# Aufgaben und Lösungen.

## Aufgaben.

**245.** Eine eigentliche orthogonale Transformation in einem $2n$-dimensionalen Euklidischen Raum kann bekanntlich aus $n$ Drehungen in absolut senkrechten Ebenen mit den Drehwinkeln $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ zusammengesetzt werden. Im Fall von $2n+1$ Dimensionen kann eine uneigentliche orthogonale Transformation aus $n$ Drehungen derselben Art und einer Spiegelung zusammengesetzt werden. Man erhält nun spezielle derartige orthogonale Transformationen, wenn man $m$ Spiegelungen an Hyperebenen hintereinander ausführt, wobei $m = 2n$ bzw. $m = 2n+1$ die Dimensionszahl sei. Der cosinus des (inneren) Winkels zwischen der $i$ten und der $k$ten Hyperebene sei mit $c_{ik}$ bezeichnet. Unter welchen Bedingungen sind $\pm \cos \frac{\xi_1}{2}, \pm \cos \frac{\xi_2}{2}, \ldots, \pm \cos \frac{\xi_n}{2}$ (und 0 im Fall $m = 2n+1$) die Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} x & c_{12} & \ldots & c_{1m} \\ c_{21} & x & \ldots & c_{2m} \\ \vdots & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & x \end{vmatrix} = 0?$$

Toronto (Canada) H. S. M. Coxeter.

(Eingegangen am 7. 12. 1936.)

**246.** Man gewinne die Koeffizienten der logarithmischen Potenzreihe unmittelbar aus der Umkehrung der Exponentialreihe durch Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten[1]; ferner entsprechend die Entwicklungskoeffizienten des bei $x = 0$ regulären Umkehrelements von $x = ye^{-y}$.[2])

Jena. Hermann Schmidt.

(Eingegangen am 11. 2. 1937.)

**247.** $\mathfrak{J}$ bezeichne das offene Intervall $(0, 1)$, $\bar{\mathfrak{J}}$ das abgeschlossene. Es sei $g(x)$ in $\bar{\mathfrak{J}}$ stetig und positiv, an der Stelle $x = 1$ analytisch; ferner nehme $f(x) = (1-x)^\alpha g(x)$ auf $\mathfrak{J}$ monoton ab ($\alpha \geqq 0$); falls $\alpha = 0$, möge $f(1) < 1$ sein. Man soll die in $\mathfrak{J}$ gelegene Lösung von

(A) $$x^n = f(x)$$

für $n \to \infty$ asymptotisch entwickeln ($n > 0$, nicht notwendig ganz). Beispiele: $x^n = 1 - x$; $x^{n+1} = \sin \pi x$.

Jena. Hermann Schmidt.

(Eingegangen am 11. 2. 1937).

---

1) Angeregt durch eine Bemerkung bei Knopp, Unendliche Reihen, 3. Aufl., 217, Z. 13—11 v. u.

2) Sonst gewöhnlich funktionentheoretisch bestimmt, vgl. z. B. Hurwitz-Courant, Funktionentheorie, 3. Aufl. (1929), 141, 142; Perron, Math. Ann. 113 (1936), 301.

**248.** Gegeben die ganze Funktion $f(w) = we^w$. Man gebe konvergente und zugleich asymptotische Reihenentwicklungen

a) für die Umkehrfunktion in der (gewundenen) Umgebung der logarithmischen Stelle $\infty$,

b) für die $a$-Stellen großen Betrags, wo $a$ irgendein endlicher komplexer Wert $\neq 0$ sei.[1])

Jena. HERMANN SCHMIDT.

(Eingegangen am 11. 2. 1937.)

**249.** Es gibt Körper neunten Grades, die relativ unverzweigte Normalkörper vom Grade 81 besitzen und eine Diskriminante, die zugleich Diskriminante eines Kreiskörpers neunten Grades ist.

Kiel. ARNOLD SCHOLZ.

(Eingegangen am 22. 3. 1937.)

**250.** Es sind alle Lösungen der diophantischen Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + w^2$$

$$x^4 + y^4 + z^4 = u^4 + v^4 + w^4$$

in Parameterform zu geben unter den Nebenbedingungen

$$x = y + z;\; u = v + w.$$

Neiße (OS.). LANGER.

(Eingegangen am 13. 4. 1937.)

**251.** In der Ebene Euklids sei $\mathfrak{C}$ eine geschlossene und streckbare (= rektifizierbare) Linie, die mit einem Umlaufsinn versehen ist und mehrfache Punkte haben kann. $\mathfrak{G}$ sei eine gerichtete Gerade dieser Ebene. Ein Schnittpunkt von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{C}$, in dem $\mathfrak{C}$ die Gerade $\mathfrak{G}$ von rechts nach links (von links nach rechts) überschreitet, soll Austrittspunkt (Eintrittspunkt) heißen. Sind $a_i, e_i$ die Koordinaten der Austritts- und Eintrittspunkte bezüglich eines beliebigen Ursprungs $\mathfrak{o}$ auf $\mathfrak{G}$, so nennen wir

$$(1) \qquad \sum a_i - \sum e_i = s(\mathfrak{G})$$

die Sehnenlänge von $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{G}$. $s$ hängt nicht von der Wahl von $\mathfrak{o}$ ab und bleibt erhalten, wenn man die Richtung von $\mathfrak{G}$ umkehrt.

Andrerseits sei $k(\mathfrak{X})$ Kroneckers Drehziffer von $\mathfrak{C}$ um einen Punkt $\mathfrak{X}$, d. h.

$$(2) \qquad k(\mathfrak{X}) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathfrak{C}} \dot{\varphi}$$

wenn $\varphi$ den Winkel einer festen Richtung mit der Richtung der Geraden bezeichnet, die von $\mathfrak{X}$ nach einem auf $\mathfrak{C}$ beweglichen Punkt $\mathfrak{Y}$ hinweist, und wenn $\mathfrak{Y}$ bei der Integration $\mathfrak{C}$ im vorgeschriebenen Umlaufsinn umläuft.

1) Für reelles $a$ eine erste Näherung bei Schürer, Leipz. Ber. 64 (1912), 207.

Dann gilt

$$F = \frac{1}{2\pi}\int s \dot{\mathfrak{G}} = \int k \dot{\mathfrak{X}}. \tag{3}$$

Die Integration links ist über alle gerichteten Geraden $\mathfrak{G}$ der Ebene zu erstrecken, $\dot{\mathfrak{G}}$ bedeutet die Geradendichte (vgl. etwa W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie I, 1936). Die Integration rechts ist über alle Punkte der Ebene zu erstrecken und $\dot{\mathfrak{X}}$ bedeutet die Punktdichte. $F$ kann als Flächeninhalt von $\mathfrak{C}$ erklärt werden.

Entsprechend sei im Euklidischen $R_3$ eine geschlossene (etwa stetig gekrümmte) und gerichtete Fläche $\mathfrak{F}$ gegeben, die mehrfache Linien haben kann. Die Ausrichtung (Orientierung) von $\mathfrak{F}$ läßt sich dann auf jede Schnittkurve von $\mathfrak{F}$ mit einer gerichteten Ebene $\mathfrak{E}$ übertragen. Es sei $s(\mathfrak{G})$ die durch (1) erklärte Sehnenlänge von $\mathfrak{F}$ mit einer Geraden $\mathfrak{G}$, $f(\mathfrak{E})$ die durch (3) erklärte Schnittfläche mit der gerichteten Ebene $\mathfrak{E}$ und $k(\mathfrak{X})$ die entsprechend zu (2) erklärte Drehziffer von $\mathfrak{F}$ bezüglich des Punktes $\mathfrak{X}$. Dann kann der Rauminhalt $V$ von $\mathfrak{F}$ durch drei gleichwertige Ausdrücke erklärt werden:

$$V = \frac{1}{4\pi}\int s(\mathfrak{G}) \cdot \dot{\mathfrak{G}} = \frac{1}{4\pi}\int f(\mathfrak{E}) \cdot \dot{\mathfrak{E}} = \int k(\mathfrak{X}) \cdot \dot{\mathfrak{X}}. \tag{4}$$

In (4) bedeutete $\dot{\mathfrak{G}}, \dot{\mathfrak{E}}$ Geraden- und Ebenendichte, $\dot{\mathfrak{X}}$ die Punktdichte im $R_3$. Vgl. meine Vorlesungen über Integralgeometrie II (1937), insbesondere § 30 (84), § 32 (98).

Hamburg. W. Blaschke.

(Eingegangen am 14. 4. 1937.)

**252.** Es sei $\mathfrak{k}$ ein algebraischer Zahlkörper endlichen Grades mit der Hauptordnung $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{K}$ ein Oberkörper von $\mathfrak{k}$, der bezüglich $\mathfrak{k}$ einen endlichen Relativgrad besitzt. Es werde gezeigt, daß $\mathfrak{K}$ stets dann und nur dann den absoluten Klassenkörper zu $\mathfrak{k}$ umfaßt, wenn er die Eigenschaft hat, daß alle seine Ideale als $\mathfrak{o}$-Moduln isomorph sind. Der absolute Klassenkörper zu $\mathfrak{k}$ läßt sich also charakterisieren als derjenige Körper $\mathfrak{K}$ mit den genannten Eigenschaften, der in allen übrigen enthalten ist.

Königsberg (Pr.). Hans Fitting.

(Eingegangen am 26. 5. 1937.)

**253.** Eine Kette $a_0, a_1, \ldots, a_r$ natürlicher Zahlen, beginnend mit $a_0 = 1$ und schließend mit $a_r = n$, heiße eine Additionskette der Zahl $n$, wenn für $\varrho > 0$ jedes $a_\varrho = a_\sigma + a_\tau$ $(0 \leqq \sigma, \tau < \varrho)$ darstellbar ist. Für $n = 666$ ist z.B.

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 24,\ 40,\ 80,\ 160,\ 320,\ 640,\ 664,\ 666$$

eine solche Kette mit $r = 12$, ebenso

$$1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18,\ 27,\ 54,\ 81,\ 162,\ 324,\ 648,\ 666.$$

(Immer muß $a_1 = 2$ und $a_2 = 3$ oder $4$ sein.)

Das minimale $l$, für das es eine Additionskette $a_0, a_1, \ldots, a_l = n$ gibt, heiße die Länge $l(n)$ von $n$. (Subtraktion sei nicht gestattet!)

Dann gelten folgende Abschätzungen:

(1) $$m + 1 \leqq l(n) \leqq 2m \quad \text{für} \quad 2^m + 1 \leqq n \leqq 2^{m+1},$$

(2) $$l(ab) \leqq l(a) + l(b).$$

In (1) gilt für $m > 2$ sogar $l(n) < 2m$, nämlich speziell

(3) $$l(2^{m+1} - 1) \leqq m + l(m).$$

Dies läßt vermuten, daß sich (1) allgemein besser nach oben abschätzen läßt.

Weitere Frage: Läßt sich die aus (1) folgende Abschätzung

(4) $$1 \leqq \limsup_{n \to \infty} \frac{\log 2}{\log n} l(n) \leqq 2$$

mit einfachen Hilfsmitteln verbessern?

Anwendungsmöglichkeit: Es soll die $n$-te Potenz eines Kongruenzrestes mit möglichst wenig Multiplikationen gebildet werden. Man kann dann ohne Multiplikationstabelle immer mit $l(n)$ Multiplikationen auskommen.

Kiel. ARNOLD SCHOLZ.

(Eingegangen am 29. 6. 1937.)

## Lösungen.

**Lösung der Aufgabe 84.** (Bd. 39 (1930), S. *86*.)[1]

Die Aufgabe lautete:

Die Ordnung der Gruppe zu ermitteln, die von drei Elementen $A, B, C$ mit den wesentlichen Relationen $A^5 = B^2 = C^3 = ABC$ erzeugt wird.

W. THRELFALL.

Lösung:

Daß die Gruppe entweder die Ordnung 60 oder die Ordnung 120, aber jedenfalls keine höhere Ordnung hat, dafür fügen wir den früheren Lösungen keinen neuen Beweis hinzu. Um zu zeigen, daß die Gruppe wirklich die Ordnung 120 hat, geben wir eine Permutationengruppe der Ordnung 120 an, die die Relationen erfüllt. Durch Elimination von $B$ kann man die wesentlichen Relationen in die Gestalt setzen

$$A^5 = (AC)^2 = C^3.$$

Für dieses Element schreiben wir abkürzend $D$. Nun realisieren wir $A$ und $C$ durch die folgenden in Zyklenzerlegung geschriebenen Permutationen der 24 Buchstaben $abcdefghklmn$ und der entsprechenden gestrichenen Buchstaben:

$$A = (abcdea'b'c'd'e')(ff')(ghklmg'h'k'l'm')(nn'),$$

$$C = (ab'fa'bf')(ce'l'c'el)(dk'md'km')(gh'n'g'hn),$$

aus denen folgt

$$AC = (af'a'f)(be'b'e)(ck'c'k)(dld'l')(gng'n')(hm'h'm).$$

1) Vgl. auch Bd. 41. S. 6—8 u. Bd. 42, S. 3—6.

Man rechnet leicht nach, daß die Relationen erfüllt sind. Das Element

$$D = (aa')(bb')(cc')(dd')(ee')(ff')(gg')(hh')(kk')(ll')(mm')(nn')$$

hat aber die Ordnung 2 und nicht die Ordnung 1. Da durch die Zusatzrelation $D = 1$ die gegebenen Relationen in bekannte Relationen der Ikosaedergruppe übergehen, ist damit bewiesen, daß die Permutationengruppe und damit die gegebene Gruppe die Ordnung 120 hat.

Es sei noch erwähnt, daß ähnliche Darstellungen als Permutationengruppen alle Gruppen

$$A^m = C^n = (AC)^2 \qquad (m > 0, n > 0)$$

gestatten, sofern $1/m + 1/n > \frac{1}{2}$ ist.

Die binäre Ikosaedergruppe ist bekanntlich Fundamentalgruppe des sphärischen Dodekaederraumes und zugleich Bewegungsgruppe des sphärischen Raumes, die ein Dodekaeder des regelmäßigen 120-Zells zum Diskontinuitätsbereiche hat. Die Gruppe *aller* Deckbewegungen erster Art des 120-Zells (Ordnung 7200) kann durch zwei Erzeugende, $R$ und $S$, mit den definierenden Relationen $R^{15} = S^{15} = (R^3S^5)^2 = (R^5S^3)^2$, $R^3S^3 = S^3R^3$, $R^5S^5 = S^5R^5$ gegeben werden. Die binäre Ikosaedergruppe ist der Normalteiler, der von $R^3 (= A)$ und $S^5 (= C)$ erzeugt wird.[1])

Toronto (Canada). H. S. M. COXETER.

(Eingegangen am 17. 11. 1936.)

**Lösung der Aufgabe 198.** (Dieser Jahresbericht Bd. 45 (1935), S. *63*.)

Die Aufgabe lautete:

Wählt man $\left|\frac{a}{b}\right| = 1$, $\left|\arg\frac{a}{b}\right| < \pi$, $0 < \Re(\lambda)$ und eine in $\nu$ analytische Funktion $g(\nu)$ so, daß die Reihe

$$\sum_{\pm\infty}^{\equiv x(1)}{}_{\nu}\, a^{\nu} b^{\lambda-\nu} g(\nu)\, g(\lambda-\nu)$$

konvergiert, so läßt der quadratische Additionssatz

$$\sum_{\pm\infty}^{\equiv x(1)}{}_{\nu}\, a^{\nu} b^{\lambda-\nu} g(\nu)\, g(\lambda-\nu) = (a+b)^{\lambda} g(\lambda)$$

mit dem Anfangswert $g(1) = 1$ und $\lim g(u) = \infty$ für $|\Im(u)| \to \infty$ nur eine Lösung zu:

$$g(u) = \frac{1}{\Gamma(1+u)}.$$

Lafayette (Indiana). WILHELM MAIER.
Math. Dept. Purdue Univ.

1) Cf. „Abstract definitions for the symmetry groups of the regular polytopes, in terms of two generators. Part II: the rotation groups", Proc. Camb. Phil. Soc. 33 (1937).

Lösung.

Die für komplexes $x$, $0 < \Re(\lambda)$ und $0 < y < 1$ geltende trigonometrische Entwicklung

$$(1 + e^{2\pi i y})^\lambda e^{-\pi i x y} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_h\, e^{2\pi i y h} c_h$$

bestimmt die Koeffizienten

$$c_h = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{0+} d v\, v^{-1-x-h}(1+v)^\lambda,$$

wenn längs $v < 0$ die Integrationsebene geschlitzt, und die Potenzen des Integranden für $0 < v$ als Hauptzweige gewählt werden. In der Bezeichnung von Aufg. 197 entsteht so mit $h \equiv 0\,(1)$:

$$c_h = \frac{\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma(1+x+h)\,\Gamma(1+\lambda-x-h)}.$$

Wird nun $e^{2\pi i y} = \frac{a}{b}$ und $x + h = \nu$ gesetzt, so ist zunächst $\frac{1}{\Gamma(1+u)} = g^*(u)$ als eine besondere analytische Lösung der in $g$ quadratischen Funktionalgleichung

$$(*) \qquad \sum_{\pm\infty}^{\equiv x(1)}{}_\nu\, a^\nu b^{\lambda-\nu} g(\nu)\, g(\lambda-\nu) = (a+b)^\lambda g(\lambda)$$

erkannt.[1]) Jede weitere Lösung $g$ von (*) liefert identisch in $\lambda$, $\nu$

$$\frac{g(\nu)\,g(\lambda-\nu)}{g(\lambda)} = \frac{g^*(\nu)\,g^*(\lambda-\nu)}{g^*(\lambda)}$$

und mit $\frac{\partial\alpha}{\partial u} = 0$: $g(u) = e^{\alpha u} g^*(u)$.

Die Vorgabe des Anfangswertes $g(1) = 1$ engt $\alpha$ auf diskrete Werte ein:

$$\alpha \equiv 0 \quad (2\pi i)$$

während die Wachstumsforderung für $|g(u)|$ bei $|I(u)| \rightarrow \infty$ eindeutig $\alpha = 0$ und $g = g^*$ bestimmt, so daß durch $g(u) = \frac{1}{\Gamma(1+u)}$ das volle System analytischer Lösungen unserer Aufgabe gegeben wird.

Freiburg i. B. WILHELM MAIER.

(Eingegangen am 15. 1. 1937.)

**Lösung der Aufgabe 203.** (Dieser Jahresbericht Bd. 45 (1935), S. *109*.)

Die Aufgabe lautete:

Man bezeichne die Ecken eines Vierecks mit $A$, $B$, $C$, $D$ und seine Seiten $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ mit $d$, $a$, $b$, $c$. Die Verbindungslinie eines willkürlich auf $a$ gewählten Punktes 1 mit $A$ schneide die Seite $b$ in dem Punkte 2. Diesen verbinde man wieder mit der Ecke $B$, welche Gerade die Seite $c$ schneide in 3. So fahre man fort, wie es das beifolgende Schema angibt:

1) Vgl. auch Monatsh. f. Math. u. Physik, Bd. 44 (1936), S. 16: Aus dem Gebiet der Differenzengleichungen.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Gerade | $1\,A \times b = 2$ | $5\,A \times b = 6$ | $9\,A \times b = 10$ |
| | $2\,B \times c = 3$ | $6\,B \times c = 7$ | $10\,B \times c = 11$ |
| | $3\,C \times d = 4$ | $7\,C \times d = 8$ | $11\,C \times d = 12.$ |
| | $4\,D \times a = 5$ | $8\,D \times a = 9$ | |

Es ist zu beweisen, daß die Gerade $12\,D$ die Seite $a$ stets wieder in 1 schneidet.

Jena. R. HAUSSNER.

Lösung:

Ist $a \times c \equiv E$, $b \times d \equiv F$, so ist $BCE\,1 \doublebarwedge FCD\,2 \doublebarwedge AED\,3 \doublebarwedge ABF\,4 \doublebarwedge EBC\,5$, also zyklisch $\barwedge CEB\,9 \barwedge BCE\,13$ und mithin $13 \equiv 1$.

Übrigens sind, wie leicht zu beweisen, die Punkte auf $a$ auch $\barwedge 159\,B \barwedge 915\,C \barwedge 591\,E$, trennen sich $B, C, E$ und $1, 5, 9$ gegenseitig und gehen $17, 28, \ldots, 6\;12$ durch $ACXBD$.

Berlin. H. BARON.

(Eingegangen am 22. 1. 1936.)

Weitere Lösungen gingen ein von den Herren E. Bálint (Budapest), L. Balser (Darmstadt), A. Boy (Treuburg), F. Gruber (Wien), K. Grün (Steyr), F. Knoll (Wien), R. Lauffer (Graz), F. Levi (Kalkutta), L. Locher (Winterthur), J. Mahrenholz (Kottbus), A. E. Mayer (Wien), Nehring (Mühlhausen i. Th.), J. Schröder (Hamburg), A. Stöhr (Berlin), H. Urban (Stettin), M. Zacharias (Berlin).

**Lösung der Aufgabe 206.** (Dieser Jahresbericht Bd. 45 (1935), S. *110*.)

Die Aufgabe lautete:

Die Gleichung einer Ebene in Bonnet-Darbouxschen Koordinaten $\alpha, \beta, \xi$ lautet

$$x + iy - \alpha\beta(x - iy) + (\alpha + \beta)z - \xi = 0.$$

Wenn $\xi = \xi(\alpha, \beta)$ eine analytische Funktion der komplexen Parameter $\alpha$ und $\beta$ ist, hüllt die Ebene eine Fläche ein. Man bestimme die Fläche, die der partiellen Differentialgleichung

$$p - q + (\alpha - \beta)s = 0$$

gehorcht. Dabei bedeuten

$$p = \frac{\partial \xi}{\partial \alpha}, \quad q = \frac{\partial \xi}{\partial \beta}, \quad s = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha \partial \beta}.$$

Bayreuth. OSKAR DEGEL.

Lösung:

Die Koordinaten des Berührungspunktes $P$ der anisotropen $(\alpha \neq \beta)$ Ebene

$$E = x + iy - \alpha\beta\,(x - iy) + (\alpha + \beta)\,z - \xi = 0$$

ergeben sich aus den Gleichungen

$$E = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \beta} = 0$$

in der Form

$$x + iy = \xi - \frac{\alpha^2 p - \beta^2 q}{\alpha - \beta}, \quad x - iy = \frac{p - q}{\alpha - \beta}, \quad z = \frac{\alpha p - \beta q}{\alpha - \beta}.$$

Setzt man ferner nach Monge

$$r = \frac{\partial p}{\partial \alpha}, \quad s = \frac{\partial p}{\partial \beta} = \frac{\partial q}{\partial \alpha}, \quad t = \frac{\partial q}{\partial \beta},$$

so haben die Koeffizienten der ersten Grundform

$$E\,d\alpha^2 + 2F\,d\alpha\,d\beta + G\,d\beta^2$$

die Werte

$$E = \frac{r(p - q + (\alpha - \beta)s)}{\alpha - \beta}, \quad F = \frac{(p - q + (\alpha - \beta)s)^2 + rt(\alpha - \beta)^2}{2(\alpha - \beta)^2},$$

$$G = \frac{t(p - q + (\alpha - \beta)s)}{\alpha - \beta}.$$

Für die Koeffizienten der zweiten Grundform

$$L\,d\alpha^2 + 2M\,d\alpha\,d\beta + N\,d\beta^2$$

ergibt sich

$$L = \frac{r}{\alpha - \beta}, \quad M = \frac{p - q + (\alpha - \beta)s}{(\alpha - \beta)^2}, \quad N = \frac{t}{\alpha - \beta}.$$

Wenn $$p - q + (\alpha - \beta)s = 0, \quad rt \neq 0,$$

bilden die krummen Minimallinien $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ der Fläche $F$ ein konjugiertes System, da

$$E = G = M = 0.$$

$F$ ist also eine Minimalfläche. Verschwindet auch $r$ oder $t$, so hat man die Tangentenfläche einer krummen Minimallinie.

Um die partielle Differentialgleichung

$$p - q + (\alpha - \beta)s = 0$$

zu lösen leitet man ihre linke Seite nach $\alpha$ und nach $\beta$ ab und findet

$$r + (\alpha - \beta)\frac{\partial s}{\partial \alpha} = 0, \quad -t + (\alpha - \beta)\frac{\partial s}{\partial \beta} = 0.$$

Bildet man die Ableitung der 1. (2.) dieser Gleichungen nach $\beta$ ($\alpha$), so kommt

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \alpha\,\partial \beta} = 0.$$

Folglich ist $s$ die Summe einer Funktion von $\alpha$ und einer Funktion von $\beta$. Schreibt man

$$s = \varphi''(\alpha) + \psi''(\beta), \quad \varphi'''(\alpha) \neq 0, \quad \psi'''(\beta) \neq 0,$$

wo $\varphi(\alpha)$ und $\psi(\beta)$ analytische Funktionen von $\alpha$ und von $\beta$ allein sind und die Striche die Ableitung nach dem betreffenden Parameter bedeuten, so ist

$$\xi = 2\varphi(\alpha) + 2\psi(\beta) - (\alpha - \beta)(\varphi'(\alpha) - \psi'(\beta)).$$

Die Integrationskonstanten darf man weglassen, da ihr Auftreten nur eine Schiebung der Minimalfläche bewirkt.

Man zerlegt den für $\xi$ gefundenen Ausdruck in

$$\xi = \xi_1 + \xi_2;$$

dabei ist

$$\xi_1 = 2\varphi(\alpha) - (\alpha - \beta)\varphi'(\alpha), \quad \xi_2 = 2\psi(\beta) + (\alpha - \beta)\psi'(\beta).$$

$F$ erscheint so als die Resultantenfläche[1]) der durch gleichsinnig-parallele Normalen aufeinander bezogenen Tangentenflächen $F_1$, $F_2$ von zwei krummen Minimallinien.

Bayreuth. OSKAR DEGEL.

(Eingegangen am 18. 1. 1937.)

**Lösung der Aufgabe 208.** (Dieser Jahresbericht Bd. 45 (1935), S. *110*.)

Die Aufgabe lautete:

(Im Anschluß an die van der Waerdensche Aufgabe 171.) Gegeben ein Körper $K$ vom Primzahlgrad $l$ mit quadratfreier Diskriminante $D$. Es soll gezeigt werden, daß der Normalkörper $NK$ (vom Grade $l!$) unverzweigt über $(\sqrt{D})$ ist.

Kiel-Kitzeberg. ARNOLD SCHOLZ.

Lösung.

Die Forderung, daß der Körper $K$ Primzahlgrad besitzt, ist nach v. d. Waerden, Math. Ann. 111 (1935), 731—733 entbehrlich: ist die Diskriminante $D$ von $K$ quadratfrei, so ist $K$ bestimmt primitiv; denn hätte $K$ einen echten Unterkörper $k$ mit der Diskriminante $\partial$, so hätte man schon $\partial^r | D$, wenn $r$ der Grad von $K/k$. Also ist die Galoisgruppe von $K$ die symmetrische, weil $D$ wenigstens einen Primteiler in erster Potenz enthält. Da nun aber alle in $K$ verzweigten Primzahlen nur in der ersten Potenz in $D$ aufgehen, so sind nach Aufg. 171, Lösg. 4, sogar alle Trägheitssubstitutionen $T \neq E$ Transpositionen. Jede Trägheitsgruppe ist daher zur alternierenden Gruppe, zu der der Körper $(\sqrt{D})$ als Unterkörper des Normalkörpers $NK$ gehört, teilerfremd, und daher ist $NK$ über $(\sqrt{D})$ bei beliebigem Grad von $K$ unverzweigt, wenn $D$ quadratfrei ist.

Das einfachste Beispiel eines unverzweigten Körpers $\frac{NK}{(\sqrt{D})}$ mit alternierender Gruppe fünften Grades:

$$K = P(\vartheta) \text{ mit } \vartheta^5 - \vartheta - 1 = 0; \quad D = 19 \cdot 151$$

stammt von Artin.

Kiel-Kitzeberg. ARNOLD SCHOLZ.

(Eingegangen am 14. 3. 1937.)

Eine weitere Lösung sandte Fräulein O. Taussky (Cambridge, England) ein.

1) L. Braude, Über Mannheimsche Flächen (Monatsh. für Math. und Phys. 25 (1914), S. 71—88).