

Werk

Titel: Knoteninvarianz bei Differentialgleichungen.

Autor: Lonn, Ernst

Jahr: 1934

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?37721857X_0043|log31

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Knoteninvarianz bei Differentialgleichungen.

Von ERNST LONN in Breslau.

Es liegt vor eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha x + \beta y + \eta_1(x, y)}{\gamma x + \delta y + \eta_2(x, y)},$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \quad \eta_{1,2} = o(|x| + |y|) \text{ für } (x, y) \rightarrow (0,0).$$

Der Anfangspunkt ist singulärer Punkt für diese Gleichung; gesucht sind hinreichende Bedingungen dafür, daß der singuläre Punkt von derselben Art ist wie bei der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha x + \beta y}{\gamma x + \delta y}$$

(„Invarianz“.) Diese letzte Gleichung läßt sich durch eine affine Transformation zurückführen auf eine Gleichung von einer der Formen

$$\frac{dy}{dx} = a \frac{y}{x}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x + ay}{ax - y}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x}.$$

Ein „Knotenpunkt“ liegt vor im ersten Fall für $a > 0$ und im dritten Fall. Im ersten Fall mit $a > 0$, $a \neq 1$ genügen zur Invarianz des Knotens Lipschitzbedingungen für η_1 und η_2 .¹⁾ Für $a = 1$ reicht das nicht aus. Wir wollen uns hier mit dem dritten Fall beschäftigen; auch da sind schärfere Bedingungen für η_1, η_2 notwendig. Herr Perron²⁾ brauchte die Voraussetzung, daß η_1 und η_2 stetige partielle Ableitungen besitzen und daß diese $= o(r^d)$ seien (r, φ Polarkoordinaten); daraus folgt $\eta_{1,2} = o(r^{1+d})$. Wir werden immerhin mit geringeren Voraussetzungen auskommen, vgl. IV. —

Wir denken uns also die affine Transformation ausgeführt und betrachten eine Gleichung

$$(I) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x + y + \eta_1(x, y)}{x + \eta_2(x, y)}, \quad \eta_{1,2} = o(r).$$

Damit in einer Umgebung von $(0,0)$ nicht noch weitere singuläre Stellen liegen, soll etwa die rechte Seite von (I) in einer Umgebung jedes von $(0,0)$ verschiedenen Punktes eine Lipschitzbedingung erfüllen; dazu ist ausreichend, daß η_1 und η_2 solche erfüllen.³⁾

1) Vgl. Hoheisel, Jahresber. d. D. M. V. 42 (1933), S. 36.

2) Math. Ztschr. 15 (1922), S. 123.

3) Vgl. Perron, Math. Ztschr. 16 (1923), S. 274.

I. Benutzen wir Polarkoordinaten, so wird aus (1)

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r} \frac{xy' - y}{x + yy'} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\cos^2 \varphi + \frac{\eta_1}{r} \cos \varphi - \frac{\eta_2}{r} \sin \varphi}{N} = F(r, \varphi),$$

dabei ist $N = 1 + \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\eta_2}{r} \cos \varphi + \frac{\eta_1}{r} \sin \varphi$. Da $N \geq \frac{1}{2} + o(1)$ ist, bleibt in einem Kreise $0 < r < R_1 \frac{d\varphi}{dr}$ endlich; daher kann in diesem Kreise r auf keiner Integralkurve ein Extrem haben. Es gibt also eine Richtung auf der Kurve, in der r beständig abnimmt. Da F in jedem Gebiet $0 < r_1 \leq r \leq r_2 < R_1$ beschränkt und stetig ist, kann man die Integralkurve bis zu beliebig kleinen r verfolgen. Also: alle Integralkurven, die überhaupt Punkte in $r < R_1$ haben, „laufen in den Nullpunkt“.

II. Keine solche Integralkurve kann für $r < R$ dauernd in einem Sektor $|y| \leq c|x|$ bleiben. Denn angenommen, es gebe eine solche, sie komme etwa von positiven x . Im Sektor ist $\eta_{1,2} = o(x)$; $y = O(x)$; also für $x < x_0$ auf der Kurve $|x\eta_1 - y\eta_2| \leq \frac{x^2}{2}$; $|\eta_2| \leq \frac{x}{2}$; daher

$$\frac{d \frac{y}{x}}{dx} = \frac{xy' - y}{x^2} = \frac{x^2 + x\eta_1 - y\eta_2}{x^2 \cdot (x + \eta_2)} \geq \frac{\frac{x^2}{2}}{3x^2} = \frac{1}{6x},$$

also für $0 < x < x_0$

$$\frac{y}{x} = \frac{y_0}{x_0} - \int_x^{x_0} \frac{d \frac{y}{x}}{dx} dx \leq \frac{y_0}{x_0} - \frac{1}{6} \log \frac{x_0}{x},$$

daraus folgt $\frac{y}{x} \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow 0$, was der Voraussetzung $\left| \frac{y}{x} \right| \leq c$ widerspricht.

III. Nach diesen Vorbemerkungen beweisen wir den folgenden Hilfssatz:

Es gebe zwei Kurven $\mathfrak{C}_+$, $\mathfrak{C}_-$ von folgender Beschaffenheit:

Sie laufen in den Nullpunkt; dabei hat $\mathfrak{C}_+$ die positive, $\mathfrak{C}_-$ die negative y -Achse als Halbtangente. Sie sind darstellbar in der Form $\varphi = \bar{\varphi}(r)$, $0 < r \leq R$, $\bar{\varphi}(r)$ ist eine eindeutige, stetige, differenzierbare Funktion von r . Für kleine r ist

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dr} > F(r, \bar{\varphi}).$$

Dann ist der singuläre Punkt der Differentialgleichung (1) von derselben Art wie bei der Gleichung

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x},$$

nämlich: alle Integralkurven laufen mit der y -Achse als Tangente in den Nullpunkt, und zwar kommen unendlich viele von der Seite positiver y , unendlich viele von der Seite negativer y .

Beweis: Sei eine Integralkurve $\mathfrak{C}$ vorgelegt; wir können zu jedem $\delta > 0$ (angenommen $< \frac{\pi}{2}$) ein $r_*(\delta)$ finden, so daß $\mathfrak{C}$ für $r < r_*$ in

$$(S) \quad |x| \leq |y| \operatorname{tg} \delta$$

bleibt. Sei nämlich R_2 so klein, daß für $r < R_2$ $\mathfrak{C}_+, \mathfrak{C}_-$ in (S) bleiben und daß für $r < R_2$ auf den Geraden $x = \pm y \operatorname{tg} \delta$ $F(r, \varphi) > 0$ ist; außerdem $R_2 < R_1$. Bleibt für $r < R_2$ $\mathfrak{C}$ in (S), so setzen wir $R_2 = r_*(\delta)$. Im andern Fall kommt die Kurve $\mathfrak{C}$, die wir uns in der Richtung abnehmender r durchlaufen denken, noch einmal in den Sektor $|x| > |y| \operatorname{tg} \delta$. Nach II. kann sie dort nicht dauernd bleiben, sondern kommt einmal in den Doppelsektor (S) zurück; etwa bei $r = r_*$. Das kann nur über die Gerade $x = -y \operatorname{tg} \delta$ erfolgen; denn würde $\mathfrak{C}$ aus $|x| > |y| \operatorname{tg} \delta$ über die Gerade $x = +y \operatorname{tg} \delta$ laufen, so müßte doch dort $\frac{d\varphi}{dr} \leq 0$ sein⁴⁾, was ausgeschlossen ist wegen $F > 0$.

Für $r < r_*$ bleibt dann $\mathfrak{C}$ in (S). Denn über die Gerade $x = -y \operatorname{tg} \delta$ kann $\mathfrak{C}$ nicht zurück, wegen $F > 0$; und um über $x = +y \operatorname{tg} \delta$ hinauszukommen, müßte $\mathfrak{C}$ erst $\mathfrak{C}_+$ oder $\mathfrak{C}_-$ überschreiten; das geht nicht wegen $F < \frac{d\varphi}{dr}$.

Also: alle Integralkurven laufen mit der y -Achse als Tangente in den Nullpunkt. Von der Seite $\left\{ \begin{array}{l} \text{positiver} \\ \text{negativer} \end{array} \right\} y$ kommen beispielsweise die Integralkurven durch die Punkte $x = -y \operatorname{tg} \delta$,

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < y < y_0 \\ -y_0 < y < 0 \end{array} \right\}.$$

IV. Mit Hilfe von III. finden wir hinreichende Bedingungen für die Invarianz des Knotens:

In einem Winkelraum um die y -Achse sei für kleine r

$$\eta_1 \cdot \frac{x}{r} - \eta_2 \cdot \frac{y}{r} < c \cdot \frac{r}{\log^2 r}, \quad c < \frac{1}{4}.$$

Das ist hinreichend zur Invarianz.

Beweis: Ich kann annehmen $c > 0$. Es sei

$$1 < A < \frac{1}{\sqrt[3]{4c}}.$$

Dann erfüllen die Kurven $\mathfrak{C}_{\pm} \operatorname{tg} \bar{\varphi} = 2A \log r$ die Bedingungen des Hilfssatzes.

⁴⁾ Weil ja r abnimmt.

Zunächst gibt es einen Winkelraum um die y -Achse, in dem für kleine r , etwa $r < R_3$

$$0 < \frac{1}{N} < A$$

ist. Wenn wir R_3 klein genug wählen, wird für $r < R_3$, $\mathfrak{C}_\pm$ dauernd in diesem Winkelraum bleiben; und außerdem

$$1 + \frac{1}{4A^2 \log^2 r} < A$$

sein. Für $r < R_3$ ist dann auf $\mathfrak{C}_\pm$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\varphi}}{dr} - F &= \frac{2A \cos^2 \bar{\varphi}}{r} - \frac{\cos^2 \bar{\varphi}}{r} \cdot \frac{1}{N} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\eta_1 \cos \bar{\varphi} - \eta_2 \sin \bar{\varphi}}{N} \\ &\geq \frac{A \cos^2 \bar{\varphi}}{r} - \frac{cA}{r \log^2 r} \\ &= \frac{A}{r \cdot (1 + 4A^2 \log^2 r)} - \frac{cA}{r \log^2 r} \\ &= \frac{1}{4Ar \log^2 r} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{4A^2 \log^2 r}} - \frac{cA}{r \log^2 r} \\ &\geq \left(\frac{1}{4A^2} - cA \right) \cdot \frac{1}{r \log^2 r} > 0. \end{aligned}$$

Also ist der Hilfssatz anwendbar.

V. Ein trivialer Fall:

Für $|y| < Y$ sei $y \cdot \eta_2(0, y) > 0$.

Das ist hinreichend zur Invarianz.

Man kann dann als Kurve $\mathfrak{C}_\pm$ die y -Achse benutzen.

VI. Als Gegenstück zu IV beweisen wir:

In einem Winkelraum um die y -Achse sei für kleine r

$$\eta_1 \cdot \frac{x}{r} - \eta_2 \cdot \frac{y}{r} > C \cdot \frac{r}{\log^2 r} \quad C > 1.$$

Dann ist der singuläre Punkt *nicht* von derselben Art wie bei (2), sondern alle Integralkurven winden sich spiralig herum.

Beweis: Aus der Voraussetzung folgt, daß für $r < R_4$ dauernd $F > 0$ ist: φ ist also auf jeder Integralkurve monoton und muß daher für $r \rightarrow 0$ entweder sich einem endlichen Grenzwert nähern oder $\rightarrow -\infty$ gehen. Mit einer von der y -Achse verschiedenen Tangente in den Nullpunkt laufen kann die Kurve nicht, nach II; daher brauchen wir nur noch zu beweisen, daß keine Integralkurve mit der y -Achse als Tangente in $(0,0)$ einlaufen kann.

Angen., es gebe eine solche; dann können wir sie so darstellen:

$$\operatorname{tg} \varphi = -f(r),$$

wobei $f(r) > 0$ ist und für $r \rightarrow 0$ monoton $\rightarrow \infty$ geht. Auf dieser Kurve müßte sein

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dr} &= -f'(r) \cdot \cos^2 \varphi = \frac{-f'(r)}{1+f^2(r)} = F(r, \varphi) \\ &= \frac{\cos^2 \varphi}{r} \cdot \frac{1}{N} + \frac{\eta_1 \cos \varphi - \eta_2 \sin \varphi}{r^2 N}.\end{aligned}$$

Also für kleine r ist f' negativ; für $r < R_5$ wird außerdem (wegen der Nähe der y -Achse)

$$\frac{1}{N} > 1 - \varepsilon > 0, \quad \text{also}$$

$$\frac{-f'(r)}{f^2(r)} > \frac{-f'(r)}{1+f^2(r)} > \frac{\eta_1 \cos \varphi - \eta_2 \sin \varphi}{r^2 N} > C \cdot (1 - \varepsilon) \cdot \frac{1}{r \log^2 \frac{1}{r}}$$

Daher für $r_1 < r < R_5$

$$\frac{1}{f(r)} - \frac{1}{f(r_1)} = \int_{r_1}^r \frac{-f'(r)}{f^2(r)} dr > C \cdot (1 - \varepsilon) \cdot \left(\frac{1}{\log \frac{1}{r}} - \frac{1}{\log \frac{1}{r_1}} \right).$$

Für $r_1 \rightarrow 0$ folgt $\frac{1}{f(r)} \geq C \cdot (1 - \varepsilon) \cdot \frac{1}{\log \frac{1}{r}}$ oder

$$(3) \quad 0 < f(r) \leq \frac{1}{C \cdot (1 - \varepsilon)} \cdot \log \frac{1}{r}.$$

Andererseits ist auch

$$\frac{d\varphi}{dr} = -f'(r) \cdot \cos^2 \varphi > \frac{\cos^2 \varphi}{r} \cdot (1 - \varepsilon),$$

$$\text{also} \quad -f'(r) > \frac{1 - \varepsilon}{r},$$

daher für $r < r_0 < R_5$

$$f(r) = f(r_0) + \int_r^{r_0} -f'(r) dr$$

$$(4) \quad > f(r_0) + (1 - \varepsilon) \log \frac{r_0}{r} \sim (1 - \varepsilon) \log \frac{1}{r}.$$

Wähle ich nun $1 - \varepsilon > \frac{1}{\sqrt{C}}$, so widersprechen sich die Abschätzungen

(3) und (4). Also die Annahme, eine Integralkurve laufe mit der y -Achse als Tangente in $(0,0)$ ein, führt auf einen Widerspruch.

Wir haben im wesentlichen nur Voraussetzungen über den Ausdruck

$$\eta_0 = \eta_1 \cos \varphi - \eta_2 \sin \varphi$$

gebraucht, nicht über η_1 und η_2 selbst.

Ähnlich ist es bei der Gleichung

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y + \eta_1}{x + \eta_2} \quad \eta_{1,2} = o(r)$$

(η_1, η_2 sollen wieder Lipschitzbedingungen erfüllen). Das erscheint ganz begreiflich, wenn man bedenkt, daß im Fall $\eta_0 \equiv 0$ (5) sich auf

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

reduziert.

Ich gebe noch ohne Beweis Bedingungen an, die bei (5) zur Invarianz des Knotens ausreichen. Ganz ohne nähere Voraussetzungen über η_1 und η_2 selbst, also: nur mit Voraussetzungen über η_0 , bin ich dabei allerdings nicht ausgekommen.

1. Für kleine r sei $|\eta_0| \leq H(r)$,

$H(r) > 0$, stetig und $\int_0^r \frac{H(n)}{n^2} dn$ konvergent. Dann läuft jede Integralkurve mit bestimmter Tangente in $(0,0)$ ein, und in jeder Richtung wenigstens eine.

2. Es sei außerdem

$$|\eta_0(r, \varphi_1) - \eta_0(r, \varphi_2)| \leq \varepsilon(r) \cdot |\varphi_1 - \varphi_2|,$$

dabei

$$\varepsilon(r) = o\left(\frac{H(r)}{\int_0^r \frac{H(n)}{n^2} dn}\right)$$

und

$$|\eta_{1,2}| \leq c \sqrt{\frac{r \cdot H(r)}{\int_0^r \frac{H(n)}{n^2} dn}} \quad c < \frac{1}{2}$$

Dann läuft in $(0,0)$ in jeder Richtung *nur* eine Integralkurve ein.

Die Voraussetzungen sind schwächer als die Hoheisel'schen¹⁾; allerdings ist der Fortschritt ziemlich geringfügig. Die Konvergenz des Integrals ist eben im wesentlichen unentbehrlich. — Die Voraussetzung über $\eta_{1,2}$ in 2. ist immer erfüllt (für ein passendes $H(r)$), wenn $|\eta_{1,2}| \leq K(r)$ ist, wobei

$$\int_0^r \frac{K^2(r)}{r^3} dr \quad \text{konvergiert.}$$

Ist $\eta_0 = O(r^{1+\delta})$, so bedeutet 2) nur:

es soll $\varepsilon(r) = o(r)$ sein;

die andere Voraussetzung ergibt

$$|\eta_{1,2}| \leq c \sqrt{\delta} \cdot r,$$

das ist — für kleine r — von selbst erfüllt wegen $\eta_{1,2} = o(r)$.

(Eingegangen am 30. 12. 32.)