutige Abbildungen von), bei denen für jedes Argument $x$ des betrachteten „Originalbereiches", $fx$ eine nicht notwendig einelementige, leere oder nichtleere Menge ist.

Auf (4) insbesondere beruht es, wenn wir bei Erzeugung eines Filters $\mathfrak{F}$ über $E$ durch eine gefilterte Familie $(f, \mathfrak{J})$ statt von dem vollen Indexfilter $\mathfrak{J}$ auch stets von einer beliebigen Basis $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{J}$ ausgehen können: die Bildsysteme $f\mathfrak{J}$ und $f\mathfrak{A}$ sind ja äquivalent, Basen des gleichen Filters $\mathfrak{F}$ über $E$ [27]), haben also auch, zufolge Satz 1 und 2, das gleiche topologische Verhalten, nämlich, bei irgendeiner Topologie $\tau$ von $E$, den gleichen Limes und die gleiche Adhärenz,

$$\operatorname{Lim} f(\mathfrak{J}) = \operatorname{Lim} f(\mathfrak{A}), \quad \operatorname{Adh} f(\mathfrak{J}) = \operatorname{Adh} f(\mathfrak{A}).$$

Limes und Adhärenz des Bildsystems $f(\mathfrak{A})$ (einer Filterbasis über $E$) werden daher, unabhängig von der Wahl der Basis $\mathfrak{A}$, als *Limes* bzw. *Adhärenz der gefilterten Familie* $(f, \mathfrak{A})$ (eigentlich: der gefilterten Familie $(f, \mathfrak{J})$), oder auch: *der Funktion $f$ längs der Filterbasis* $\mathfrak{A}$[28]) (eigentlich: längs des Filters $\mathfrak{J}$) definiert:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Lim}(f, \mathfrak{A}) = \operatorname{Lim}_{\mathfrak{A}} f = \operatorname{Lim} f(\mathfrak{A}), \\ &\operatorname{Adh}(f, \mathfrak{A}) = \operatorname{Adh}_{\mathfrak{A}} f = \operatorname{Adh} f(\mathfrak{A})\text{[29]}; \end{aligned} \tag{5}$$

27) Da aber im allgemeinen weder $f(\mathfrak{J})$, geschweige denn $f(\mathfrak{A})$ gleich dem vollen Filter $\mathfrak{F}$, sondern eben nur Filterbasen sein werden, verlohnt sich beim Studium der Abbildungen von Filtern das Arbeiten mit vollen Filtern überhaupt nicht: man wird mit Filterbasen und ihrer Äquivalenz (an Stelle der Identität der zugehörigen vollen Filter) operieren. Übrigens spielen in dieser Note noch nicht einmal die Filterbasis-Eigenschaften der betrachteten Mengensysteme (von wenigen Ausnahmen abgesehen) eine Rolle: wir könnten völlig beliebige Mengensysteme betrachten, welche durch Hinzunahme aller Obermengen von Mengen des Systems zu vollen aufsteigenden Mengensystemen (Fußnote 12), aber nicht notwendig zu Filtern aufgefüllt werden.

28) Bourbaki [9, p. 34, Def. 4] bezeichnet als „valeur limite" bzw. „valeur d'adhérence de $f$ suivant $\mathfrak{A}$" jeden Limes- bzw. Berührungspunkt von $f(\mathfrak{A})$.

29) Für den praktischen Gebrauch kommen nur die Bourbaki loc. cit. nachgebildeten Schreibweisen $\operatorname{Lim}_{\mathfrak{A}} f$ und $\operatorname{Adh}_{\mathfrak{A}} f$ (Limes und Adhärenz „von $f$ längs $\mathfrak{A}$") in Frage; sie sind wie üblich durch Einführung von gebundenen Variablen, etwa

$$\operatorname*{Lim}_{\mathfrak{A}\, i} f(i), \quad \operatorname*{Adh}_{\mathfrak{A}\, i} f(i)$$

noch elastischer zu gestalten.

de facto werden so diese topologischen Bildungen von dem Bereich der Filterbasen (spezieller gefilterter Familien gemäß **1**) auf den beliebiger gefilterter („speziell": quasi-gerichteter) Familien ausgedehnt[30]).

Genau so läßt sich aber auch der Vergleich von Filterbasen zu einem *Vergleich beliebig gefilterter Familien* ausdehnen; etwa: die *gefilterte Familie* $(f, \mathfrak{A})$ ist *feiner als die gefilterte Familie* $(g, \mathfrak{B})$, sofern die entsprechende Feinheitsbezeichnung zwischen den Bildsystemen $f(\mathfrak{A})$ und $g(\mathfrak{B})$ stattfindet[31]),

$$(f, \mathfrak{A}) \prec (g, \mathfrak{B}) \leftrightarrow f(\mathfrak{A}) \prec g(\mathfrak{B}); \tag{6}$$

dies ist der weiteste, vom Standpunkt der allgemeinen Topologie auch zutreffendste „Teilfolge"-Begriff: es übertragen sich ja jetzt auch die Sätze 1 und 2 von Filterbasen auf beliebig gefilterte („speziell": quasi-gerichtete) Familien. In der Literatur wird der Begriff der Teilfolge allerdings fast durchweg enger genommen. Zur Beleuchtung der Situation dient der

**Satz 3:** *Folgende Aussagen über die gefilterten Familien* $(f, \mathfrak{A})$ *und* $(g, \mathfrak{B})$ *(mit den Indexbereichen A und B) sind äquivalent:*

1. $(g, \mathfrak{B}) \succ (f, \mathfrak{A})$ *(d. h.* $g\mathfrak{B} \succ f\mathfrak{A}$*);*
2. $f^{-1}g\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$;
3. *es gibt eine (mehr-, nicht notwendig eindeutige) Abbildung aus (nicht notwendig: von) A in B derart, daß* $f \supseteq g\varphi$ *und* $\varphi^{-1}\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$.

Dabei bedeutet wie üblich $f^{-1}$ die (im allgemeinen mehrdeutige) Umkehrabbildung zu $f$, $f^{-1}g$, $g\varphi$ das Produkt der Abbildungen (die Hintereinanderausführung: rechter Faktor zuerst!); die Inklusion zweier Abbildungen, von selbst erklärt, wenn Abbildungen mengentheoretisch als Paarmengen (Mengen von geordneten Paaren) aufgefaßt werden, bedeutet, es finde die entsprechende Inklusion der Bildmengen „argumentweise" statt.

Beweis. 1 → 2: Aus der Voraussetzung $g\mathfrak{B} \succ f\mathfrak{A}$ folgt wegen (3) $f^{-1}g\mathfrak{B} \succ f^{-1}f\mathfrak{A}$; da $f$ eine Abbildung von $A$ ist, hat man $f^{-1}fA' \supseteq A'$ für jede Menge $A' \subseteq A$, speziell $A' \in \mathfrak{A}$, und damit $f^{-1}f\mathfrak{A} \succ \mathfrak{A}$, insgesamt also $f^{-1}g\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$.

2 → 1: Aus der Voraussetzung $f^{-1}g\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$ folgt wegen (3) $ff^{-1}g\mathfrak{B} \succ f\mathfrak{A}$; wegen der Eindeutigkeit von $f$ hat man aber $M \supseteq ff^{-1}M$ für jede

30) Diese auf Bourbaki loc. cit. zurückgehende ausdehnende Definition ist bisher, zum Schaden der allgemeinen Anerkennung einer einheitlichen Limestheorie, von keinem Autor übernommen worden.

31) Aumann [4, p. 52, 2. 10. 2]; Aumann sagt auch: $(f, \mathfrak{A})$ ist $(g, \mathfrak{B})$-konvergent. Bei Beschränkung auf quasi-gerichtete Familien findet sich diese Art des Vergleichs auch bei Smiley [30, p. 337, Lemma]; Smiley schreibt $(g, \mathfrak{B}) \geqq (f, \mathfrak{A})$, nennt aber — wenig zutreffend — dabei $(g, \mathfrak{B})$ „as fine as" $(f, \mathfrak{A})$.

Menge $M \subseteq E$, speziell $M \in g\mathfrak{B}$, und damit $g\mathfrak{B} \succ ff^{-1}g\mathfrak{B}$, insgesamt also $g\mathfrak{B} \succ f\mathfrak{A}$.

$2 \to 3$: Man setze $\varphi = g^{-1}f$, so ist $\varphi$ eine Abbildung aus $A$ in $B$, dabei $\varphi^{-1} = f^{-1}g$ und somit, nach Voraussetzung, $\varphi^{-1}\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$; aus $\varphi \subseteq g^{-1}f$ folgt weiter $g\varphi \subseteq gg^{-1}f \subseteq f$ (Eindeutigkeit von $g$!).

$3 \to 2$: Aus $f \supseteq g\varphi$ folgt $g^{-1}f \supseteq g^{-1}g\varphi \supseteq \varphi$ ($g$ Abbildung von!), mithin $f^{-1}g \supseteq \varphi^{-1}$ und damit $f^{-1}g\mathfrak{B} \succ \varphi^{-1}\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$.

Bemerkungen: Die Äquivalenz der Bedingungen 1 und 2 beruht nur darauf, daß $f$ eine eindeutige Abbildung von ist. Nicht äquivalent sind diese Bedingungen mit $\mathfrak{B} \succ g^{-1}f\mathfrak{A}$. Die Äquivalenz der Bedingungen 2 und 3 beruht nur darauf, daß $g$ eine eindeutige Abbildung von ist: auf dieser Voraussetzung beruht — und nur dafür haben wir sie benutzt — die Äquivalenz von $f \supseteq g\varphi$ mit $g^{-1}f \supseteq \varphi$ (diese Voraussetzung ist also zu entbehren, wenn man in der 3. Aussage $f \supseteq g\varphi$ durch $g^{-1}f \supseteq \varphi$ ersetzt).

**4. Indextransformationen: Definitionsbereich, Eindeutigkeit.** Technisch stellt Bedingung 3 vermöge der darin auftretenden *Indextransformation* $\varphi$ eine Beziehung her zwischen den verschiedenen, mehr oder weniger willkürlichen gefilterten Indexbereichen $(A, \mathfrak{A})$ und $(B, \mathfrak{B})$ und hebt so die Willkürlichkeit ihrer Wahl wieder auf.

In der Literatur wird die Teilfolge-Beziehung nun meist dadurch eingeengt, daß man an die Indextransformation $\varphi$ noch irgendwelche Zusatzforderungen stellt; der Schluß von Bedingung 3 auf Bedingung 1 — das ist das Wesentlichste an jeder Teilfolge-Beziehung — bleibt davon selbstverständlich unberührt.

Wir stehen in der Literatur der folgenden Situation gegenüber. Entweder vergleicht man — was theoretisch zweifellos stets das Beste wäre — die zugelassenen „Folgen" (mehr oder weniger spezielle gefilterte oder quasi-gerichtete Familien) wie oben nach der Feinheit der von ihnen im Raume $E$ erzeugten Bildfilter: dann kann man auf die Indextransformationen ganz verzichten[32]). Überall dort indes, wo solche Indextransformationen $\varphi$ (explizite oder implizite) Verwendung finden, pflegt man diese — im Grunde sachwidrig — zumindest nur als ein deutige Abbildungen von zuzulassen.

Der Beschränkung auf Indextransformationen von (statt aus) kommt dabei, auf Grund der folgenden Überlegungen, keine allzu große Bedeutung zu. Zufolge $\varphi^{-1}\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$ und $B \succ \mathfrak{B}$[33]) gilt nämlich für den Definitionsbereich von $\varphi$, $A_0 = \varphi^{-1}B \subseteq A$ (nicht notwendig: $= A$!)

32) So z. B. Aumann und Smiley loc. cit.

33) $\mathfrak{B}$ ist ein nichtleeres Mengensystem über der Grundmenge $B$.

jedenfalls $A_0 \succ \mathfrak{A}$: er enthält, im Sinne der Filterbasis $\mathfrak{A}$, *fast alle* Indizes $a \in A$. Übrigens hat man (wegen $f \geq g\varphi$) $fa = g\varphi a$ für genau die Indizes $a \in A_0$: für genau diese $a$ ist ja $g\varphi a$ nichtleer. Mit anderen Worten: die Einschränkung $f_0$ von $f$ auf $A_0$ ist genau die Hintereinanderausführung von $\varphi$ und $g$, $f_0 = g\varphi$. Als Einschränkung der Filterbasis $\mathfrak{A}$ (über $A$) auf $A_0$ ist die Bourbakische Spur von $\mathfrak{A}$ in $A_0$ zu betrachten: das System $\mathfrak{A}_0$ aller Durchschnitte $A_0 \cap A'$ mit $A' \in \mathfrak{A}$. Diese Einschränkung $\mathfrak{A}_0$ ist dann eine Filterbasis über $A_0$, die wegen $A_0 \succ \mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}$ äquivalent[34]) ist, weswegen auch $f_0\mathfrak{A}_0 = f\mathfrak{A}_0$ mit $f\mathfrak{A}$ äquivalent ist: die gefilterten Familien $(f_0, \mathfrak{A}_0)$ und $(f, \mathfrak{A})$ erzeugen im Raume $E$ denselben Bildfilter, sind *äquivalent*. Insbesondere ist nun auch die eingeschränkte Familie $(f_0, \mathfrak{A}_0)$, wie vorher $(f, \mathfrak{A})$, „Teilfolge", in dem weiten Sinne: eine Verfeinerung von $(g, \mathfrak{B})$. Aber vermittelt wird diese Beziehung durch die alte Indextransformation $\varphi$, hat man doch $f_0 \geq$ (sogar: $=$) $g\varphi$ und, wegen $\varphi^{-1}\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A} \sim \mathfrak{A}_0$, $\varphi^{-1}\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}_0$; dabei ist $\varphi$ jetzt aber eine Abbildung von dem Indexbereich der (eben passend eingeschränkten) „Teilfolge", nämlich $A_0$ (statt wie ursprünglich nur: aus $A$). Durch eine geringfügige Abänderung der Teilfolge $(f, \mathfrak{A})$ („Streichen von unwesentlich vielen — im klassischen Fall: von endlich vielen — Gliedern") kann man es also immer erreichen, daß die gegebene Indextransformation $\varphi$ als Abbildung von zu betrachten ist. Immerhin handelt es sich auch schon bei der Beschränkung auf Indextransformationen von um eine echte Zusatzforderung. Denn man hat ja allgemein

$$A_0 = \varphi^{-1}\mathfrak{B} \subseteq f^{-1}gB \subseteq A;$$

der Beweis von Satz 3 ($2 \to 3$) lehrt, daß man $\varphi$ stets so wählen kann (z. B. $\varphi = g^{-1}f$), daß für den Definitionsbereich $A_0$ sogar die Gleichung

$$A_0 = \varphi^{-1}B = f^{-1}gB$$

eintritt. Andererseits ist $f^{-1}gB = A$, d. h. $f^{-1}gB \geq A$, mit $gB \geq fA$ äquivalent, damit, daß jedes „Glied" der Teilfolge $(f, \mathfrak{A})$ auch als „Glied" vorkomme in der Ausgangsfolge $(g, \mathfrak{B})$. Diese letzte, an sich ganz natürlich erscheinende, in Wahrheit jedoch auch in der Praxis häufig unbequeme Forderung — jedenfalls eine den bisherigen Vergleich wirklich einengende Zusatzforderung — ist also mit der Beschränkung auf Indextransformationen von äquivalent; genauer: in Modifikation von Satz 3 gilt der

**Satz 4:** *Folgende Aussagen über die gefilterten Familien* $(f, \mathfrak{A})$ *und* $(g, \mathfrak{B})$ *(mit den Indexbereichen* $A$ *und* $B$*) sind äquivalent:*

34) Hier ist es einmal wirklich wesentlich, daß $\mathfrak{A}$ eine Filterbasis ist.

1. $g\mathfrak{B} \succ f\mathfrak{A}$ *und* $gB \supseteq fA$;
2. $f^{-1}g\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$ *und* $f^{-1}gB = A$;
3. *es gibt eine (mehr-, nicht notwendig eindeutige) Abbildung* $\varphi$ *von* $A$ *in* $B$ *derart, daß* $f = g\varphi$ *und* $\varphi^{-1}\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$.

Wobei noch zu bemerken ist, daß im Falle $A_0 = A$ aus der Inklusion $f \supseteq g\varphi$ ja die Gleichung $f = f_0 = g\varphi$ wird (umgekehrt zieht $f = g\varphi$ auch $A = f^{-1}E = \varphi^{-1}g^{-1}E = \varphi^{-1}B = A_0$, $\varphi$ Abbildung von, nach sich).

Was nun die Eindeutigkeit der Indextransformationen $\varphi$ anlangt, so bemerken wir, daß sie (wegen $g^{-1}f \supseteq \varphi$) automatisch erzwungen wird, falls — recht speziell — die Funktion $g$ eineindeutig ist[35]). Allgemein wird es jedoch zu einer wirklichen Verengung der „Teilfolge"-Beziehung führen, wenn wir nur eindeutige Indextransformationen zulassen. Dazu folgendes

**Beispiel:** Sei $A = E = N$ die Menge der natürlichen Zahlen, sei $f$ die identische Selbstabbildung von $N$. Sei $B = N \times N$ und $g$ der zu diesem cartesischen Produkt gehörige erste Projektionsoperator, $g(i, k) = i$ für alle Paare $(i, k) \in N \times N$; es ist dies eine Abbildung von $B$ auf $A$. Sei $\mathfrak{B}$ der charakteristische Filter über $B$, der Filter der Komplemente der endlichen Teilmengen von $B$[36]). Dann ist $g\mathfrak{B} = \{A\}$ der gröbste Filter über $A$; indem wir diesen gleich $\mathfrak{A}$ setzen, haben wir $g\mathfrak{B} = f\mathfrak{A}$, erst recht $g\mathfrak{B} \succ f\mathfrak{A}$. Eine beliebige Indextransformation $\varphi$ aus $A$ in $B$ mit $f \supseteq g\varphi$ und $\varphi^{-1}\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$ (und es gibt eine solche, z. B. $\varphi = g^{-1}f = g^{-1}$) hat nun die Eigenschaft, an jeder Stelle $a \in A$ „unendlich vieldeutig" zu sein: $\varphi a$ ist stets unendlich (insbesondere nichtleer, $\varphi$ also eine Abbildung von $A$). In der Tat: angenommen, für ein $a_0 \in A$ wäre $\varphi a_0$ endlich, dann wäre $B' = B - \varphi a_0 \in \mathfrak{B}$ und damit, wegen $\varphi^{-1}\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A} = \{A\}$, $\varphi^{-1}B' = A$, also $a_0 \in \varphi^{-1}B'$, d. h. es existierte ein $b_0 \in B' = B - \varphi a_0$, d. h. $b_0 \notin \varphi a_0$, mit $a_0 \in \varphi^{-1}b_0$, d. h. $b_0 \in \varphi a_0$, was in sich ein Widerspruch ist.

**5. Die Teilfolge-Begriffe von Fréchet und Tukey.** In speziellen „Folgen"-Theorien ist man nun häufig über die Beschränkung auf eindeutige Indextransformationen von noch weit hinausgegangen. So hat man ja bei Beschränkung auf klassische (Fréchetsche) Folgen ($A = B = N$ = Menge der natürlichen Zahlen, gerichtet durch deren natürliche Größenanordnung $\leqq$, mithin $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ = Fréchet-Filter[37]) = charakteristischer Filter über der Menge $N$) als Indextrans-

35) Ist (wie in folgendem Beispiel) $f$ eineindeutig, so ist (wegen $f^{-1}g \supseteq \varphi^{-1})\varphi$ einmehrdeutig, d. h. die Umkehrung $\varphi^{-1}$ eindeutig.

36) J. Schmidt [1, p. 367ff.].

37) Bourbaki [9, p. 23].

formationen $\varphi$ durchweg nur eigentlich monoton wachsende, ziemlich spezielle eineindeutige Abbildungen von $N$ in sich, zugelassen. Die Bedingung $\varphi^{-1}\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$ war dabei stets von selbst erfüllt: $\varphi^{-1}\mathfrak{C} \succ \mathfrak{C}$, d. h. $\varphi^{-1}\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}$ besagt ja, daß mit einer Menge $C \subseteq N$ auch stets ihr Urbild $\varphi^{-1}C$ fast alle natürlichen Zahlen enthält (dazu hätte man die Monotonie gewiß nicht, allenfalls die Eineindeutigkeit, in Wahrheit noch weit weniger benötigt). Eben deswegen erhielt man die Gesamtheit aller klassischen (Fréchetschen) Teilfolgen der klassischen Folge $g$ als die Menge aller $g\varphi$ mit eigentlich monoton wachsendem $\varphi$ (von $N$ in sich). Schon in der klassischen Analysis traten die technischen Mängel eines derartig engen Teilfolge-Begriffes deutlich zutage. Häufig suchte man sie daher durch Zusatzbetrachtungen auszugleichen, indem man eine — allerdings wohl immer unvollständige — Liste solcher Operationen angab, welche den Übergang von einer klassischen Folge zu einer beliebig „äquivalenten" ermöglichen sollten. Unter diesen Operationen fand sich vor allem stets die „Umordnung"[38] (Änderung der Numerierung mittels einer beliebigen Permutation des Indexbereiches $N$), welche die Monotonie der die Teilfolge-Beziehung vermittelnden Indextransformationen $\varphi$ nachträglich praktisch wieder aufhob, zugunsten beliebiger Eineindeutigkeit (von $N$ in $N$) der Indextransformationen abschwächte. Zu diesen Operationen gehörte ferner die (allgemeiner bereits in **4** betrachtete) „endliche Abänderung"[39] (Streichen oder Hinzufügen von endlich vielen — einer unwesentlichen Menge von — Gliedern); dieses „infinitäre Verhalten"[40] macht sich ja bereits innerhalb des allgemeinen, noch gar nicht auf Konvergenz eingehenden Studiums der klassischen Folgen bemerkbar: z. B. bei dem Cantorschen Diagonalverfahren, das uns zu jeder Folge $(g^i)$ von Folgen $g^i = (g^i_k)$, von denen jede im obigen streng klassischen Sinn Teilfolge ist der vorangehenden, in Gestalt der Diagonalfolge $(g^k_k)$ eine Folge liefert, welche Teilfolge ist einer jeden Folge $g^i$, aber erst nach passender (von $i$ abhängiger) endlicher Abänderung[41]).

Einen etwas weiteren als den strengen klassischen Teilfolge-Begriff hat Tukey in seiner Theorie der „Phalanxen" geprägt. Wie die klassischen Folgen alle auf die natürliche Zahlenreihe $(N, \leqq)$, so sind auch

38) Zum Beispiel Haupt-Aumann-Pauc [16, p. 40].

39) Haupt-Aumann-Pauc loc. cit.

40) Haupt-Aumann-Pauc loc. cit., Aumann [4, p. 56].

41) „Umordnung" und „endliche Abänderung" reichen nicht aus, uns stets von einer klassischen Folge — z. B. 1, 2, 3, 4, 5, ... — zu einer im Sinne unseres Feinheitsvergleichs äquivalenten („assoziierten") — z. B. 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, ... — gelangen zu lassen.

die Tukeyschen „Phalanxen" — gleichfalls gewisse gerichtete Familien $(f, \leqq)$ — alle auf einen festen gerichteten Indexbereich $(I, \leqq)$ bezogen[42]), dessen Natur hier völlig belanglos ist: für die abstrakte Konvergenztheorie wichtig ist nur die Tatsache, daß man mittels eines geeigneten „universellen" gerichteten Indexbereiches $(I, \leqq)$ genügend viele, ja alle Filter über dem Raum $E$ erzeugen kann[43]), und nicht nur, wie in der klassischen Theorie, gerade die sogenannten Elementarfilter[44]). Aus diesem Grunde beschränkt sich auch Tukey darauf, nur (quasi-) gerichtete Familien $(f, \leqq)$ mit gleichem (quasi-)gerichteten Indexbereich $(I, \leqq)$ miteinander in Teilfolge-Beziehung zu bringen: sein Begriff der „Subphalanx"[45]) läßt als Indextransformationen $\varphi$ genau die eindeutigen Abbildungen von $I$ in sich zu, die extensiv sind: $i \leqq \varphi i$ für jeden Index $i \in I$. (Im Falle der natürlichen Zahlenreihe $I = N$ gehören zu diesen extensiven insbesondere die in der klassischen Theorie allein zugelassenen eigentlich monotonen Transformationen; aber nicht jede extensive Abbildung von $N$ in sich ist monoton oder eineindeutig, geschweige denn eigentlich monoton). Bei diesen Tukeyschen Indextransformationen ist nun wieder die Bedingung $\varphi^{-1}\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$ von selbst erfüllt: die „Extensität" der Transformation $\varphi$ bedeutet ja, für jeden Index $i_0 \in I$ solle $\mathfrak{f}i_0, \to\mathfrak{f} \supseteq \varphi\mathfrak{f}i_0, \to\mathfrak{f}$ oder, was, da $\varphi$ ja eine eindeutige Abbildung von ist, auf dasselbe hinausläuft: solle $\varphi^{-1}\mathfrak{f}i_0, \to\mathfrak{f} \supseteq \mathfrak{f}i_0, \to\mathfrak{f}$ gelten, woraus denn, unter $\mathfrak{J}_0$ das System aller Hauptenden $\mathfrak{f}i_0, \to\mathfrak{f}$ $(i_0 \in I)$ — per definitionem eine Basis des Perfinalitätsfilters $\mathfrak{J}$ von $(I, \leqq)$ — verstanden, eben $\varphi^{-1}\mathfrak{J}_0 \succ \mathfrak{J}_0$ — und damit auch $\varphi^{-1}\mathfrak{J} \succ \mathfrak{J}$ — folgt. Bei Zugrundelegung eines (quasi-)gerichteten Indexbereiches $(I, \leqq)$ erhält man also die Gesamtheit aller „Subphalanxen" der „Phalanx" $g$ abermals als die Menge aller $g\varphi$, jetzt mit extensivem $\varphi$ von $I$ in sich.

**6. Die Teilfolge-Begriffe von Nöbeling-McShane und Birkhoff.** Die klassische (Fréchetsche) wie die Tukeysche Theorie beschränken sich auf einen festen Indexbereich $I$ mit einer festen Ausrichtung und demzufolge einen festen Indexfilter $\mathfrak{J}$; die verschiedenen Folgen

42) Es handelt sich dabei um „stacks" (durch die mengentheoretische Inklusion gerichtete Systeme aller endlichen Teilmengen beliebiger „Basismengen"); siehe Day [14, p. 206], Tukey [31, p. 13].

43) Tukey [31, p. 42f.]; siehe auch Bruns-Schmidt [10, p. 174], wo ein solcher „universeller" Indexbereich als direktes Produkt konstruiert wird.

44) Bourbaki [9, p.29]: die durch klassische Folgen erzeugten Filter, die eindeutigen Bilder des Fréchet-Filters. Die Elementarfilter bilden nur einen verschwindend kleinen Teil in der Gesamtheit aller Filter (über $E$).

45) Tukey [31, p. 35].

entsprechen hier eineindeutig den verschiedenen auf $I$ definierten Funktionen $f, g, \ldots$ . In extremem Gegensatz dazu halten Nöbeling und McShane die Funktion $f$ (und damit auch ihren Indexbereich $I$) fest und variieren dafür den Indexfilter $\mathfrak{J}$. Demgemäß definieren sie die gefilterte Familie $(f, \mathfrak{A})$ als „Teilfolge"[46]) der gefilterten Familie $(g, \mathfrak{B})$, falls $f = g$ (mithin $A = B = I$) und $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ ist. Man kann dies auch so ausdrücken: sie lassen als Indextransformationen $\varphi$ nur die identische Selbstabbildung von $A$ zu, und nur, wenn diese zugleich Abbildung auf $B$ ist (in der Tat ist bei diesem $\varphi$ ja $f \geq g\varphi$ mit $f = g$ gleichbedeutend). Die Spezialisierung $I = E$, $f =$ identische Selbstabbildung von $E$ liefert den Bourbakischen Vergleich der Filter(basen) über $E$ und zeigt damit, daß dieses Vorgehen von Nöbeling und McShane zumindest theoretisch ausreichend ist.

Schließlich hat man auch erwogen, nur den Indexbereich zu variieren, dabei aber die Funktion und den Indexfilter — wenigstens „im wesentlichen" — festzuhalten. Demgemäß definierte man — so vor allem Birkhoff — $(f, \mathfrak{A})$ als „Teilfolge" von $(g, \mathfrak{B})$, wenn $(f, \mathfrak{A})$ die Einschränkung war von $(g, \mathfrak{B})$ auf $A \subseteq B$, d. h. $f$ die Einschränkung von $g$ auf $A$, $\mathfrak{A}$ die Spur von $\mathfrak{B}$ in $A$. Dieses Vorgehen läuft zunächst darauf hinaus, daß man als Indextransformation $\varphi$ nur die identische Selbstabbildung von $A$ zuließ (ohne Rücksicht darauf, ob diese, wie oben, auf oder in $B$ sei). In der Tat ist bei diesem $\varphi$ ja $f \geq g\varphi$ mit $f = g\varphi =$ Einschränkung von $g$ auf $A$ gleichbedeutend. Und $\varphi^{-1}\mathfrak{B}$ ist gerade die Spur von $\mathfrak{B}$ in $A$; dieser Teilfolge-Begriff wäre also formal zunächst weiter als der obige von Nöbeling und McShane, wenn man nicht darüber hinaus noch die Forderung $\varphi^{-1}\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$ zu $\varphi^{-1}\mathfrak{B} \sim \mathfrak{A}$ verschärft hätte. Offenbar käme es nun aber (im Sinne der Erzeugung von Filtern $\mathfrak{F}$ im Raume $E$) ganz auf das Gleiche hinaus, wenn man nicht die Funktion $g$, sondern nur den Indexfilter $\mathfrak{B}$ einschränkte: so betrachtet würde dieser Teilfolge-Begriff bei Zulassung von $\varphi^{-1}\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$ überhaupt mit dem von Nöbeling und McShane (*Variation des Indexfilters*) zusammenfallen, bei Beschränkung auf $\varphi^{-1}\mathfrak{B} \sim \mathfrak{A}$ (*Variation des Indexbereiches*)[47]) sogar eine echte Verengung[48]) bedeuten, insofern man ja als Teilfolge $(g, \mathfrak{A})$ von $(g, \mathfrak{B})$ nur solche zuließe, bei denen $\mathfrak{A}$ nicht, wie bei Nöbeling und McShane, eine völlig beliebige Verfeinerung ist von $\mathfrak{B}$. sondern eine solche höchst spezieller Natur, nämlich eine Spur von $\mathfrak{B}$ (in einer Menge $A \subseteq B$).

46) Nöbeling [24, p. 139f.] und [25, p. 54, 2. Verfahren]. McShane [22, p. 164]: subsyntax.

47) Nöbeling [25, p. 54, 1. Verfahren].

48) Nöbeling loc. cit.

Übrigens würde man hierbei nicht Einschränkungen auf beliebige Teilmengen $A$ von $B$ zulassen, sondern nur auf solche, bei denen die Spur $\varphi^{-1}\mathfrak{B}$, wie $\mathfrak{B}$ selbst, eine eigentliche, d. h. die leere Menge $O$ nicht als Element enthaltende Filterbasis, bei denen also ein jeder der Durchschnitte $A \frown B'$ mit $B' \in \mathfrak{B}$ nichtleer ist, kurz: die mit $\mathfrak{B}$ verzahnt sind; ist $(B, \leqq)$ eine (quasi-)gerichtete Menge und $\mathfrak{B}$ die aus den Hauptenden bestehende Basis bzw. der volle Perfinalitätsfilter, so bezeichnet man solche Teilmengen $A$ auch als konfinal. Beispiele haben gezeigt, daß die Birkhoffsche *Einschränkung auf konfinale Teilmengen*[49]) tatsächlich einen für die Bedürfnisse der Analysis viel zu engen Teilfolge-Begriff darstellt[50]).

**7. Der Teilfolge-Begriff von Kelley.** Ob man nun, wie in der klassischen Theorie (Fréchet) und bei Tukey, den Indexfilter festhält und die Funktion variiert, ob man es, wie bei Nöbeling und McShane, gerade umgekehrt anstellt: es kann — unbeschadet dessen, wie weit man mit jeder dieser Theorien gelangt — wenig befriedigen, daß man in ihnen allen an einem bestimmten Indexbereich — im allgemeinen einer willkürlichen, außerhalb des Raumes $E$ liegenden Zutat — festhalten soll.

Solche Überlegungen — insbesondere aber die Mängel der Birkhoffschen Einschränkung auf konfinale Teilmengen — haben 1950 Kelley zur Wiederentdeckung eines bereits 1939 bei E. H. Moore vorhandenen, bis dato nie beachteten Teilfolge-Begriffs geführt, der sich seitdem — insbesondere durch Kelleys Buch — in der amerikanischen Literatur allgemein durchgesetzt, bei uns jedoch immer noch keine Beachtung gefunden hat. Bei Beschränkung auf (quasi-)gerichtete Familien $(f, \leqq)$, $(g, \leqq)$ (wir benutzen wie üblich, ohne Mißverständnisse befürchten zu müssen, für die zugrundegelegten Anordnungen der Indexbereiche $A$, $B$ die gleichen Inklusionssymbole $\leqq$) definiert Kelley $(f, \leqq)$ als „Teilfolge“[51]) von $(g, \leqq)$, wenn eine eindeutige Abbildung $\varphi$ von $A$ in $B$ existiert mit $f = g\varphi$, wobei es zu jedem Index $b_0 \in B$ einen Index $a_0 \in A$ geben soll, so daß $\varphi a \geqq b_0$ (d. h. $b_0 \leqq \varphi a$) für alle $a \geqq a_0$ gilt. Das bedeutet aber: Kelley *läßt genau beliebige eindeutige Index-*

49) Birkhoff [7, §§ 4, 4a], noch deutlicher bei Alaoglu-Birkhoff [1, § 4]. Auch in seinem Buche [8] — siehe insbesondere das Foreword on Topology — arbeitet Birkhoff nur mit der Einschränkung auf konfinale Teilmengen, ebenso Arnold [3] bei der Behandlung von Birkhoffs Problem 20 (Birkhoff [8, p. 57f.]).

50) Kelley [18, Einleitung]; Nöbeling [24, p. 139], [25, p. 55].

51) Kelley [18, I], [19, p. 69ff.]: subnet; ebenso McShane [20, p. 4ff., p. 7f.] (mit heuristischer Einführung in diesen Begriff), [21, p. 18, (3. 8)], Bartle [5, p. 552], Smiley [30, p. 337]. Bei Zugrundelegung eines festen quasi-gerichteten Indexbereiches $(I, \leqq)$ auch schon bei Arens [2, p. 230] als „directed subsystem“.

*transformationen von (im Sinne von Satz 3) zu.* In der Tat, für ein $\varphi$ von $A$ (Satz 4) war ja $f = g\varphi$ mit $f \geq g\varphi$ gleichbedeutend. Und die zweite Kelleysche Bedingung für $\varphi$ läßt sich ja auch so formulieren: zu $b_0 \in B$ soll es stets ein $a_0 \in A$ mit $\mathfrak{f} b_0, \to \mathfrak{f} \geq \varphi \mathfrak{f} a_0, \to \mathfrak{f}$ oder, was, da $\varphi$ ja eine eindeutige Abbildung von ist, auf dasselbe hinausläuft: mit $\varphi^{-1} \mathfrak{f} b_0, \to \mathfrak{f} \geq \mathfrak{f} a_0, \to \mathfrak{f}$ geben. (Hier wird deutlich, worin Kelleys Schritt über Tukey hinaus technisch besteht: Tukey hatte — siehe oben — als $a_0$ sehr speziell stets das vorgegebene $b_0$ selbst gewählt wissen wollen, was eben überhaupt nur dann möglich ist, wenn zwischen den Indexbereichen zumindest die Inklusion $B \geq A$ stattfindet.) Mit anderen Worten: Kelleys zweite Forderung besagt: $\varphi^{-1}\mathfrak{B}_0 \succ \mathfrak{A}_0$, unter $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{B}_0$ das System der Hauptenden von $(A, \leqq)$ bzw. $(B, \leqq)$ verstanden. Oder, unter $\mathfrak{A}$ den vollen Perfinalitätsfaktor von $(A, \leqq)$ (mit der Basis $\mathfrak{A}_0$), unter $\mathfrak{B}$ den von $(B, \leqq)$ (mit der Basis $\mathfrak{B}_0$) verstanden: $\varphi^{-1}\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$, d. h. $\varphi^{-1}\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, — ist die Menge $B'$ perfinal in $(B, \leqq)$, so soll auch stets ihr Urbild $\varphi^{-1}B'$ perfinal sein in $(A, \leqq)$.

Durch diese filtertheoretische Fassung der zweiten Kelleyschen Bedingung wird deutlich: *der Kelleysche Teilfolge-Begriff ist an sich gar nicht ordnungs-, sondern filtertheoretischer Natur, er ist nicht nur für quasi-gerichtete, sondern allgemeiner für beliebig gefilterte Familien sinnvoll.* Er ist weiter als alle bisher besprochenen Teilfolge-Begriffe außer unserem (vermöge Satz 1 und 2 topologisch zu interpretierenden) Feinheitsvergleich, bei dem (Satz 3) sogar beliebig mehrdeutige Indextransformationen aus zugelassen sind.

**8. Indextransformationen und Unterhalbstetigkeit.** Wir wollen Kelleys zweite, anscheinend ordnungstheoretische, in Wahrheit unsere allgemein-filtertheoretische Bedingung

$$\varphi^{-1}\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A} \tag{I}$$

noch anders, und zwar topologisch deuten. Dazu brauchen wir von jetzt ab nur noch zwei gefilterte Mengen[52]) $(A, \mathfrak{A})$ und $(B, \mathfrak{B})$ zu betrachten, sowie eine (mehr-, nicht notwendig eindeutige) Abbildung $\varphi$ aus (nicht notwendig von) $A$ in $B$.

Ist für den Augenblick $\varphi$ doch noch einmal eine eindeutige Abbildung von $A$, so ist (I) zufolge Satz 3 mit

$$\mathfrak{B} \succ \varphi\mathfrak{A} \tag{II}$$

gleichwertig. Ordnungstheoretisch besagt (II): jede perfinale Teilmenge $B' \subseteq B$ wird durch das Bild $\varphi A'$ einer perfinalen Teilmenge

52) Bourbaki [9, p. 21]: ensemble filtré.

$A' \subseteq A$ unterboten, $B' \supseteq \varphi A'$. Topologisch aber ist (II) im wesentlichen nichts anderes als die klassische Cauchysche $\varepsilon$-$\delta$-Definition des Grenzwertes und der Stetigkeit. Man adjungiere nämlich zur gefilterten Menge $(B, \mathfrak{B})$ einen neuen („idealen") Punkt $\omega_{\mathfrak{B}}$ und versehe die Menge $\hat{B} = B \cup \{\omega_{\mathfrak{B}}\}$ mit der sog. mit $\mathfrak{B}$ verbundenen Topologie $\tau_{\mathfrak{B}}$ [53]): jedem Punkt $x \in B$ ordne man als Umgebungsbasis (Basis des Umgebungsfilters $\mathfrak{B}x$) die Menge $\{x\}$ zu (d. h. man mache $x$ zum isolierten Punkt), dem neuen Punkt $x = \omega_{\mathfrak{B}}$ das System $\hat{\mathfrak{B}}$ aller Mengen $B' \cup \{\omega_{\mathfrak{B}}\}$ mit $B' \in \mathfrak{B}$ (sodaß also $\mathfrak{B}$ selbst aus sog. reduzierten Umgebungen von $\omega_{\mathfrak{B}}$ besteht). Offenbar ist nun (II) mit

$$\hat{\mathfrak{B}} \succ \varphi\mathfrak{A} \tag{III}$$

äquivalent, zufolge (5) und (1) — eben der Cauchyschen Grenzwertdefinition — also damit, daß $\varphi$ längs $\mathfrak{A}$ gegen $\omega_{\mathfrak{B}}$ konvergiere [54]),

$$\omega_{\mathfrak{B}} \in \mathrm{Lim}_{\mathfrak{A}} \varphi. \tag{IV}$$

Nun kann man aber ganz entsprechend, nach Adjunktion eines neuen Punktes $\omega_{\mathfrak{A}}$ zur gefilterten Menge $(A, \mathfrak{A})$, auch die mit $\mathfrak{A}$ verbundene Topologie $\tau_{\mathfrak{A}}$ von $\hat{A} = A \cup \{\omega_{\mathfrak{A}}\}$ einführen, bei der das System $\hat{\mathfrak{A}}$ aller Mengen $A' \cup \{\omega_{\mathfrak{A}}\}$ mit $A' \in \mathfrak{A}$ Umgebungsbasis von $\omega_{\mathfrak{A}}$ ist. $\mathfrak{A}$ selbst ist dann die Spur von $\hat{\mathfrak{A}}$ im Definitionsbereich $A$ von $\varphi$, $\omega_{\mathfrak{A}}$ Berührungspunkt von $A$; wir können also, wie üblich, (III) auch dahin interpretieren, $\omega_{\mathfrak{B}}$ sei ein Grenzwert von $\varphi$ an der Stelle $\omega_{\mathfrak{B}}$, in Zeichen [55])

$$\omega_{\mathfrak{B}} \in \lim_{a \to \omega_{\mathfrak{A}}} \varphi(a). \tag{V}$$

Schließlich kann man noch die Abbildung $\varphi$ durch $\hat{\varphi}(\omega_{\mathfrak{A}}) = \omega_{\mathfrak{B}}$ zu einer (auf ganz $\hat{A}$ definierten) Abbildung $\hat{\varphi}$ fortsetzen; (II) und (III) sind dann offenbar auch mit

$$\hat{\mathfrak{B}} \succ \hat{\varphi}\hat{\mathfrak{A}} \tag{VI}$$

53) Bourbaki [9, p. 27]: topologie associée à la base de filtre $\mathfrak{B}$.

54) In der amerikanischen Literatur wird daher eine (I) oder (II) genügende eindeutige Abbildung $\varphi$ von $(A, \mathfrak{A})$ in $(B, \mathfrak{B})$ — meist bei Beschränkung auf quasi-gerichtete anstelle beliebig gefilterter Mengen — als „konvergent" bezeichnet; so Bennet [6, p. 133], E. H. Moore [23, p. 34], Smiley [30, p. 337]. McShane [22, p. 162, (2)]: $(\varphi, \mathfrak{A})$ converges into $\mathfrak{B}$, Schreibweise [22, p. 163]: $(\varphi, \mathfrak{A}) \to [\mathfrak{B}]$ (Symbol für unser $\omega_{\mathfrak{B}}$); Arens [2, p. 200]; $\varphi(a) \to \infty$ (Symbol für $\omega_{\mathfrak{B}}$). Sakakihara [26, p. 1] nennt solche Abbildungen gerade „divergent".

55) McShane [22, p. 163]: $\varphi(a) \to [\mathfrak{B}]$ as $a \to [\mathfrak{A}]$, auch $\lim_{a \to [\mathfrak{A}]} \varphi(a) = [\mathfrak{B}]$, — wobei allerdings zu bemerken ist, daß dieser Limes von $\varphi$ längs $\hat{\mathfrak{A}}$ (an der Stelle $[\mathfrak{A}] = \omega_{\mathfrak{A}}$) keineswegs eindeutig zu sein braucht.

äquivalent, anders ausgedrückt: mit

$$\text{(VII)} \qquad \hat{\varphi}(\omega_{\mathfrak{A}}) = \omega_{\mathfrak{B}} \in \operatorname*{Lim}_{a \to \omega_{\mathfrak{A}}} \hat{\varphi}(a),$$

damit daß $\hat{\varphi}$ *stetig* sei *an der Stelle* $\omega_{\mathfrak{A}}$.

Zu ganz entsprechenden topologischen Interpretationen von (I) gelangt man nun aber auch im allgemeinen Falle eines beliebigen mehrdeutigen $\varphi$ aus $A$ in $B$, wo (II) — gewissermaßen die klassische Cauchysche (aber eben in ihrer Gültigkeit auf eindeutige Abbildungen von beschränkte) Grenzwertdefinition — nicht mehr mit (I) äquivalent ist. Es stellt sich heraus: (I) ist im wesentlichen nichts anderes als die allgemeine, für beliebig mehrdeutiges $\varphi$ aus zuständige Grenzwertdefinition. Inhaltlich besagt (I) nämlich Folgendes: zu jedem $B' \in \mathfrak{B}$ solle ein $A' \in \mathfrak{A}$ mit $\varphi^{-1}B' \supseteq A'$ existieren, d. h. so, daß $a \in \varphi^{-1}B'$ für jedes $a \in A'$, ausführlicher: so, daß zu jedem $a \in A'$ ein $b \in B'$ mit $a \in \varphi^{-1}b$, d. h. $b \in \varphi a$ existiert, anders ausgedrückt: so, daß $B' \cap \varphi a \neq O$, d. h. $B' * \varphi a$ für jedes $a \in A'$. In der Tat ist dies, unter $\mathfrak{B}$ den Umgebungsfilter $\mathfrak{B}x$ (bzw. eine seiner Basen) eines Punktes $x$ bei irgendeiner Topologie $\tau$ von $B$ verstanden, gerade die für beliebige mehrdeutige Abbildungen aus (Mengenfamilien) übliche Definition des *Grenzwertes* oder *Limespunktes von* $\varphi$ *längs der Filterbasis* $\mathfrak{A}$ (*der gefilterten Mengenfamilie* $(\varphi, \mathfrak{A})$)[56], welche wir demnach kurz [57]) so schreiben können:

$$(7) \qquad x \in \operatorname{Lim}_{\mathfrak{A}} \varphi \leftrightarrow \varphi^{-1}(\mathfrak{B}x) \succ \mathfrak{A}.$$

Zur topologischen Interpretation von (I) brauchen wir nun nur noch — da $\mathfrak{B}$ selbst sich im allgemeinen noch nicht als Umgebungsbasis eines Punktes auffassen läßt[58]) — wieder wie oben zu der Filterbasis $\hat{\mathfrak{B}}$, Umgebungsbasis des Punktes $\omega_{\mathfrak{B}}$, überzugehen: (I) läßt sich wegen $\varphi^{-1}\mathfrak{B} = \varphi^{-1}\hat{\mathfrak{B}}$ ja auch, analog (III),

$$\text{(VIII)} \qquad \varphi^{-1}\hat{\mathfrak{B}} \succ \mathfrak{A}$$

schreiben, ist also auch im allgemeinen Falle mit der Konvergenzaussage (IV) und, nach Einführung des Punktes $\omega_{\mathfrak{A}}$ usw., (V)[59]) äqui-

56) Element des „unteren" (topologischen) Limes, siehe Fußnote 15 und die dort angegebene Literatur.

57) Vor allem frei von den Quantifikatoren „für alle" und „es gibt".

58) Nämlich nur dann, wenn $\mathfrak{B}$ einen nichtleeren Durchschnitt besitzt.

59) Der Deutlichkeit halber sollte man hier

$$\operatorname*{Lim}_{\substack{a \to \omega_{\mathfrak{A}} \\ a \neq \omega_{\mathfrak{A}}}} \varphi(a) \quad \text{anstatt} \quad \operatorname*{Lim}_{a \to \omega_{\mathfrak{A}}} \varphi(a)$$

schreiben: das rechte Subskript symbolisiert ja den Limes längs der Umgebungsbasis $\hat{\mathfrak{A}}$ von $\omega_{\mathfrak{A}}$, das linke den längs der Basis $\mathfrak{A}$ der reduzierten Umgebungen von $\omega_{\mathfrak{A}}$, — und

valent. Schließlich ist, nachdem man $\varphi$ wie oben auf $A$ zu $\hat{\varphi}$ fortsetzt, (I) auch mit dem Analogon von (VI),

$$\hat{\varphi}^{-1}\hat{\mathfrak{B}} \succ \hat{\mathfrak{A}} \tag{IX}$$

äquivalent, also auch im allgemeinen Falle mit der Konvergenzaussage (VII), damit, daß die Fortsetzung $\hat{\varphi}$ *unterhalb stetig*[60]) sei *an der Stelle* $\omega_{\mathfrak{A}}$. Wir werden deshalb auch eine der Bedingung (I) genügende (mehrdeutige) Abbildung $\varphi$ aus $(A, \mathfrak{A})$ in $(B, \mathfrak{B})$ kurz *unterhalb stetig* nennen.

**9. Unterhalbstetigkeit: duale Fassung.** Die Unterhalbstetigkeit der Indextransformation $\varphi$ läßt sich nun noch auf eine andere, zu (I) gewissermaßen duale Weise fassen. Technische Grundlage dazu ist die uneingeschränkt (für beliebig mehrdeutiges $\varphi$ aus $A$ in $B$ und — bei gleicher Definition der Verzahnungsrelation $*$ — für völlig beliebige Mengensysteme $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gültige) verallgemeinerte Symmetrie[61])

$$\varphi^{-1}\mathfrak{B} * \mathfrak{A} \leftrightarrow \varphi\mathfrak{A} * \mathfrak{B}, \tag{8}$$

ein gewisses Gegenstück zu der die Feinheitsrelation $\prec$ betreffenden, genau so uneingeschränkt gültigen Monotonie (3). Um diese Äquivalenz zur Umformung der Unterhalbstetigkeit $\varphi^{-1}\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$ heranziehen zu können, bedienen wir uns der *Verzahnung des Mengensystems* $\mathfrak{A}^*$ (*bezüglich der Grundmenge* $A$): des Systems $\mathfrak{A}^*$ aller mit $\mathfrak{A}$ verzahnten Teilmengen von $A$; ist insbesondere $\mathfrak{A}$ ein Filter (es genügt: eine Filterbasis), so nennen wir $\mathfrak{A}^*$ *den zum Filter* $\mathfrak{A}$ *gehörigen Raster*[62]). Die ordnungstheoretische Bedeutung von $\mathfrak{A}^*$ ist folgende: ist $\mathfrak{A}$ der Perfinalitätsfilter (es genügt: irgendeine seiner Basen, z. B. das System aller Hauptenden) der (quasi-)gerichteten Menge $(A, \leqq)$, so besteht $\mathfrak{A}^*$ gerade aus allen konfinalen Teilmengen von $A$; wir nennen $\mathfrak{A}^*$ daher den *Konfinalitätsraster* von $(A, \leqq)$[63]). Die topologische Bedeutung von $\mathfrak{A}^*$ ist folgende: ist der Umgebungsfilter (es genügt: irgendeine seiner Basen) eines Punktes $x$ des topologischen Raumes $(A, \tau)$, so besteht $\mathfrak{A}^*$ gerade aus allen Teilmengen von $A$, die $x$ berühren (von denen $x$ Be-

beide Limites wären voneinander verschieden (der rechte Limes jedenfalls leer), wenn man die mehrdeutige Abbildung stillschweigend an der Stelle $\omega_{\mathfrak{A}}$ als durch $\varphi(\omega_{\mathfrak{A}}) = O$ leere Menge „definiert" ansähe.

60) Haupt-Aumann-Pauc [16, p. 201]: unterhalb stetig im Sinne des Enthaltenseins; Choquet [11, p. 71]: semi-continue inférieurement.

61) Wegen der Symmetrie der Äquivalenz (8) braucht man nur eine Pfeilrichtung zu verifizieren.

62) Choquet [11, p. 61]: la grille associée au filtre $\mathfrak{A}$; Nöbeling [25, p. 22: das zu $\mathfrak{A}$ gehörige Gitter. Allgemeines über die Verzahnung bei J. Schmidt [28, p. 216 ff.].

63) J. Schmidt [29, p. 275].

rührungspunkt); wir nennen $\mathfrak{A}^*$ daher den *Berührungsraster* von $x$[64]). Per definitionem ist nun $\varphi^{-1}\mathfrak{B} * \mathfrak{A}$ mit $\varphi^{-1}\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}^*$ äquivalent und damit offenbar auch mit $\varphi^{-1}\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}^*$[65]). Ersetzt man also in (8) $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{A}^*$ und berücksichtigt man noch die Beziehung

$$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{A}^{**} \quad (9)$$

[66]),

so wird die Unterhalbstetigkeit (I) auf Grund von (8) mit

$$\varphi(\mathfrak{A}^*) * \mathfrak{B} \quad (X)$$

äquivalent. Oder, unter Verwendung der auf die Grundmenge $B$ bezogenen Verzahnung $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{B}$, mit

$$\varphi(\mathfrak{A}^*) \subseteq \mathfrak{B}^*. \quad (XI)$$

Ordnungstheoretische Bedeutung von (XI): das Bild $\varphi A'$ einer jeden konfinalen Teilmenge $A'$ von $A$ ist eine konfinale Teilmenge von $B$; Abbildungen mit dieser Eigenschaft spielen — jedenfalls soweit sie außerdem eindeutig von sind — als *konfinale Abbildungen*[67]) eine entscheidende Rolle bei der Untersuchung gerichteter Mengen, genauer:

---

64) Der Berührungsraster eines Punktes $x$ ist also das duale Gegenstück zum Umgebungsfilter $\mathfrak{B}x$. Eine Menge mit einer Topologie versehen, heißt: jedem Element $x$ sei es seinen Umgebungsfilter, sei es seinen Berührungsraster zuzuordnen — das sind im wesentlichen die beiden klassischen Begründungen der mengentheoretischen Topologie nach Hausdorff (Umgebungen) und Kuratowski (Berührung Punkt-Menge), und aus der Dualität Filter-Raster fließt auch die Beziehung zwischen diesen beiden Axiomatiken. Im wesentlichen dadurch, daß man nicht nur jedem Element, sondern jeder beliebigen Teilmenge des Raumes ihren Berührungsraster zuordnet (Berührung Menge-Menge), gelangt man mit Jefremovitch und Smirnov zu ihren „infinitesimalen Räumen" (Berührungs-, Nachbarschaftsräumen, — deutsche Terminologie noch nicht entwickelt), welche eine mittlere Stellung einnehmen zwischen topologischen und A. Weil-Bourbakis uniformen Räumen und zu dem gleichen Zweck erfunden worden sind wie letztere, nämlich zur axiomatischen Begründung einer Theorie der gleichmäßigen Stetigkeit. Zu dieser Theorie von Jefremovitch und Smirnov gibt es nun gleichfalls den (anscheinend bisher nicht benutzten) dualen Zugang: man ordne jeder Teilmenge ihren Umgebungsfilter zu.

65) Weil $\mathfrak{A}^*$ aufsteigend ist, siehe Fußnote 12.

66) $\mathfrak{A}^{**}$ ist sogar das im Sinne der mengentheoretischen Inklusion größte Mengensystem über $A$, das ebenso fein ist wie $\mathfrak{A}$: die sog. aufsteigende Hülle von $\mathfrak{A}$, das kleinste aufsteigende Mengensystem (über $A$), das $\mathfrak{A}$ umfaßt; siehe J. Schmidt [28, p. 218, Satz 2, Kor. 1].

67) J. Schmidt [29, p. 277], ohne Bezeichnung bei Colmez [12, p. 129, (2. 9) sowie p. 127, (1. 4)], als „divergente" Abbildungen bei Sakakihara [26, p. 1]. Die Äquivalenz der beiden zueinander dualen Fassungen der Unterhalbstetigkeit, (I) und (XI), in entsprechend eingekleideter Form schon bei Inagaki [17, § 1, Theorem 11] und J. Schmidt [29, Satz 1].

in der auf Tukey zurückgehenden Theorie der Konfinalitätstypen gerichteter Mengen[68]).

Entsprechend der — auf Grund von (8) äquivalenten Umformung von (I) in (X) wird man nun auch die allgemeine Grenzwertdefinition (7), nicht weniger kurz, folgendermaßen formulieren können:

(10) $$x \in \mathrm{Lim}_{\mathfrak{A}}\, \varphi \leftrightarrow \mathfrak{B} x * \varphi(\mathfrak{A}^*).$$

Oder, wenn man will, auch

(11) $$x \in \mathrm{Lim}_{\mathfrak{A}}\, \varphi \leftrightarrow \mathfrak{B} x \succ \varphi(\mathfrak{A}^*)^*$$

(wobei sich der innere Stern auf die erste Grundmenge $A$, den Indexbereich, der äußere Stern auf die zweite Grundmenge $B$, den betrachteten topologischen Raum, bezieht). Erst bei eindeutigem $\varphi$ von aber ist der Übergang zum Bildsystem mit dem zur Verzahnung vertauschbar, geht — unter Berücksichtigung von (9) und (4) — (11) in die klassische — aber eben nur für eindeutiges $\varphi$ von zuständige — Cauchysche Grenzwertdefinition, die Zusammenfassung von (5) und (1),

(12) $$x \in \mathrm{Lim}_{\mathfrak{A}}\, \varphi \leftrightarrow \mathfrak{B} x \succ \varphi(\mathfrak{A})$$ über.

Was die Adhärenz anlangt, so bleiben die Definitionen (5) und (1) auch für beliebig mehrdeutiges $\varphi$ aus in Kraft:

(13) $$x \in \mathrm{Adh}_{\mathfrak{A}}\, \varphi \leftrightarrow \mathfrak{B} x * \varphi(\mathfrak{A});$$

zu dieser — (10), (11) entsprechenden — Formulierung existiert nun aber auch die auf Grund von (8) äquivalente — (7) entsprechende — „duale" Fassung

(14) $$x \in \mathrm{Adh}_{\mathfrak{A}}\, \varphi \leftrightarrow \varphi^{-1}(\mathfrak{B} x) * \mathfrak{A}.$$

Die Kurzformulierungen (10), (11), (12), (13) — gegenüber den üblichen komplizierten Definitionen zweifellos technische Verbesserungen in Richtung auf einen Kalkül nicht nur der Punkt-, sondern auch der Mengenfolgen[69]) — setzen es besonders drastisch in Evidenz: daß Limes und Adhärenz einer Punktfolge $(\varphi, \mathfrak{A})$ ($\varphi$ eindeutig von) nur die Kenntnis eines einzigen Mengensystems, des Bildsystems $\varphi(\mathfrak{A})$, voraussetzen, Limes und Adhärenz einer beliebigen Mengenfolge ($\varphi$ mehrdeutig aus) hingegen die zweier Mengensysteme, der Bildsysteme $\varphi(\mathfrak{A})$ und $\varphi(\mathfrak{A}^*)$.

68) Tukey [31, Chap. II], Day [13, p. 190] und [14, insbesondere §§ 2, 3], Colmez [12, Introduction, § 2], Funayama [15], Inagaki [17, § 1], Sakakihara [26, § 2], J. Schmidt [29, insbesondere § 1]. In diesen Arbeiten treten — nach dem Vorbild von Tukey — die konfinalen Abbildungen meist nur in der Paarung mit einem ihrer „hinteren Supporte" (Day [14, p. 203], J. Schmidt [29, p. 276]), mit einer „terminalen" Abbildung (J. Schmidt [29, p. 277]) auf.

69) Hierin möchten wir eine Rechtfertigung für den in [28] aufgebauten Apparat der Verzahnung erblicken.

## Literatur.


[1] L. Alaoglu und G. Birkhoff, General ergodic theorems. Ann. of Math. **41**, 239 — 309 (1940).

[2] R. Arens, Note on convergence in topology. Math. Mag. **23**, 229—234 (1950).

[3] B. H. Arnold, Birkhoff's problem 20. Ann. of Math. **54**, 319—324 (1951).

[4] G. Aumann, Reelle Funktionen. Berlin 1954.

[5] R. G. Bartle, Nets and filters in topology. Amer. math. Monthly **62**, 551—557 (1955).

[6] A. A. Bennett, Generalized convergence with binary relations. Amer. math. Monthly **32**, 131—134 (1925).

[7] G. Birkhoff, Moore-Smith convergence in general topology. Ann. of Math. **38**, 39—56 (1937).

[8] —, Lattice theory. 2. Aufl., New York 1948.

[9] N. Bourbaki, Topologie générale. Chap. I—II. Actual. sci. industr., 1. Aufl., **858** (1940).

[10] G. Bruns und J. Schmidt, Zur Äquivalenz von Moore-Smith-Folgen und Filtern. Math. Nachr. **13**, 169—186 (1955).

[11] G. Choquet, Convergences. Ann. Univ. Grenoble **23**, 57—112 (1948).

[12] J. Colmez, Sur divers problèmes concernant les espaces topologiques. Portugaliae Math. **6**, 119—244 (1947).

[13] M. M. Day, Convergence, closure and neighborhoods. Duke math. J. **11**, 181—199 (1944).

[14] —, Oriented systems. Duke math. J. **11**, 201—229 (1944).

[15] N. Funayama, On directed systems. I. Bull. Yamagata Univ. (Nat. Sci.) **1**, 1—4 (1950).

[16] O. Haupt, G. Aumann und C. Pauc, Differential- und Integralrechnung. I. 2. Aufl., Berlin 1948.

[17] T. Inagaki, Contribution à la topologie. Math. J. Okayama Univ. **1**, 129—166 (1952).

[18] J. L. Kelley, Convergence in topology. Duke math. J. **17**, 277—283 (1950).

[19] —, General topology. New York 1955.

[20] E. J. McShane, Partial orderings and Moore-Smith limits. Amer. math. Monthly **59**, 1—11 (1952).

[21] —, Order-preserving maps and integration processes. Princeton 1953.

[22] —, A theory of convergence. Canadian J. Math. **6**, 161—168 (1954).

[23] E. H. Moore und R. W. Barnard, General Analysis. Mem. amer. phil. Soc. I, Teil II, 1939.

[24] G. Nöbeling, Über eine Verallgemeinerung des Folgenbegriffes. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München **1950**, 133—141.

[25] —, Grundlagen der analytischen Topologie. Berlin 1954.

[26] K. Sakakihara, The structure of neighbourhood systems and the types of convergences. J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., Ser. A **4**, 1—7 (1953).

[27] J. Schmidt, Beiträge zur Filtertheorie. I. Math. Nachr. **7**, 359—378 (1952).

[28] —, Beiträge zur Filtertheorie. II. Math. Nachr. **10**, 197—231 (1953).

[29] —, Konfinalität. Z. math. Logik Grundl. Math. **1**, 271—303 (1955).

[30] M. F. Smiley, Filters and equivalent nets. Amer. math. Monthly **64**, 336—338 (1957).

[31] J. W. Tukey, Convergence and uniformity in topology. Princeton 1940.


(Eingegangen: 9. 9. 1959.)