Werk

Titel: Aufgaben und Lösungen.

Jahr: 1941

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?37721857X_0051|log23

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Aufgaben und Lösungen.

Aufgaben.

301. Es sei F der Flächeninhalt eines Dreiecks ABC, L dessen Umfang und $D = \text{Min}\,(AP + BP + CP)$ für den veränderlichen Punkt P; entsprechende Bezeichnungen mögen für ein konvexes Viereck $ABCD$ gelten. Dann folgt die isoperimetrische Ungleichung für das Dreieck bzw. Viereck sofort aus den folgenden für D geltenden Ungleichungen. Es ist

$$12\sqrt{3}\cdot F \leqq 3D^2 \leqq L^2 \text{ für das Dreieck,}$$

$$16F \leqq 8F\left(1 + \frac{1}{\sin\alpha}\right) \leqq D^2(1 + \sin\alpha) \leqq L^2 \text{ für das Viereck,}$$

wo α den Winkel zwischen den Diagonalen bezeichnet.

Frankfurt a. M. H. TOEPKEN.

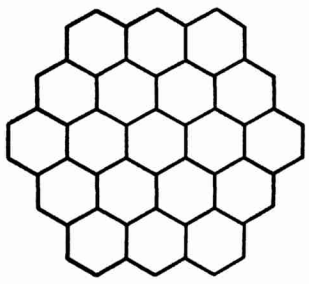
(Eingegangen am 12. 4. 1940.)

302. $f(x)$ sei ein Polynom n-ten Grades mit ganzen rationalen Koeffizienten. Stellt $f(x)$ für $2n + 1$ verschiedene ganze rationale Werte von x Primzahlen dar, so ist $f(x)$ irreduzibel. Man zeige durch ein Beispiel, daß die Schranke $2n + 1$ nicht erniedrigt werden kann.

Hamburg. A. NOACK.

(Eingegangen am 22. 10. 1940.)

303. 1. In die nebenstehende Figur sind die Zahlen von -9 bis $+9$ so einzutragen, daß die Summe über jede waagerechte und schräge Reihe 0 ist (15 Gleichungen).



2. Dasselbe ist für die aus 37 Feldern bestehende symmetrische Sechseckfigur mit der Kantenlänge 4 unter Verwendung der Zahlen von -18 bis $+18$ auszuführen; entsprechend für die allgemeine symmetrische Sechseckfigur mit der Kantenlänge n $(= 5, 6, \ldots)$.

Diese mit dem Fragenkomplex der „magischen Quadrate" verwandten Aufgaben unterscheiden sich von den letzteren im wesentlichen dadurch, daß hier jedes Feld auf 3 „magischen Zeilen" liegt, d. h. jede einzutragende Zahl 3 Bedingungen genügen muß. Bei einem „magischen Quadrat" unterliegen die Zahlen der Diagonalfelder je 3 Bedingungen, die übrigen nur je 2.

Jena. GEORG LOCKOT.

(Eingegangen am 9. 12. 1940.)

304. Es seien N und n ganze positive Zahlen mit $2N \geqq 3n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Die $2N$ Elemente l_i, $i = 1, 2, \ldots, 2N$, seien in n Klassen verteilt, so daß jede Klasse mindestens drei Elemente enthalte; ferner sei jedem l_i eindeutig ein l_k, $i, k = 1, 2, \ldots 2N$; $i \neq k$, zugeordnet, so daß l_k wieder l_i entspricht. Die l_i mögen die Vorzeichen $+$ und $-$ annehmen können, und es seien den l_i, $i = 1, 2, \ldots, 2N$, bestimmte Vorzeichen erteilt. Als erlaubt werde eine Vorzeichenänderung bezeichnet, wenn bei einem Vorzeichenwechsel von l_i das ihm zugeordnete l_k ebenfalls das Vorzeichen wechselt.

Es ist dann stets möglich, durch erlaubte Vorzeichenänderungen aus der ursprünglichen Vorzeichenbelegung eine solche abzuleiten, so daß in keiner Klasse sämtliche Elemente dasselbe Vorzeichen haben.

Frankfurt a. M. H. TOEPKEN.

(Eingegangen am 23. 4. 1941.)

305. Man beweise mittels Zyklographie folgenden Satz:

Ist Ω ein orthogonales Hyperboloid und bezeichnet α den Winkel zwischen seiner imaginären Achse und den (zu reellen zyklischen Ebenen normalen) Haupterzeugenden, so gibt es auf Ω nur dann reelle Flächenpunkte mit verschwindender mittlerer Krümmung, wenn

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \operatorname{tg} \alpha \leqq 1 \quad \text{ist.}$$

Für $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gibt es genau zwei solche Punkte; wo liegen sie?

Wien. J. KRAMES.

(Eingegangen am 8. 5. 1941.)

306. Mit Hilfe der *zyklographischen Abbildung* ist zu zeigen, daß die Grenzkurve für alle in derselben lotrechten Ebene von der gleichen Abschußstelle mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 im luftleeren Raum abgefeuerten Schüsse, jene Parabel ist, die aus der Bahnparabel des waagrechten Schusses durch lotrechte Aufwärtsschiebung um ihren Halbparameter $p = \frac{v_0^2}{g}$ ($g \ldots$ Erdbeschleunigung) entsteht.

Wien. A. REUSCHEL.

(Eingegangen am 9. 5. 1941.)

307. Eine verallgemeinerte ebene Parallelströmung oder eine Schar verallgemeinerter Parallelkurven ist dadurch charakterisiert, daß die Stromlinien auf den orthogonalen Trajektorien proportionale (und nicht wie bei den gewöhnlichen Parallelkurven gleichlange) Stücke ausschneiden. Beispielsweise ist eine ebene Radialströmung (außer im Quellpunkt) eine verallgemeinerte Parallelströmung. Man gebe Bedingungen für die Uferkurven C_0 und C_1 an, zwischen denen eine verallgemeinerte Parallelströmung fließen kann. Wenn C_0 die x-Achse eines kartesischen Koordinatensystems

ist und C_1 mit horizontaler Tangente durch den Punkt $y = 1$ geht, welche Bedingung muß dann die Krümmung von C_1 in diesem Punkte erfüllen? Man zeige, daß die orthogonalen Trajektorien keine Wendepunkte haben.

Braunschweig. A. BUSEMANN.

(Eingegangen am 14. 5. 1941.)

308. Für eine ungerade Primzahl p ist die Diskriminante des Polynoms

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \binom{\frac{p-1}{2}}{i}^2 x^i = f_p(x)$$

nicht durch p teilbar.

z. Z. Potsdam-Babelsberg. M. DEURING.

(Eingegangen am 22. 2. 1941.)

Lösungen.

Lösung der Aufgabe 274. (Dieser Jahresbericht 49 (1939), S. 1.)

Die Aufgabe lautete:

Eine elementare kombinatorisch-topologische Aufgabe, deren Lösung für eine einfache Begründung der Uniformisierungstheorie von großer Bedeutung ist.

Gegeben sei eine zusammenhängende Fläche, bestehend aus unendlich vielen Dreiecken, derart, daß jede Kante genau zwei Dreiecke und jede Ecke einen einzigen geschlossenen Kranz von Dreiecken trägt. Die Fläche sei einfach zusammenhängend in dem Sinne, daß jeder geschlossene Kantenzug ein (aus endlich vielen Dreiecken bestehendes) Stück der Fläche berandet. Zu beweisen, daß die Dreiecke sich so numerieren lassen: $\triangle_1, \triangle_2, \ldots$, daß jedes $\triangle_k$ mit der Vereinigung der Vorangehenden eine Kante oder zwei Kanten (aber *nicht* eine Kante und die gegenüberliegende Ecke) gemeinsam hat.

Leipzig. B. L. VAN DER WAERDEN.

Lösung:

Ich behaupte zunächst: Ist Π_n eine Menge von n Dreiecken der Fläche, die ein einfach zusammenhängendes Stück bilden und schon in der vorgeschriebenen Weise numeriert sind, so kann ich ein weiteres Dreieck $\triangle_{n+1}$ so finden, daß $\triangle_{n+1} + \Pi_n$ ein Π_{n+1} mit den gleichen Eigenschaften ist.

Beweis: $\triangle$ sei ein beliebiges Dreieck der Fläche, das nicht zu Π_n gehört, aber an Π_n angrenzt. Dann sind wegen des einfachen Zusammenhanges von Π_n nur folgende drei Fälle für $\triangle$ zu unterscheiden:

1. $\triangle$ hat genau zwei Seiten mit Π_n gemeinsam.

2. $\triangle$ hat genau eine Seite mit Π_n gemeinsam und nicht auch noch die gegenüberliegende Ecke.

3. $\triangle$ hat genau eine Seite und deren gegenüberliegende Ecke ε mit Π_n gemeinsam.

In den beiden ersten Fällen kann ich offenbar $\triangle_{n+1} = \triangle$ nehmen.

Nun der dritte Fall: Von ε aus kann ich zwei geschlossene Kantenzüge legen, die mit je einer Seite von $\triangle$ beginnen und zusammen den Rand von $\Pi_n + \triangle$ bilden. Sie haben beide keine Doppelpunkte, umschließen also einfach zusammenhängende Stücke Π' und Π'' der Fläche. Π' und Π'' können nicht nur ε gemeinsam haben, denn: $\triangle$ würde sonst weder in Π' noch in Π'' liegen, weil seine beiden an ε stoßenden Seiten auf den Rändern von Π' und Π'' liegen. Läßt man diese beiden $\triangle$-Seiten weg und ersetzt sie durch die dritte Seite, so würde $\Pi' + \Pi'' + \triangle$ entstehen. Andererseits erhält man so aber auch Π_n, und das ist ein Widerspruch. Da also Π' und Π'' mehr als nur ε gemeinsam haben, da sie weiter einfach zusammenhängend sind und ihre Ränder nur ε gemeinsam haben, muß eines der beiden Polygone im anderen enthalten sein, etwa $\Pi' \subset \Pi''$. Dann ist auch $\Pi'' \supset \Pi_n + \triangle$; denn weil Π' Seiten mit $\triangle$ und Π_n gemeinsam hat, müssen $\triangle$ und ein Teil von Π_n in Π'' liegen. Dann muß aber auch Π_n selbst in Π'' liegen, denn sonst würde Π_n durch ein Randstück von Π'' zerschnitten, was nicht der Fall ist. Aus ganz entsprechendem Grunde liegt $\Pi_n + \triangle$ ganz außerhalb von Π'. Wegen der Aufteilung des Randes von $\Pi_n + \triangle$ auf die Ränder von Π' und Π'' folgt aber nun $\Pi'' = \Pi' + \Pi_n + \triangle$. Das kann man auch so ausdrücken: Π_n und $\triangle$ umschließen ein Loch Λ $(= \Pi')$.

Als Länge von Λ bezeichne ich die (endliche) Zahl der an Π_n angrenzenden Seiten von Λ. Es sei nun $\triangle'$ ein an Π_n angrenzendes Dreieck in Λ. Liegt für $\triangle'$ Fall 1 oder Fall 2 vor, so kann ich $\triangle_{n+1} = \triangle'$ nehmen. Andernfalls umschließen $\triangle'$ und Π_n ein Loch Λ', dessen Länge aber nun kleiner ist als die von Λ. Da diese Längen natürliche Zahlen sind, komme ich nach endlich vielen solchen Schritten schließlich zu einem Dreieck $\triangle^{(h)}$, das ich als $\triangle_{n+1}$ verwenden kann, womit die obige Behauptung bewiesen ist.

Nehme ich also als Π_1 ein beliebiges Dreieck $\triangle_1$ der Fläche, so kann ich nach dem soeben angegebenen Verfahren eine Folge $\Pi_2, \Pi_3, \ldots$ konstruieren, und die dabei auftretenden Dreiecke $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3, \ldots$ bilden eine Folge der geforderten Art. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß jedes Dreieck der Fläche in diese Folge aufgenommen werden kann. Soll nämlich zunächst das Dreieck $\triangle$ (aus Fall 3) in dieser Folge auftreten, so fülle man die zu $\triangle^{(h-1)}, \triangle^{(h-2)}, \ldots, \triangle', \triangle$ gehörenden Löcher der Reihe nach aus (immer den Vorschriften für die Fälle 1—3 folgend) und füge dann $\triangle$ hinzu (Fall 1). Soll nun ein beliebiges Dreieck der Fläche in die Folge aufgenommen werden, so verbinde ich es mit einem Π_n durch eine Kette von endlich vielen Dreiecken, so daß immer zwei Nachbarglieder der Kette eine Seite gemeinsam haben, und nehme nun die Glieder der Kette (ebenso wie oben $\triangle$) der Reihe nach in die Folge auf.

Leipzig. H. REICHARDT.

(Eingegangen am 22. 7. 1939.)

Zur Lösung der Aufgabe 279. (Dieser Jahresbericht 49 (1939) S. *63*.)

Eine Lösung dieser Aufgabe wurde in Heft 1. S. 6 (1941) dieses Jahresberichts veröffentlicht. Infolge eines Versehens ist die Bekanntgabe unterblieben, daß für diese Aufgabe auch von den Herren F. Gruber, Wien, H. Voderberg, Stettin, H. Worm, Langebrück, richtige Lösungen eingesandt wurden.

Lösung der Aufgabe 280. (Dieser Jahresbericht 50 (1940), S. 1.)

Die Aufgabe lautete:

Welchen Bedingungen muß die ganze rationale Zahl r genügen, damit daß Gleichungspaar

$$x^2 + y^2 = u^2;$$

$$x^2 + r \cdot y^2 = v^2$$

rational lösbar ist?

Neiße. LANGER.

Lösung:

Das Gleichungspaar $x^2 + y^2 = u^2$; $x^2 + r \cdot y^2 = v^2$.

§ 1. Es sei r eine positive ganze Zahl, größer als eins, die keinen quadratischen Faktor außer eins enthält; und es soll untersucht werden, wann das Gleichungspaar

(A) $$x^2 + y^2 = u^2;\ x^2 + r \cdot y^2 = v^2$$

rational lösbar ist.

Da zugleich mit x, y auch $t \cdot x$, $t \cdot y$ Lösungen von (A) sind, darf ich x und y teilerfremd voraussetzen.

Aus der ersten der beiden Gleichungen (A) folgt nun

$$\pm x = \frac{k}{2}(m^2 - n^2);\ y = k \cdot m \cdot n \text{ mit } (m, n) = 1$$

und $m + n \equiv 1 \bmod 2$; $k = 2$. x ungerade; y gerade

oder $m \equiv n \equiv 1 \bmod 2$; $k = 1$. x gerade; y ungerade.

Aus der zweiten Gleichung (A) erhalte ich

$$r \cdot y^2 = v^2 - x^2 = (v + x) \cdot (v - x).$$

Ich zerlege $r = f \cdot g$; da r keinen quadratischen Faktor enthält, ist $(f, g) = 1$. Ich setze an

$$y = a \cdot b \cdot c;\quad v + x = f \cdot a^2 \cdot c;\quad v - x = g \cdot b^2 \cdot c,$$

also $$2 \cdot x = c \cdot (f \cdot a^2 - g \cdot b^2);\quad y = a \cdot b \cdot c.$$

Wenn y gerade ist, folgt aus $(x, y) = 1$ $(2 \cdot x, y) = 2$; also $(a, b) = 1$; $c = 1$ oder 2.

Falls $c = 2$ ist $x = f \cdot a^2 - g \cdot b^2$; $y = 2 \cdot a\, b$, mit $(a, b) = 1$.

Falls $c = 1$ ist $2 \cdot x = f \cdot a^2 - g \cdot b^2$; $y = a \cdot b$.

Da y gerade ist, ist einer der beiden Faktoren a, b gerade, der andere wegen $(a, b) = 1$ ungerade. Ich setze z. B. $a = 2 \cdot a'$; b ungerade und erhalte $x = 2 \cdot f \cdot a'^2 - \frac{g}{2} b^2$; $y = 2 \cdot a' \cdot b$. Damit x ganzzahlig ist, muß

also g gerade sein. $2f \cdot \frac{g}{2} = r$ ist also eine andere ganzzahlige Faktorenzerlegung, und ich erhalte für gerades y stets die Lösung:

$$x = f \cdot a^2 - g \cdot b^2; \quad y = 2 \cdot ab \text{ mit } (a, b) = 1.$$

Im Falle eines ungeraden y folgt $r \equiv v^2 \bmod 4$; da r keinen quadratischen Faktor enthält, ist es ungerade. f und g sind dann beide sicher ungerade. Es ist $(2x, y) = 1$; also $c = 1$. Somit ergibt sich $x = \frac{f \cdot a^2 - g \cdot b^2}{2}$; $y = a \cdot b$ mit $(a, b) = 1$. Damit x ganzzahlig ist, muß $a \equiv b \equiv 1 \bmod 2$ sein.

Wir erhalten mithin stets als Lösung von (A):

$$x = \frac{k}{2}(m^2 - n^2) = \frac{k}{2}(f \cdot a^2 - g \cdot b^2)$$

$$y = k \cdot m \cdot n = k \cdot a \cdot b$$

mit $(m, n) = (a, b) = 1$ und

$$\text{im Falle } k = 2\text{: } m + n \equiv a + b \equiv 1 \bmod 2$$

$$\text{im Falle } k = 1\text{: } m \equiv n \equiv a \equiv b \equiv 1 \bmod 2.$$

§ 2. Ich berechne die Größen m, n, a, b. Aus $m \cdot n = a \cdot b$ und $(m, n) = (a, b) = 1$ folgt $m = A \cdot C$; $n = B \cdot D$; $a = A \cdot D$; $b = B \cdot C$; die Größen A, B, C, D sind paarweise teilerfremd. Setze ich diese Werte in die Gleichung

$$(m^2 - n^2) = f \cdot a^2 - g \cdot b^2$$

ein und forme ich um, so erhalte ich

$$\frac{f \cdot A^2 + B^2}{A^2 + g \cdot B^2} = \frac{C^2}{D^2}.$$

C und D sind teilerfremd. Da

$$f \cdot (A^2 + g \cdot B^2) - (f \cdot A^2 + B^2) = (r - 1) \cdot B^2$$

und

$$g \cdot (f \cdot A^2 + B^2) - (A^2 + g \cdot B^2) = (r - 1) \cdot A^2$$

und $(A, B) = 1$ ist, läßt sich der linke Bruch nur durch einen Faktor s kürzen, der Teiler von $(r - 1)$ ist. Wir erhalten:

$$f \cdot A^2 + B^2 = s \cdot C^2$$

$$A^2 + g \cdot B^2 = s \cdot D^2.$$

Ergebnis: Kann ich nun nachweisen, daß das Gleichungspaar

$$\text{(B)} \qquad f \cdot A^2 + B^2 = s \cdot C^2; \quad A^2 + g \cdot B^2 = s \cdot D^2$$

$$r = f \cdot g; \quad s \text{ ein Teiler von } (r - 1)$$

für keinen der Fälle rational lösbar ist, in denen $s \neq 1$ oder in denen $s = 1$, aber beide Größen f und g von eins verschieden sind, so ist nach der descente infinie das Gleichungspaar (A) rational nicht lösbar.

Finde ich eine Lösung A, B, C, D der Gleichungen (B), so erhalte ich eine Lösung des Gleichungspaares (A) durch

(C) $$m = A \cdot C; \quad n = B \cdot D$$
$$x = \frac{k}{2}(m^2 - n^2); \quad y = k \cdot m \cdot n$$

mit $k = 2$ bei $m + n \equiv 1 \bmod 2$; $k = 1$ bei $m \equiv n \equiv 1$ mod. 2.

Habe ich von (A) eine Lösung x_0, y_0, u_0, v_0 gefunden, so bekomme ich eine weitere Lösung, indem ich in (C) setze

$$A = x_0; \quad B = y_0; \quad C = u_0; \quad D = v_0$$

und so fort unendlich viele.

§ 3. Sonderfälle:

1. $$r = 2; \quad x^2 + y^2 = u^2; \quad x^2 + 2 \cdot y^2 = v^2.$$

Es ist $r = 2$; also f oder $g = 1$; s ist ein Teiler von $(2 - 1) = 1$. Das Gleichungspaar ist nicht lösbar.

2. $$r = 3; \quad x^2 + y^2 = u^2; \quad x^2 + 3 \cdot y^2 = v^2.$$

In Betracht kommt nur $s = 2$; $A^2 + B^2 = 2 \cdot C^2$; $A^2 + 3 \cdot B^2 = 2 \cdot D^2$. Aus $(A, B) = 1$ folgt aus der 1. Gleichung, daß A und B beide ungerade sind. Die 2. Gleichung ergibt $2 \cdot D^2 \equiv 1 + 3 \bmod 8$; also $D^2 \equiv 2 \bmod 4$. Diese Kongruenz ist unlösbar, und somit auch das Gleichungspaar.

3. $$r = 5; \quad x^2 + y^2 = u^2; \quad x^2 + 5 \cdot y^2 = v^2.$$
$$s = 2; 4; \quad A^2 + B^2 = s \cdot C^2; \quad A^2 + 5 \cdot B^2 = s \cdot D^2.$$

Aus $A^2 + B^2 \equiv 0$ folgt $A \equiv B \equiv 1 \bmod 2$ und daraus die beiden unmöglichen Kongruenzen

$$2 \cdot D^2 \equiv 6 \bmod 8; \quad D^2 \equiv 3 \bmod 4$$

oder

$$4 \cdot D^2 \equiv 6 \bmod 8; \quad 2 \cdot D^2 \equiv 3 \bmod 4.$$

4. $$r = 6; \quad x^2 + y^2 = u^2; \quad x^2 + 6 \cdot y^2 = v^2.$$

Es ergeben sich die Gleichungen:

a) $$A^2 + B^2 = 5 \cdot C^2; \quad A^2 + 6 \cdot B^2 = 5 \cdot D^2.$$

Es folgt $A^2 \equiv 2 \cdot D^2 \bmod 3$; d. h. $A \equiv D \equiv 0 \bmod 3$ $g \cdot d \cdot V \cdot (A, D) = 1$.

b) $$A^2 + 3 \cdot B^2 = C^2; \quad 2 \cdot A^2 + B^2 = D^2.$$

Es folgt $5 \cdot A^2 = 3 \cdot D^2 - C^2$; mithin $C \equiv D \equiv 0 \bmod 5$ g. d. V. $(C, D) = 1$.

c) $$A^2 + 3 \cdot B^2 = 5 \cdot C^2; \quad 2 \cdot A^2 + B^2 = 5 \cdot D^2.$$

Aus $A^2 \equiv 2 \cdot C^2 \bmod 3$ folgt wieder $A \equiv C \equiv 0 \bmod 3$ g. d. V. $(A, C) = 1$.

5. $$r = 7; \quad x^2 + y^2 = u^2; \quad x^2 + 7 \cdot y^2 = v^2.$$

Setze ich $s = 2$, so erhalte ich $A^2 + B^2 = 2 \cdot C^2$; $A^2 + 7 \cdot B^2 = 2 \cdot D^2$ mit den leicht ersichtlichen Lösungen $A = B = C = 1$; $D = 2$; also $m = 1$; $n = 2$; $x = 3$; $y = 4$. Und es ist

$$3^2 + 4^2 = 5^2; \quad 3^2 + 7 \cdot 4^2 = 11^2.$$

Setze ich nun $A = 3$; $B = 4$; $C = 5$; $D = 11$, so ist $m = 15$; $n = 44$; $x = 1711$; $y = 1320$.

$$1711^2 + 1320^2 = 2161^2; \quad 1711^2 + 7 \cdot 1320^2 = 3889^2.$$

6. $$r = 10; \quad x^2 + y^2 = u^2; \quad x^2 + 10 \cdot y^2 = v^2.$$

Hier liefert $f = 2$; $g = 5$; $s = 9$ die Gleichungen $2 \cdot A^2 + B^2 = 9 \cdot C^2$; $A^2 + 5 \cdot B^2 = 9 \cdot D^2$ mit den Lösungen $A = 2$; $B = 1$; $C = D = 1$; also $m = 2$; $n = 1$; $x = 3$; $y = 4$.

$$3^2 + 4^2 = 5^2; \quad 3^2 + 10 \cdot 4^2 = 13^2.$$

Neiße. LANGER.

(Eingegangen am 27. 7. 1939.)

Lösung der Aufgabe 281. (Dieser Jahresbericht 50 (1940), S. 1.)

Die Aufgabe lautete:

Die Funktion

$$F(k, l, x) = \prod_{1}^{l} \frac{x^{k-\lambda+1} - 1}{x^{\lambda} - 1}; \quad 0 < l \leqq k = 1, 2, 3, \ldots$$

ist eine ganze algebraische Funktion.

Graz. R. LAUFFER.

1. Lösung:

Der Nenner enthält nur Linearfaktoren der Form $x - e^{\frac{2m\pi i}{n}}$ $((m, n) = 1)$, und zwar tritt ein solcher Faktor am Nenner $\left[\frac{l}{n}\right]$ mal, am Zähler $\left[\frac{k}{n}\right] - \left[\frac{k-l}{n}\right]$ mal auf, woraus wegen $\left[\frac{k}{n}\right] \geqq \left[\frac{l}{n}\right] + \left[\frac{k-l}{n}\right]$ die Behauptung folgt.

Leipzig. H. REICHARDT.

(Eingegangen am 25. 6. 1940.)

2. Lösung:

Für $l = 1$ und $l = k$ ist die Behauptung klar; die übrigen Fälle erledigt man mit Hilfe der Rekursionsformel

$$F(k+1, l+1, x) = x^{k-l} F(k, l, x) + F(k, l+1, x) \quad (k \geqq 2, 0 < l < k)$$

durch Induktion über k. Zur Aufgabe und zum Beweis vgl. die von Gauß (Werke III, S. 461/462) durch Induktion über n bewiesene Identität

$$1 + \frac{a^n - 1}{a - 1} t + \frac{a^n - 1 \cdot a^n - a}{a - 1 \cdot aa - 1} tt + \frac{a^n - 1 \cdot a^n - a \cdot a^n - aa}{a - 1 \cdot aa - 1 \cdot a^3 - 1} t^3 + \cdots$$

$$= (1 + t)(1 + at)(1 + aat) \ldots (1 + a^{n-1}t).$$

Berlin. A. STÖHR.

(Eingegangen am 25. 6. 1940.)