Die neuere formale Variationsrechnung.

Von LOTHAR KOSCHMIEDER in Brünn.[1])

Der Ort unserer Tagung rechtfertigt es, wenn ich mich bei der Fülle des Stoffes im wesentlichen auf den Teil der formalen Variationsrechnung beschränke, der von den deutschen Mathematikern der tschechoslowakischen Republik besonders gepflegt wird: Ich will darüber berichten, wie sich in der jüngsten Entwicklung dieses Zweiges der Analysis differentialgeometrische Gesichtspunkte geltend gemacht haben. Bei ihrer Erläuterung verwenden wir folgende Bezeichnungen. Es seien x_i, $i = 1, \ldots, N$ die Bestimmungszahlen eines Punktes in einem Bereiche X_N eines N-stufigen Raumes Ξ_N. In diesem betrachten wir einen Raum Ξ_n von n Stufen $(n < N)$

$$(1) \qquad x_i = \varphi_i(u_1, \ldots, u_n),$$

den wir auch kurz Fläche nennen. Die φ_i seien etwa analytische Funktionen der in einem Bereiche O_n unabhängig veränderlichen Parameter u_α, $\alpha = 1, \ldots, n$. Lateinische Zeiger laufen von 1 bis N, griechische von 1 bis n. Es sei eine Funktion gegeben

$$(2) \qquad G = G(x_i, x_{i,\alpha_1}, \ldots, x_{i,\alpha_1\ldots\alpha_q}), \quad x_{i,\alpha} = \partial x_i/\partial u_\alpha \quad \text{usw.},$$

welche die x_i und deren kurz mit $\mathfrak{d}^r x$ zu bezeichnende Ableitungen nach den u_α bis zur q-ten Ordnung enthält und in ihren Argumenten analytisch ist. Die Grundfunktion G dient als Integrand des über O_n zu erstreckenden Grundintegrals

$$(3) \qquad J = \int^{(n)} G\,du, \quad du = du_1 \ldots du_n.$$

1. In der Angabe von J steckt eine Art der *Maßbestimmung*, insofern als man J als den Inhalt eines Flächenstückes (1) ansehen kann; besondere Fälle davon kommen noch zur Sprache. Die Raumlehre, die wir treiben, ist die mit dieser Maßbestimmung behaftete Geometrie der umkehrbar eindeutigen analytischen *Punkttransformationen*

$$(4) \qquad x_i = \mathfrak{x}_i(x'_1, \ldots, x'_N), \quad D = \det.(\partial x_i/\partial x'_k) \neq 0.$$

1) Bericht, bei der Tagung der Deutschen Mathematikervereinigung in Prag am 20. IX. 29 erstattet und seither in mehreren Punkten ergänzt. — Für mannigfache Anregung und Hilfe bei seiner Abfassung spreche ich den Herren L. Berwald und P. Funk meinen herzlichsten Dank aus.

Diesen fügen wir die zugehörigen Verwandlungen der $\mathfrak{d}^r x$ hinzu, ferner diejenigen der Funktion $G(\mathfrak{d}^r x) = G'(\mathfrak{d}^r x')$ und ihrer Ableitungen nach irgendwelchen ihrer Argumente; schließlich die Umsetzungen solcher Größen η, die sich, wie die Variationen δx_i, kogredient zu gewissen der bisher genannten Veränderlichen Y transformieren. Es sei h eine Funktion aller aufgezählten Veränderlichen y, h' die nach der Vorschrift h gebildete Funktion der y'. Ist dann

$$h' = D^a h, \tag{5}$$

so heißt h eine Punktinvariante vom Gewichte a. Tensoren erklärt man als Größen, deren Bestimmungszahlen unter der Wirkung von (4) die aus der Ricci-Rechnung bekannten Transformationen erfahren.

Als geometrische Merkmale des Ξ_n (1) treten diejenigen nur von den Y abhängigen absoluten Punktinvarianten auf, die zudem absolut invariant sind gegenüber den umkehrbar eindeutigen analytischen *Parametertransformationen*

$$u_\alpha = \mathfrak{u}_\alpha(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n), \quad \mathfrak{D} = \det.(\partial u_\alpha / \partial \bar{u}_\beta) \neq 0. \tag{6}$$

Dabei heißt eine Funktion Ψ der $\mathfrak{d}^r x$ und ihnen kogredienter Größen v dann eine Parameterinvariante vom Gewichte c, wenn die nach der Vorschrift Ψ aus den $\bar{\mathfrak{d}}^r x, \bar{v}$ gebildete Funktion $\overline{\Psi}$ die Beziehung befriedigt

$$\overline{\Psi} = \mathfrak{D}^c \Psi. \tag{7}$$

Die Erklärung der Tensoreigenschaft bei (6) liegt nach dem anschließend an (5) gesagten auf der Hand. — Wir nehmen an, daß

$$\overline{G} = G(\bar{\mathfrak{d}}^r x) = \mathfrak{D} G(\mathfrak{d}^r x); \tag{8}$$

dann ist (3) parameterinvariant.

Es sei hier eingefügt, daß G. Usai[2]) die Frage nach den Bedingungen für (8) beantwortet hat in dem Falle, daß n beliebig, $N = n + 1$, q beliebig ist. Man betrachte x_{n+1} als Funktion von $x_1, \ldots, x_n$; dann ist $\partial x_{n+1}/\partial x_\alpha = -\theta_\alpha/\theta_{n+1}$, wo θ_i die mit $(-1)^{i-1}$ multiplizierte Determinante bedeutet, die man aus der Funktionalmatrix $\| x_{i,\alpha} \|$ dadurch erhält, daß man in ihr die i-te Zeile streicht. Weiter setzt man

$$\frac{\partial^2 x_{n+1}}{\partial x_{\alpha_1} \partial x_{\alpha_2}} = \frac{\sigma_{\alpha_1 \alpha_2}}{\theta_{n+1}^3}, \ldots, \frac{\partial^q x_{n+1}}{\partial x_{\alpha_1} \ldots \partial x_{\alpha_q}} = \frac{\sigma_{\alpha_1 \ldots \alpha_q}}{\theta_{n+1}^{2q-1}};$$

dabei sind $\sigma_{\alpha_1 \alpha_2}, \ldots, \sigma_{\alpha_1 \ldots \alpha_q}$ Polynome der Teilableitungen der x_i nach den u_α bis zur Ordnung $2, \ldots, q$. Die kennzeichnende Bedingung

2) Annali di Mat. 31 (1922), S. 279—294.

der Parameterinvarianz von J besteht dann darin, daß G eine homogene Funktion erster Stufe ist in den θ_i, $(\sigma_{\alpha_1 \alpha_2})^{1/3}, \ldots, (\sigma_{\alpha_1 \ldots \alpha_q})^{1/2(q-1)}$.[3])

2. Vor der Rückkehr zur Geometrie des Integrals J seien mir einige *geschichtliche Bemerkungen* über die Invariantentheorie in der Variationsrechnung gestattet. Punkt- und Parameterinvarianten boten sich dar, wo man von einem Bezugssysteme zu einem besonders geeigneten, also einem anderen, überging. Ich erwähne das Beispiel des Übergangs zum Systeme der Extremalen und Transversalen, bei dem schon in der ersten Auflage von A. Knesers Lehrbuch der Variationsrechnung[4]) invariante Bildungen auftraten. Der Verfasser dieses Werkes hat sich von dem Gedanken leiten lassen, die Variationsrechnung des Integrals $\int F(x, y, dx/dt, dy/dt)\,dt$ entsprechend dem wichtigsten Beispiele aufzubauen, dem der kürzesten Linien. Im Verfolg des gleichen Zieles stieß G. Landsberg[5]) auf die extremale Krümmung als eine Invariante von F, die längs der Extremalen verschwindet und in jenem Sonderfalle in die geodätische Krümmung übergeht. Die bisher genannten Invarianten entstammen der ersten Variation; die zweite Variation bezog in gleicher Richtung A. L. Underhill[6]) in die Betrachtung ein, der zugleich die geometrische Bedeutung der Invarianten angab und alle vorhandenen Einzelergebnisse allgemeineren invariantentheoretischen Gesichtspunkten einordnete. Th. De Donder behandelte ähnlich einfache Integrale mit höheren Ableitungen im Integranden[7]) und mehrfache Integrale.[8])

3. Das sind Bausteine, die der Errichtung einer Geometrie allgemeiner Räume dienen. Dieser stecken wir als Ziel den Überblick über die *Gesamtheit* der Invarianten. Erreicht ist es bisher erst in einem Sonderfalle — N beliebig, $n = 1, q = 1$. E. Noether hat ein vollständiges System der Invarianten der Funktion

$$F\left(x_1, \ldots, x_N, \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_N}{dt}\right) = F\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

aufgestellt[9]) und damit dem Satze die allgemeinste Form gegeben,

3) Hierin sind frühere einschlägige Ergebnisse zum größten Teile enthalten. Sie werden von A. Dresden aufgezählt in seinem Berichte *Some recent work in the calculus of variations*, Bull. Amer. Math. Soc. 32 (1926), S. 475—521; man findet dort zahlreiche Schrifttumsnachweise über die neuere Entwicklung der gesamten Variationsrechnung.

4) Braunschweig 1900, § 16. Vgl. auch § 4 der 2. Aufl. 1925.

5) a) Jahresber. Deutsche Math.-Ver. 16 (1907), S. 36—46. b) Ebenda S. 547—551. c) Math. Ann. 65 (1908), S. 313—349.

6) Trans. Amer. Math. Soc. 9 (1908), S. 316—338.

7) C. R. Acad. sc. Paris 155 (1912), S. 577—580.

8) Ebenda, S. 1003—1005.

9) Nachr. d. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, 1918, S. 37—44.

den E. B. Christoffel und G. Ricci im Sonderfalle Riemannscher Maßbestimmung bewiesen haben. Sie zieht dabei die Koordinaten u heran, in denen sich die Extremalen des Integrals $\int F(dx)$ als Gerade darstellen[10]), und führt dadurch die Transformationen (4) auf *lineare* Transformationen der u zurück. Die projektiven Invarianten des Systems $\mathfrak{F}$ der Glieder in der Entwicklung von F nach homogenen Formen der u geben dann alle Invarianten von F. Damit hat E. Noether den Reduktionssatz bewiesen; dagegen wäre, wie sie selbst bemerkt[11]), noch näher auszuführen der von ihr a. a. O.[9]) nur angedeutete Beweis, daß an Stelle von $\mathfrak{F}$ auch dasjenige von ihr aufgestellte Funktionensystem $[\Omega]$ treten kann, welches ich wegen seiner Wichtigkeit für unseren Gegenstand jetzt schildern werde. E. Noether erhält zunächst, indem sie mit $F_{\delta^\sigma} = \sum(\partial^\sigma F(dx)/\partial dx^\sigma)\,\delta x^\sigma$ die σ-te Polare von F bezeichnet, die *Normalform der ϱ-ten Variation*

$$\Omega_\varrho = \sum_\sigma^{0,\,\varrho} \frac{(-1)^\sigma}{\sigma!}\,\delta^{\varrho-\sigma} d^\sigma F_{\delta^\sigma},$$

aus der die gemischten Differentiale $(\varrho+1)$-ter Ordnung $d^{\varrho-\sigma}\delta^{\sigma+1}$, $\sigma = 0, 1, \ldots, \varrho - 1$, entfernt sind. Um von diesen Invarianten zu solchen zu gelangen, die nur *erste* Differentiale enthalten, den *Hauptfunktionen*[12]), muß eine invariante Beziehung geschaffen werden, die die zweiten Differentiale durch erste ausdrückt. Dazu benutzt E. Noether, indem sie die im Riemannschen Raume dienliche Verwendung der kürzesten Linien verallgemeinert, die Extremalen der Variationsaufgabe $\delta\int F(dx) = 0$: Sie fordert bei beliebigem μ die Lagrangeschen Gleichungen

$$(9)\quad \Lambda_i(x, dx + \mu\delta x) = (d + \mu\delta)\left(\frac{\partial F(x, dx + \mu\delta x)}{\partial dx_i}\right) - \frac{\partial F(x, dx + \mu\delta x)}{\partial x_i} = 0,$$

von denen $N - 1$ unabhängig sind, mit der Zusatzbedingung

$$(10)\qquad (d + \mu\delta)F(x, dx + \mu\delta x) = 0.$$

Entwickelt man die Ansätze $\Lambda_i = 0$ nach steigenden Potenzen von μ und setzt dann die Koeffizienten der nullten, ersten, zweiten Potenz

10) Diese Verallgemeinerung u der Riemannschen Normalkoordinaten hat neuerdings W. Mayer behandelt, Jahresber. Deutsche Math.-Ver. 38 (1929), S. 260—281, bes. §§ 4, 5. Vgl. auch A. Duschek-W. Mayer, Lehrbuch der Differentialgeometrie 2, Leipzig 1930, S. 93ff.

11) Jahresber. Deutsche Math.-Ver. 39 (1930), S. 60 (Bemerkung in der Aussprache über meinen Vortrag). — Im Riemannschen Falle ist die Ersetzbarkeit von $\mathfrak{F}$ durch $[\Omega]$ ersichtlich und bekannt.

12) Ich nenne sie so, weil ich E. Noethers Ausdruck „Grundfunktion" hier schon in anderem Sinne gebraucht habe.

von μ gleich null, so erhält man $d^2 x_i$, $d\delta x_i$, $\delta^2 x_i$ ausgedrückt durch die ersten Differentiale etwa in der Gestalt ζ. Durch Ableitung stellt man die höheren Differentiale mittels der ersten dar.

Wenn man die Werte ζ in die Ω_ϱ einsetzt, gewinnt man Hauptfunktionen $[\Omega_\varrho]$; $[\Omega_1]$ verschwindet, weil es sich aus den verschwindenden Λ_i zusammensetzt. — Aus jeder Hauptfunktion h kann man eine neue erhalten, indem man in ihrem Differential $\delta h(dx, \delta x)$ die zweiten Differentiale durch ζ ersetzt; das Ergebnis ist die kovariante erste Ableitung $[h^{(1)}]$ von h. Allgemein bezeichne $[h^{(\sigma)}]$ die kovariante erste Ableitung von $[h^{(\sigma-1)}]$. Die Verfahren $[\Omega_\varrho]$, $[h^{(\sigma)}]$ führen zu einer doppelt unendlichen Reihe von Hauptfunktionen $[\Omega_\varrho^{(\sigma)}]$, eben dem genannten System $[\Omega]$.

4. E. Noethers Entwicklungen[13]) waren rein analytischer Art. Die in ihnen schlummernde Geometrie hat L. Berwald zum Leben erweckt. Er deutete die kovariante Ableitung als Parallelübertragung; diesem den *Zusammenhang* des allgemeinen N-stufigen Raumes B_N betreffenden Gedanken gesellte er die *Maßbestimmung* zu, daß entsprechend (3) auf jeder Kurve des B_N die Bogenlänge durch das Integral $s = \int F(x, dx/dt)\,dt$ gemessen werden solle. Beide Gedanken durchführend, schuf er in einer längeren Reihe von Arbeiten[14]) eine *Geometrie* solcher B_N, die eine überraschende Ähnlichkeit aufweist mit einem ganz besonderen in ihr enthaltenen Falle, mit der Geometrie Riemannscher Räume $\mathfrak{B}_N$. Ich schildere jetzt ihren Aufbau; die Zeit verbietet es, auf die Entwürfe ähnlicher und doch anders gearteter Geometrien einzugehen, wie sie z. B. von J. L. Synge[15]) und J. H. Taylor[16]) herrühren.

4. 1. Unter den Annahmen $F \neq 0$, $F_1 \neq 0$[17]) sind die Lagrangeschen Gleichungen des Variationsproblems $\delta s = 0$ nach den zweiten Ableitungen auflösbar in der Gestalt

$$x''^i = -2\Gamma^i(x, x'), \tag{11}$$

13) Vgl. auch Jahresber. Deutsche Math.-Ver. 32 (1923), S. 182—184.

14) a) Lotos (Prag) 67/68 (1919—20), S. 52—56. b) Jahresber. Deutsche Math.-Ver. 34 (1925), S. 213—220. c) Math. Zeitschr. 25 (1926), S. 40—73. d) Lotos (Prag) 74 (1926), S. 43—51. e) Journal f. d. reine u. angew. Math. 156 (1927), S. 191—222. f) Rend. Acc. dei Lincei (6) 5 (1927), S. 763—768. g) Ebenda (6) 7 (1928), S. 301—306. h) Math. Zeitschr. 30 (1929), S. 449—469. i) Monatsh. f. Math. u. Phys. 36 (1929), S. 315—330.

15) J. L. Synge, Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1925), S. 61—67.

16) J. H. Taylor, a) Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1925), S. 246—264. b) Bull. Amer. Math. Soc. 31 (1925), S. 257—262. c) Annals of Math. 2 (28) 1927, S. 620—628.

17) Die üblichen Zeichen der Variationsrechnung, wie hier F_1, benutzen wir ohne besondere Erklärung; ebenso die der Tensorrechnung.

bei der die Γ^i in den x' homogen von zweiter Stufe sein sollen (ein Strich bedeutet Ableitung nach s, während Ableitung nach einem *beliebigen* Parameter t durch einen Punkt angedeutet wird). Die Γ^i, für deren Ableitungen wir die Bezeichnungen verwenden $\partial \Gamma^i / \partial x'^k = \Gamma^i_k$, $\partial^2 \Gamma^i / (\partial x'^k \partial x'^l) = \Gamma^i_{kl}$, spielen eine wichtige Rolle bei der *Parallelübertragung* eines Vektors. Jedem Punkte (x) ordnen wir einen willkürlichen Vektor $(d\,x)$ zu, den wir das ausgezeichnete Linienelement in (x) nennen. (δx) sei irgendein Linienelement in (x). Wir sagen dann, der Vektor (ξ) in (x) werde in Bezug auf $(d\,x)$ von (x) nach $(x + \delta x)$ parallel verschoben, wenn dabei in $(x + \delta x)$ der Vektor $(\xi + \delta \xi)$ zustandekommt, dessen Bestimmungszahlen $\xi^i + \delta \xi^i$ die Zuwüchse aufweisen

$$\delta \xi^i = - \Gamma^i_{kl}(x, d\,x)\, \xi^k \delta x^l.$$ [18])

Daß diese Parallelübertragung[19]) mit E. Noethers Forderungen (9), (10) übereinkommt, hat L. Berwald dargetan.[20]) Sie hängt im allgemeinen außer vom Orte noch von der Wahl des $(d\,x)$ ab, weil dieses im allgemeinen in den *Bestimmungszahlen* Γ^i_{kl} *des affinen Zusammenhanges* steckt. — Führt man einen willkürlichen Vektor (ξ) des Punktes (x) um ein unendlich kleines Parallelogramm p parallel herum und nimmt dabei $(d\,x)$ parallel mit, so gelangt man durch die dabei vorgehende Änderung von ξ

$$\delta_1 \delta \xi^i - \delta \delta_1 \xi^i = - \tfrac{1}{2} K_k{}^i{}_{lm}(x, d\,x)\, \xi^k (\delta x^l \delta_1 x^m - \delta x^m \delta_1 x^l)$$

zum *Krümmungstensor* mit den Bestimmungszahlen

$$K_k{}^i{}_{lm} = \left(\frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial d\,x^r} \Gamma^r_{mn} d\,x^n\right) - \left(\frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial d\,x^r} \Gamma^r_{ln} d\,x^n\right) + \Gamma^r_{kl} \Gamma^i_{rm} - \Gamma^r_{km} \Gamma^i_{rl}.$$ [21])

4. 2. Die bisherigen Aussagen über den affinen Zusammenhang[22])

18) Wir sparen die Summenzeichen nach dem Brauche der Tensorrechnung.

19) In die Parallelübertragung von J. L. Synge[15]) und J. H. Taylor[16]) geht das Linienelement zweiter Ordnung ein.

20) Vgl. [14])[f]). Dort erörtert L. Berwald zugleich die Beziehung zu den invarianten zweiten Differentialen, die T. Levi-Civita eingeführt hat (Revista matem. Hispano-Americana 5 (1923), S. 165—176).

21) Die Form $K_{iklm}\, d\,x^i \delta x^k (\delta x^l d\,x^m - \delta x^m d\,x^l)$ ist die Hauptfunktion $[\Omega_2]$ von E. Noether; vgl. L. Berwald[14])[b]), S. 220.

22) Eine entsprechende Behandlung des konformen Zusammenhanges im Sinne der gleich zu erörternden Maßbestimmung gibt M. S. Knebelman, Proc. National Acad. of Sc. 15 (1929), S. 376—379. Der Bearbeitung des projektiven Zusammenhanges könnte man Untersuchungen von É. Cartan (Bull. Soc. Math. France 52 (1924), S. 205—241) nutzbar machen. T. Hosokawa entwickelt J. A. Schoutens Lehre von den linearen Übertragungen im B_N (Sc. Reports of the Tôhoku Imp. Univers. (1) 19 (1930), S. 37—51). — Siehe auch den „Zusatz bei der Korrektur"[30]).

des B_N gelten in jeder Geometrie, der nichts zugrunde liegt als ein System von Wegkurven, erklärt durch ein System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Art (11).[23]) Wir bringen jetzt darüber hinaus die Maßbestimmung s im B_N zur Geltung, indem wir den *Fundamentaltensor* einführen mit den Bestimmungszahlen

$$g_{ik}(x, \dot{x}) = g_{ki}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k},$$

die in $(\dot{x})$ homogen von nullter Stufe sind. Die Form $g_{ik}y^i y^k$ sei positiv definit. Es ist

(12) $$\det.\, g_{ik} = F^{n+1} F_1;$$

daher gibt es auch das zu $\| g_{ik} \|$ reziproke System $\| g^{ik} \|$. Mit Hilfe der g^{ik} und g_{ik} wird das Hinauf- und Herunterziehen der Zeiger in der üblichen Weise erklärt.

Aus einem Tensor $\xi^{k_1 \cdots k_m}{}_{\cdot \cdots \cdot \, l_1 \cdots l_r}(x, x')$, kurz $\xi^{(k)}{}_{\cdot (l)}$ leitet man neue her durch zwei Arten des Differenzierens. Erstens entsteht aus ihm durch Ableitung nach x'^i ein Tensor $\xi^{(k)}{}_{\cdot (l)/x'^i}$, der einen kovarianten Zeiger mehr besitzt. Wenn man zweitens mit dem Skalar

$$\xi^{(k)}{}_{\cdot (l)}\, \eta^{(1)}_{k_1} \cdots \eta^{(m)}_{k_m}\, \zeta^{l_1}_{(1)} \cdots \zeta^{l_r}_{(r)}$$

von (x) nach $(x + \delta x)$ fortschreitet und dabei die Vektoren (x'), $(\eta^{(\alpha)})$, $(\zeta_{(\beta)})$ $(\alpha = 1, \ldots, m;\ \beta = 1, \ldots, r)$ in bezug auf $(dx) = (x' ds)$ parallel überträgt, erscheint ein Tensor $\xi^{(k)}{}_{\cdot (l)/i}$, kontravariant in den Zeigern k, kovariant in den l und in i, dessen etwas umfänglichen Ausdruck ich übergehe. L. Berwald nennt ihn erste kovariante Ableitung[24]) von $\xi^{(k)}{}_{\cdot (l)}$; dieser Begriff steht E. Noethers kovarianter Ableitung einer Hauptfunktion nahe. — Jetzt sind in der Geometrie des B_N die Grundzüge einer absoluten Differentialrechnung erkennbar. Sie liegt in allen Einzelheiten ausgearbeitet vor[14]); ich erwähne davon die Gegenstücke des Satzes von G. Ricci und der Identität von L. Bianchi.

Wir verlangten von den geometrischen Größen die Invarianz gegenüber (6); in dieser Hinsicht ist folgende Bemerkung nützlich. Wir prüfen, ob die Bestimmungszahlen eines Tensors $\tau^{(k)}{}_{\cdot (l)}$ homogen sind in $(\dot{x})$; sind sie es von p-ter Stufe, so ist der Tensor mit den Bestimmungszahlen $F^{-p}\tau^{(k)}{}_{\cdot (l)}$ absolut parameterinvariant.

---

23) Diese Geometrie ist ziemlich weit entwickelt. Vgl. L. Berwald[14]b)); M. S. Knebelman, Amer. Journal of Math. 51 (1929), S. 527—564; J. Douglas, Annals of Math. (2) 29 (1928), S. 143—168.

24) Vgl. [14]c)), S. 51.

4. 3. Die *Längen- und Winkelmessung* in B_N setzen wir wie folgt fest: Wir verstehen unter der Maßzahl eines Vektors (ξ) in (x) bezüglich $(d\,x)$ die Zahl

$$(13) \qquad \lambda^2 = g_{ik}\,\xi^i\,\xi^k,$$

unter seiner Länge die positive Zahl λ. — Den zwischen 0 und π liegenden Winkel φ zweier Vektoren (ξ), (η) in (x) bezüglich $(d\,x)$ erklären wir durch die Formel

$$(14) \qquad \cos\varphi = \frac{g_{ik}\,\xi^i\,\eta^k}{\sqrt{g_{ik}\xi^i\xi^k}\,\sqrt{g_{ik}\eta^i\eta^k}}$$ [25])

mit positiven Quadratwurzeln. Senkrechte Lage zu $(d\,x)$ in (x) bezüglich $(d\,x)$ bedeutet Transversalität zu $(d\,x)$ in (x) hinsichtlich des Variationsproblems.

Unter dem Rauminhalte Π des von N Vektoren $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(N)}$ in (x) aufgespannten Spates in bezug auf $(d\,x)$ verstehen wir den Ausdruck

$$(15) \qquad \Pi = \sqrt{F^{n+1}F_1}\,(\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(N)}).$$ [26])

Demgemäß erklären wir als Rauminhalt eines Bereiches X_N in bezug auf ein Kurvenfeld $x^i = \mathfrak{X}^i(t, \alpha)$ das über X_N erstreckte Integral

$$(16) \qquad K = \int^{(N)} \sqrt{F^{n+1}F_1}\,d\,x^1 \ldots d\,x^N$$ [27]);

dabei sind für $\dot{x}$ im Integranden die Werte $\dot{\mathfrak{X}}$ zu setzen. Unsere Längen- und Winkelmessung kommen schon bei P. Finsler[28]) in folgendem Zusammenhange[29]) vor. Die Gleichung $F(x_0, \dot{x}) = 1$ zwischen den Koordinaten $\dot{x}$ stellt die Eichfläche des Punktes (x_0) dar. Zu jedem Punkte $(x_0 + \dot{x}_0)$ der Eichfläche gibt es eine Überfläche zweiten Grades mit dem Mittelpunkte (x_0), die die Eichfläche in $(x_0 + \dot{x}_0)$ oskuliert; sie hat die Gleichung

$$g^0_{ik}\,\dot{x}^i\dot{x}^k = 1, \quad \text{wo} \quad g^0_{ik} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 F^2}{\partial\dot{x}^i\,\partial\dot{x}^k}\bigg|^0,$$

25) Übereinstimmend mit J. L. Synge[15]) und J. H. Taylor[16]) c), aber abweichend von P. Finsler[47]). — Der Winkelbegriff von G. Landsberg[5]) c) und der von G. A. Bliss (Trans. Amer. Math. Soc. 7 (1906), S. 184—196) sind von den vorstehenden und voneinander verschieden.

26) Vgl. (12). — Mittels der Klammern kürzen wir in gebräuchlicher Weise eine Determinante ab.

27) P. Funk und L. Berwald, Lotos (Prag) 67—68 (1919—20), S. 45—49. — Der dort für $N = 2$ auftretende Inhaltsbegriff weicht ab von demjenigen, welchen G. A. Bliss (Amer. Journ. of Math. 37 (1915), S. 1—18) gleichfalls für $N = 2$ angegeben hat.

28) P. Finsler, Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen, Diss. Göttingen 1918, S. 42.

29) Vgl. L. Berwald[14]) a).

und heißt die in $(x_0 + \dot{x}_0)$ oskulierende Eichfläche des Punktes (x_0) in Richtung $(\dot{x}_0)$. Sie fällt in $\mathfrak{B}_N$ mit der Eichfläche des Punktes (x_0) zusammen. Ihr Dasein ist für die Geometrie des B_N von großer Bedeutung; unsere Formeln (13), (14) bedeuten Längen- und Winkelmessung in bezug auf die oskulierende Eichfläche.

Von der *Wirkung der Parallelübertragung auf die Maßbegriffe* (13), (14) ist zu sagen, daß λ und φ ungeändert bleiben, wenn man die Vektoren (ξ), (dx) bzw. (ξ), (η), (dx) parallel *längs* (dx) verschiebt. Bei Parallelverschiebung längs eines *beliebigen* (δx) dagegen ändern sich λ und φ im allgemeinen. Wird $\mathfrak{p}$ von (ξ) umfahren, so erleidet λ^2 die Änderung

$$\delta_1 \delta (\lambda^2) - \delta \delta_1 (\lambda^2) = - S_{ikpq} \xi^i \xi^k \delta x^p \delta_1 x^q; \tag{17}$$

dabei sind $S_{ikpq} = g_{ik/qp} - g_{ik/pq}$ die Bestimmungszahlen des Tensors der *Streckenkrümmung*.

4. 4. Wir führen jetzt die wichtigsten mit dem Krümmungstensor zusammenhängenden Invarianten an. Als *Krümmungsmaß* eines B_N in (x) nach (dx) und der Flächenrichtung $(dx, \delta x)$ durch (dx) bezeichnen wir die Invariante

$$\mathfrak{R}(x, dx, \delta x) = \frac{K_{iklm}\, dx^i dx^l \delta x^k \delta x^m}{(g_{il} g_{km} - g_{im} g_{kl})\, dx^i dx^l \delta x^k \delta x^m}, \tag{18}$$

die das Krümmungsmaß der $\mathfrak{B}_N$ auf B_N verallgemeinert. Ihre in $\mathfrak{B}_N$ bekannte geometrische Deutung läßt sich unschwer auf B_N übertragen. — Mit Hilfe des verjüngten Krümmungstensors $K_{k\cdot li}^{\;\,i} = K_{kl}$ kann man ferner die Größe $K_{kl} dx^k dx^l = K$ und aus ihr die Invariante

$$\frac{1}{N-1} \frac{K}{F^2} = \mathfrak{K}(x, dx) \tag{19}$$

bilden, die wir den *Krümmungsskalar* des B_N nennen. Wie in $\mathfrak{B}_N$, kann $\mathfrak{K}$ gedeutet werden als Mittel der Werte von $\mathfrak{R}$ in (x) nach (dx) und $N - 1$ in bezug auf (dx) paarweise senkrechten Flächenrichtungen durch (dx).

4. 5. Ohne auf Einzelfragen in L. Berwalds Geometrie einzugehen, wie solche z. B. von M. S. Knebelman erörtert worden sind[30]), weisen wir darauf hin, daß sich die Begriffe und Bezeichnungen dieser Geo-

30) M. S. Knebelman untersucht Gruppen von Bewegungen und Kollineationen in B_N: Proc. National Acad. of Sc. 13 (1927), S. 607—611; Amer. Journ. of Math. 51 (1929), S. 555—564. Ferner behandelt er raumtreue Transformationen, Proc. National Acad. of Sc. 16 (1930), S. 156—159. — Um auch Einzeluntersuchungen in ähnlichen Geometrien zu erwähnen, führen wir an, daß J. H. Taylor in seiner Geometrie[16]) die Frenetschen Formeln angibt[16])[a]); ferner geht er[16])[c]) auf Parallelübertragung und Transversalität in Unterräumen seiner B_N ein.

metrie auch in anderen Bezirken der Variationsrechnung bewähren. L. Berwald zeigt dies an der zweiten Variation [14] g); er gewinnt z. B. für $\delta^2 s$ an einem Extremalenbogen mit festen Enden die Formel

$$\delta^2 s = \varepsilon^2 \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial^2 F}{\partial x'^i \partial x'^k} \left[(D\xi)^i (D\xi)^k - K_{j\cdot\cdot lm}^{\cdot i} x'^j x'^l \xi^k \xi^m \right] ds,$$

wo $x^i(s) + \varepsilon \xi^i(s)$ eine Nachbarkurve der Extremale $x^i(s)$ ist $(\xi^i(s_1) = \xi^i(s_2) = 0)$ und $(D\xi)^i$ mit der kovarianten Ableitung $\xi^i{}_{/k}$ von ξ^i vermöge $(D\xi)^i = \xi^i{}_{/k} \cdot x'^k$ zusammenhängt. Es ist bekannt, daß man die vorstehende Formel bei den Kürzesten einer $\mathfrak{B}_N$ erhält; sie bleibt also gültig, wenn es sich statt um Riemannsche um allgemeine Maßbestimmung handelt, sofern man nur die Zeichen in deren Sinne versteht.

4. 6. Zum Hauptgegenstande zurückkehrend, nennen wir folgende Klassen *besonderer* B_N, von denen jede in allen vorhergehenden enthalten ist:

I. Die Räume ohne Streckenkrümmung ($S_{ikpq} = 0$, (17)).

II. Die Landsbergschen Räume, d. h. die B_N, in denen Riccis Satz wörtlich, also in der Gestalt $g_{ik/l} = 0$ gilt.

III. Die affin zusammenhängenden Räume im engeren Sinne, d. h. die B_N, in denen die Γ^i_{kl} nur vom Orte abhängen. Ein Raum dieser Art, dessen Krümmungstensor überall verschwindet, ist Euklidisch-affin; die Parallelübertragung ist in ihm integrierbar. Es läßt sich zeigen, daß die Euklidisch-affinen Räume mit den Minkowskischen[31]) übereinstimmen, die dadurch ausgezeichnet sind, daß man die Grundfunktion durch einen Veränderlichenwechsel auf die von (x) freie Gestalt $\Phi(\dot{x})$ bringen kann.

IV. Die Riemannschen Räume, d. h. die B_N, in denen die g_{ik} nur vom Orte abhängen.

5. Wir betrachten jetzt unter den besonderen B_N weiter die B_N *mit geraden Kürzesten.*[32]) Von ihnen beweist L. Berwald[14]) h) den Satz: Das Krümmungsmaß (18) eines B_N mit geraden Kürzesten nach willkürlichem (dx) ist nach jeder Flächenrichtung durch (dx) dasselbe und daher gleich dem Krümmungsskalar (19). Ferner gelingt ihm folgende Verallgemeinerung eines von F. Schur[33]) herrührenden Satzes:

31) Vgl. H. Minkowski, Geometrie der Zahlen, Leipzig 1896, Kap. 1.

32) Vgl. a) G. Hamel, Math. Ann. 57 (1903), S. 231—264. b) W. Wirtinger, Monatsh. f. Math. u. Phys. 32 (1923), S. 1—14.

33) F. Schur, Math. Ann. 27 (1886), S. 537—567.

Wenn das Krümmungsmaß eines B_N, $N > 2$, in einem willkürlichen (dx) nach jeder Flächenrichtung durch (dx) dasselbe ist, und wenn es nur vom Orte abhängt — statt wie im allgemeinen auch von (dx) —, so ist es *fest*. Hieraus folgt für $N > 2$ die (auch für $N = 2$ gültige) Aussage, daß es keinen B_N mit geraden Kürzesten gibt, dessen Krümmungsskalar eine nicht festwertige Ortsfunktion wäre. Denn in einem solchen B_N würden die Voraussetzungen des Schurschen Satzes gelten.

Wir stoßen hier auf die Räume *fester Krümmung*, die gleichfalls besonders hervorzuheben sind. L. Berwald zeigte [14)i)], daß unter Räumen mit geraden Kürzesten diese sich durch folgende Eigenschaft kennzeichnen lassen, die ein bekanntes Merkmal der Riemannschen Räume fester Krümmung verallgemeinert. Man bildet den Raum mit geraden Kürzesten so auf den Euklidischen E_N ab, daß die Kürzesten in die Geraden übergehen. Das Bild der Überfläche, die entsteht, wenn man durch einen Punkt P einer Extremale $\mathfrak{E}$ die zu $\mathfrak{E}$ transversalen Richtungen zieht und extremal verlängert, ist eine Überebene durch den Bildpunkt $\mathfrak{P}$ von P, die Transversalüberebene der Bildgeraden von $\mathfrak{E}$ durch $\mathfrak{P}$. Nun besteht das genannte Kennzeichen der Räume fester Krümmung darin, daß die Transversalüberebenen der Bildgeraden einer beliebigen Extremale ein Büschel bilden.

6. Dem Wesen der B_N *mit geraden Kürzesten und fester negativer Krümmung* $\mathfrak{K} = -\varkappa^2$ entspricht in E_N eine Geometrie, in der die Entfernung zweier Punkte P, Q des B_N in den Ausdruck

$$\sigma = (2\varkappa)^{-1} \log (\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}_2) \tag{20}$$

übergeht; dabei sind $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ die Bilder von P, Q, ferner $\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2$ die Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ mit zwei festen Mantelüberflächen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$, und $(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}_2)$ das Doppelverhältnis der vier Punkte. Diese geometrische Einsicht gewinnt P. Funk[34]) für $N = 2$ folgendermaßen: Er kennzeichnet den Fahrstrahl r, der von einem Linienelemente $(x, \dot{x})$ in dessen Richtung zu einem Mantelpunkte führt, durch partielle Differentialgleichungen als Funktion des Linienelementes. Diese lauten für beliebiges N[35])

$$r \frac{\partial r}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial r}{\partial x^i} = 0. \tag{21}$$

Andererseits findet man für die Grundfunktion des B_N aus der Forderung gerader Kürzester und festen Wertes von $\varkappa$ die Gestalt $F = (2\varkappa)^{-1}(r^{-1} + \bar{r}^{-1})$. Von den hierin auftretenden Größen r bzw. $\bar{r}$

34) Math. Ann. 101 (1929), S. 226—237.

35) L. Berwald[14)h)], S. 454—460.

läßt sich mit Hilfe von (21) zeigen, daß sie Fahrstrahlen sind, die von dem betrachteten Linienelemente in dessen Richtung bzw. in der entgegengesetzten zu je einem festen Mantel führen. Da s, genommen längs der Kürzesten von P bis Q, den Wert σ besitzt, so ist die angegebene Beziehung zwischen B_N und E_N hergeleitet. — Besonders einfach gestaltet sich ein Grenzfall vorstehender Geometrie, P. Funks „Geometrie der spezifischen Maßbestimmung"[36]) mit der Grundfunktion $(2\varkappa)^{-1}r^{-1}$.

Fügt man den genannten beiden Forderungen die dritte hinzu, daß das „starke Monodromieaxiom"[32])[a]) $F(x, -\dot{x}) = F(x, \dot{x})$ erfüllt sei, so fallen die beiden Mäntel $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ in einen $\mathfrak{M}$ zusammen; in (20) treten an Stelle von $\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2$ die Schnittpunkte $\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ mit der geschlossenen konvexen Überfläche $\mathfrak{M}$. Daher kommt in dem Mantel $\mathfrak{M}$ die bekannte Geometrie zustande[37]), die von D. Hilbert[38]) herrührt.

Gerade Kürzeste und die Krümmung *null* weisen die Minkowskische Geometrie auf und gewisse Nicht-Minkowskische Geometrien, deren Grundfunktion für $N = 2$ P. Funk[39]), für beliebiges N L. Berwald[40]) ermittelt hat. Neuerdings hat P. Funk die ebene Minkowskische Geometrie und die der spezifischen Maßbestimmung durch die gemeinsame Eigenschaft gekennzeichnet, daß die Geraden Kürzeste und Linien gleichen Abstandes von einer Geraden wieder Gerade sind.[41])

7. L. Berwalds Lehre von den B_N nach dem Muster der $\mathfrak{B}_N$ liegt bei *beliebigen* N einstweilen in den bisher geschilderten Grundzügen vor[42]); in allen Einzelheiten ausgestaltet hat L. Berwald die *Geometrie der* B_2[14])[e]). Bei diesen bezeichnen wir die Koordinaten mit x, y und die g_{ik} entsprechend der Flächentheorie mit e, f, g. Das Krümmungs*maß* (18) stimmt hier mit dem Krümmungs*skalar* (19) überein; die Größe $\mathfrak{K}$ wurde für $N = 2$ schon von A. L. Underhill[6]) eingeführt. Ferner gibt es einen *Skalar der Streckenkrümmung*

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2F^2F_1}\left[\frac{\partial(\mathfrak{K}\sqrt{eg-f^2})}{\partial\dot{x}}\frac{\partial F}{\partial\dot{y}} - \frac{\partial(\mathfrak{K}\sqrt{eg-f^2})}{\partial\dot{y}}\frac{\partial F}{\partial\dot{x}}\right]. \tag{22}$$

36) P. Funk[34]), § 4.

37) P. Funk[34]), § 3; L. Berwald[14])[h]), § 5.

38) Vgl. D. Hilbert, Math. Ann. 46 (1895), S. 91—96.

39) P. Funk[34]), § 5.

40) L. Berwald[14])[h]), § 7.

41) P. Funk, Monatsh. f. Math. u. Phys. 37 (1930), S. 153—158.

42) Sie beantwortet schon auf dieser Stufe alle Fragen, die B. Hostinský (C. R. Acad. sc. Paris 182 (1926), S. 508—509) für eine solche Geometrie aufgeworfen hat.

Als eine zur Einteilung der B_2 geeignete Größe erweist sich die aus F durch bloße Ableitung nach $\dot{x}$, $\dot{y}$ herleitbare Invariante

$$(23) \qquad \mathfrak{H} = \frac{1}{4} F^{-\frac{1}{2}} F_1^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \frac{\partial F_1}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}} \right),$$

die L. Berwald den *Hauptskalar* des B_2 nennt. Man stößt auf $\mathfrak{H}$ bei folgenden Fragen:

1. Wie ändert sich die Maßzahl (13) eines Vektors (ξ, η) in (x, y) bezüglich eines Linienelementes $(x, y; \dot{x}, \dot{y})$, wenn man dessen Richtung unendlich wenig abändert? — Wandelt man $\dot{x}, \dot{y}$ in $\dot{x} + \varepsilon F \bar{\xi}$, $\dot{y} + \varepsilon F \bar{\eta}$, so lautet die Antwort

$$\delta_0 (\lambda^2) = 4 \varepsilon \Pi^2 \bar{\Pi} \mathfrak{H};$$

dabei bedeutet Π bzw. $\bar{\Pi}$ den auf $(x, y; \dot{x}, \dot{y})$ bezogenen Inhalt des Parallelogramms (vgl. (15)), das der in Richtung $(\dot{x}, \dot{y})$ gelegene, normierte Vektor $(x' = F^{-1} \dot{x},\ y' = F^{-1} \dot{y})$ mit dem Vektor (ξ, η) bzw. $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ bildet.

2. Wie ändert sich dieselbe Maßzahl λ^2, wenn man $(x, y; \dot{x}, \dot{y})$ als das ausgezeichnete Linienelement ansieht und die Figur $[(\xi, \eta), (\dot{x}, \dot{y})]$ von (x, y) nach $(x + \delta x, y + \delta y)$ parallel überträgt? — Versteht man unter dem Zeichen $(d/ds)_{\mathfrak{E}}$ die Ableitung nach dem Bogen s der von (x, y) in Richtung (x', y') ausgehenden Extremale, so lautet die Antwort

$$\delta (\lambda^2) = -4 \Pi^2 \Pi^* \left(\frac{d \mathfrak{H}}{d s} \right)_{\mathfrak{E}},$$

wo Π^* die Fläche des Parallelogramms der Vektoren (x', y'), $(\delta x, \delta y)$ ist.

3. Wie ändert sich λ^2, wenn man dieselbe Figur um das unendlich kleine Parallelogramm $\mathfrak{p}$ der Vektoren $(\delta x, \delta y)$, $(\delta_1 x, \delta_1 y)$ parallel herumführt? — Ist $\hat{\Pi}$ der Inhalt von $\mathfrak{p}$, so lautet die Antwort

$$\delta_1 \delta (\lambda^2) - \delta \delta_1 (\lambda^2) = 4 \Pi^2 \hat{\Pi} \left(\frac{d^2 \mathfrak{H}}{d s^2} \right)_{\mathfrak{E}}.$$

Nach früherem (17) ist daher $(d^2 \mathfrak{H} / d s^2)_{\mathfrak{E}}$ der Skalar (22) der Streckenkrümmung.

Mit Hilfe von $\mathfrak{H}$ unterscheiden wir nun in B_2 dieselben vier Sonderklassen allgemeiner Räume wie oben in B_N, über die wir aber hier erheblich mehr aussagen können.

I. Die Räume ohne Streckenkrümmung, gekennzeichnet durch $(d^2 \mathfrak{H} / d s^2)_{\mathfrak{E}} = 0$. In ihnen und nur in ihnen ist $\mathfrak{K} \sqrt{eg - f^2}$ eine Ortsfunktion; man kann sie daher auch als diejenigen B_2 erklären, in denen es zu einem Gebiete $\mathfrak{G}$ eine *Gesamtkrümmung* $T = \iint\limits_{\mathfrak{G}} \mathfrak{K} \sqrt{eg - f^2}\, dx\, dy$ gibt.

II. Die Landsbergschen Räume, die sich durch $(d\mathfrak{H}/ds)_{\mathfrak{C}} = 0$ kennzeichnen lassen. In ihnen und nur in ihnen gilt folgende von G. Landsberg[5]) stammende Verallgemeinerung des Gauß-Bonnetschen Integralsatzes

$$T + \int_{\mathfrak{C}} \frac{ds}{R} = \int_{\mathfrak{C}} d\Theta.$$

Dabei bedeutet R^{-1} die von G. Landsberg[5]) als *extremale Krümmung*[43]) eingeführte Invariante, die an der Randlinie $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{G}$ zu bilden ist; ferner ist

$$\Theta = \int F^{-\frac{1}{2}} F_1^{\frac{1}{2}} (\dot{x}\, d\dot{y} - \dot{y}\, d\dot{x})$$

der Landsbergsche Winkel[25]), der durch Integration zwischen zwei Richtungen $(\dot{y}/\dot{x})_1$ und $(\dot{y}/\dot{x})_2$ bei festen x, y gefunden wird.[44])

III. Die affinzusammenhängenden Räume im engeren Sinne, die sich hier durch die Eigenschaft $\mathfrak{H}_{/1} = \mathfrak{H}_{/2} = 0$ kennzeichnen lassen.

IV. Die Riemannschen Räume, gekennzeichnet durch $\mathfrak{H} = 0$.

Die Räume III. zerfallen in

a) solche mit nicht verschwindender Krümmung. In ihnen ist $\mathfrak{H}$ fest und von null verschieden. Die Grundfunktion hat eine der drei folgenden Gestalten

$$\alpha) \qquad F = (L_0\dot{x} + M_0\dot{y})^{r_0} (L_1\dot{x} + M_1\dot{y})^{r_1};$$

L, M sind Ortsfunktionen mit positiver Determinante, r_0, r_1 sind solche Festwerte, daß $r_0 r_1 < 0$, $r_0 + r_1 = 1$ ist, und es ist

$$\mathfrak{H} = \tfrac{1}{2}(r_1 - r_0)\,(-r_1 r_0)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\beta) \quad F = [(L_0\dot{x} + M_0\dot{y})^2 + (L_1\dot{x} + M_1\dot{y})^2]^{\frac{1}{2}} \exp\left(k \operatorname{arc\,tg} \frac{L_1\dot{x} + M_1\dot{y}}{L_0\dot{x} + M_0\dot{y}}\right),$$

$$\mathfrak{H} = \frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

$$\gamma) \quad F = (L_0\dot{x} + M_0\dot{y}) \exp\left(\varepsilon \frac{L_1\dot{x} + M_1\dot{y}}{L_0\dot{x} + M_0\dot{y}}\right), \quad \varepsilon^2 = 1, \quad \mathfrak{H} = \varepsilon.$$

b) solche von der Krümmung null; das sind die Minkowskischen Räume.[45])

---

43) Zu diesem wichtigen Begriffe vgl. auch L. Berwald [14]) [a]). P. Funk, Math. Zeitschr. 3 (1919), S. 87—92; ebenda 28 (1928), S. 95—96.

44) Über den Sinn des Integrals $\int_{\mathfrak{C}} d\Theta$ Näheres bei G. Landsberg [5]) [c]).

45) Gewisse Minkowskische Räume treten unter dem Gesichtspunkte der Lehre von den Transformationsgruppen auf bei E. Nohel, Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. zu Wien 123 (1914), Abt. IIa, S. 2085—2115; A. Maccone, Rend. Acc. dei Lincei (5) 32^{I} (1923), S. 327—331.

8. Bisher habe ich über L. Berwalds Geometrie berichtet; die Zeit reicht nicht hin, P. Finslers schon angeführte, gleich bedeutsame Theorie der „Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen"[28]) zu schildern. Es ist da Beschränkung auf ein paar Stichworte geboten. Der Erklärung der Grundbegriffe — des Projizierens, der Längen- und Winkelmessung — folgt die Kurvenlehre: Schmiegungsräume und Kurvennormalen, Krümmungen, Bestimmung einer Kurve aus diesen ihren Invarianten. Im letzten Teile, der Flächenlehre, behandelt P. Finsler die geodätischen Linien, die Asymptotenlinien, Dupins Indikatrix, die Krümmungen der Flächen, besonders der zweistufigen, ferner besondere Flächen.

9. Trotz so flüchtigen Blickes auf diese zweite allgemeine Theorie sei es gestattet, ein wenig dabei zu verweilen, wie sich in ihrem Lichte *differentialgeometrische Einzelfragen* ausnehmen. Solche hat gerade in letzter Zeit G. Grüß[46]) behandelt. Wir vermerken, daß die dabei benutzte Messung des Winkels zweier Richtungen $(\dot{x})$, $(\underset{\cdot}{x})$ nach P. Finsler[47])

$$\cos\varphi = [F(x, \dot{x})]^{-1} \dot{x}^i \frac{\partial F(x, \underset{\cdot}{x})}{\partial \underset{\cdot}{x}^i}$$

von L. Berwalds Formel (14) abweicht — sie ist in den Schenkeln nicht symmetrisch; daher muß dahingestellt bleiben, ob L. Berwalds Geometrie eine entsprechende Behandlung jener Fragen ermöglicht.

Besonders einfach gerät die Verallgemeinerung der Eigenschaften *geodätischer Kegelschnitte* der $\mathfrak{B}_2$ auf B_2.[46])[c]) G. Grüß versteht unter einem geodätischen Kegelschnitte eines B_2, in dem er den Ort durch (u, v) festlegt, die Kurve mit der Gleichung

$$\sigma_1(u, v) \pm \sigma_2(u, v) = c,$$

wo c fest ist und $\sigma_i(u, v)$, $i = 1, 2$, den im Sinne der Maßbestimmung $s = \int f(u, v, du/dt, dv/dt)\,dt$ aufgefaßten geodätischen Abstand des Punktes $P(u, v)$ von den beiden festen Punkten $P_i(u, v)$ bedeutet — den *Brennpunkten* des Kegelschnitts. Er findet den Satz: In jedem Punkte eines geodätischen Kegelschnittes sind absolut gleich die Cosinus der Winkel, die der Kegelschnitt mit den extremalen Brennstrahlen PP_i bildet. Es gilt auch seine Umkehrung: Die Winkelhalbierenden eines Netzes geodätischer Linien stellen geodätische Kegelschnitte dar — die Verallgemeinerung eines Satzes von J. Weingarten.

46) a) Math. Ann. 100 (1928), S. 1—31. b) Math. Zeitschr. 29 (1929), S. 470—480. c) Jahresber. Deutsche Math.-Ver. 38 (1929), S. 83—91. d) Math. Ann. 103 (1930), S. 162—184.

47) P. Finsler[28]), S. 39.

Es gelang G. Grüß ferner, die Lehre von den *Geweben*, wie G. Scheffers, R. Rothe und R. v. Lilienthal[48]) sie für $\mathfrak{B}_2$ entwickelt haben, auf die B_2 des B_3 zu übertragen. [46]) a) Gewebe heißt ein Kurvennetz dann, wenn die Länge s jedes geschlossenen, nur aus Netzkurven bestehenden Weges null ist. G. Grüß zeigt, daß ein Netz dann und nur dann ein Gewebe ist, wenn seine Winkelhalbierenden Extremalen des Integrals $\int(\cos\psi)^{-1}f(u, v, \dot{u}, \dot{v})dt$ sind, wo ψ den halben Maschenwinkel des Netzes bedeutet. Auf die Einzelheiten dieser Untersuchung einzugehen, muß ich mir versagen; ich begnüge mich damit, aus den weiteren Entwicklungen von G. Grüß seinen Hinweis auf eine besondere Art von Variationsproblemen hervorzuheben, die mit *symmetrischer Transversalitätsbedingung.* [46]) a) b) Während diese im B_N, $N > 2$ nach W. Blaschke[49]) an die Riemannsche Maßbestimmung gebunden ist, kommt sie im B_2 viel allgemeineren Grundfunktionen zu, deren Gestalt J. Radon[50]) und G. Grüß ermittelt haben,

$$f(u, v, \dot{u}, \dot{v}) = \dot{v}\, h\,(u, v)\, e^{\int\frac{dz}{z-\chi(z)}}, \quad z = \frac{\dot{u}}{\dot{v}}, \quad \dot{v} > 0,$$

wo h eine willkürliche Ortsfunktion, $\chi(z)$ eine mit ihrer Umkehrfunktion übereinstimmende Funktion ist. Diese Maßbestimmung $\mathfrak{f}$ nimmt insofern eine Mittelstellung zwischen der Riemannschen und einer ganz beliebigen ein, als bei der Riemannschen *jeder* Winkel von der Reihenfolge der Schenkel unabhängig ist, bei $\mathfrak{f}$ nur der *rechte*, bei ganz beliebiger *gar kein* Winkel. $\mathfrak{f}$ hat mit der Riemannschen Maßbestimmung die Eigenschaft gemein, daß ein Kurvennetz, welches spiegelbildlich ist zu einer Schar $\mathfrak{C}$ von Kurven und der Schar $\mathfrak{T}$ ihrer Transversalen, *Diagonalnetz* ist zu dem aus $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{T}$ bestehenden Netze. Darunter ist zu verstehen, daß gegenüberliegende Ecken eines einfachen Netzvierecks des einen Netzes auf eine und dieselbe Kurve des anderen Netzes zu liegen kommen, wenn die Längen aller Vierecksseiten gegen null streben.

10. Während die Invariantentheorie des einfachsten Variationsproblems zu einem gewissen Abschlusse gediehen ist, hat man einen solchen bei den höheren Variationsproblemen noch nicht erzielt, weil

---

48) Zum Schrifttume vgl. G. Scheffers, Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume, 2. Aufl., 1 (1911), S. 181.

49) W. Blaschke, Ber. d. Sächs. Ges. d. Wissensch. zu Leipzig, Math.-phys. Klasse, 68 (1916), S. 50—55; Math. Zeitschr. 8 (1920), S. 115—122 (§ 3).

50) J. Radon, Ber. d. Sächs. Ges. d. Wissensch. zu Leipzig, Math.-phys. Klasse, 68 (1916), S. 123—128.

bei diesen das Gegenstück des Reduktionssatzes von E. Noether fehlt. Über den Stand der Dinge *bei dem Integrale*

$$s = \int F(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ldots, x^{(q)}, y^{(q)})\,dt$$

($n = 1$, $N = 2$, $q \geqq 2$ beliebig, vgl. (2)) kann ich auf Grund brieflicher Mitteilungen von L. Berwald über ungedruckte Untersuchungen aus dem Jahre 1922 folgendes berichten. Deutet man die Ableitung nach s durch einen Strich an und setzt

$$\sum_l^{0,\,q-k} \binom{k+l}{l} (-1)^l \frac{d^l}{ds^l} F_{x^{(k+l)}} = u_k, \qquad \sum_l^{0,\,q-k} \binom{k+l}{l} (-1)^l \frac{d^l}{ds^l} F_{y^{(k+l)}} = v_k,$$

so bestehen die Beziehungen

$$u_k x' + v_k y' = 0 \quad (k = 0, 2, \ldots, q), \qquad u_1 x' + v_1 y' = 1.$$

Ihnen zufolge kann man setzen

$$u_{q-h} = -y'\Phi_h, \quad v_{q-h} = x'\Phi_h, \quad h = 0, 1, \ldots, q-2, q.$$

Φ_h ist eine Punktinvariante vom Gewichte 1; mithin ist $\mathfrak{J}_h = \Phi_h/\Phi_0$ eine absolute Punktinvariante und — wegen der Wahl des Parameters — auch eine absolute Parameterinvariante. Die letzte $\mathfrak{J}_q$ dieser Invarianten verschwindet für die Extremalen $\delta s = 0$. Ist $q \geqq 3$, so liegen in $\mathfrak{J}_1, \ldots, \mathfrak{J}_{q-2}$ Invarianten von niedrigerer als $(2q)$-ter und höherer als q-ter Ordnung vor, von denen sich allerdings ein Teil auch auf Festwerte zurückziehen kann. — Nicht benutzt wurde bisher die Gleichung $u_1 x' + v_1 y' = 1$; sie liefert zwar keine Invariante, wohl aber einen parameterinvarianten Vektor mit den kontravarianten Bestimmungszahlen $\xi = -v_1/\Phi_0$, $\eta = u_1/\Phi_0$. Er verdient die Bezeichnung des Normalenvektors der Kurve $\mathfrak{C}$ insofern, als die Beziehung $u_1 \Xi + v_1 H = 0$ die Transversalität des Vektors (Ξ, H) zu $\mathfrak{C}$ aussagt. — Ist s die Affinlänge $\int (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^{\frac{1}{3}} dt$, so wird $\Phi_0 = \frac{1}{3}$; es ist $\xi = 3x''$, $\eta = 3y''$ (bis auf den Faktor 3) der Vektor der Affinnormale, und die einzige Invariante $\Phi_2/\Phi_0 = \mathfrak{J}_2 = -2(x''y''' - y''x''')$ ist (bis auf den Faktor -2) die Affinkrümmung.

Obwohl die vorstehende Theorie das Dasein der Invarianten $\mathfrak{J}_1, \ldots, \mathfrak{J}_{q-2}$ aufdeckt, ließ L. Berwald sie unveröffentlicht, weil sie *nicht alle* Invarianten und selbst im Falle $q = 2$ nicht immer die Invariante niedrigster Ordnung liefert. Bei der Grundfunktion $F = \left(\frac{\ddot{y}}{y} - \frac{\dot{y}\ddot{x}}{y\dot{x}}\right)^{\frac{1}{2}}$ z. B. ergibt sich $\mathfrak{J}_2 = \frac{d}{ds}\left(\frac{x''}{x'} - 2\frac{y'}{y}\right)$, während nach E. Nohel[45]) schon $\frac{x''}{x'} - 2\frac{y'}{y}$ selbst invariant ist.

Als Invarianten in unserem allgemeinen Sinne wurden im bisherigen Schrifttume behandelt erstens die *extremale Krümmung* S, von der Th. De Donder die Punktinvarianz[7]) und ich die Parameterinvarianz[51]) bewies; sie steht zu $\mathfrak{J}_q$ in der Beziehung $S = -|FF_1|^{-\frac{1}{2}}\Phi_0\mathfrak{J}_q$, wo

$$F_1 = \frac{1}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\left(\frac{\partial^2 F}{(\partial x^{(q)})^2} + \frac{\partial^2 F}{(\partial y^{(q)})^2}\right)$$

gesetzt ist. Th. De Donder gab zweitens mit Hilfe eines Verfahrens, das aus einer Invariante (S) eine neue (höherer Ordnung) erzeugt, eine Invariante an, die A. L. Underhills Größe $\mathfrak{K}$[6]) verallgemeinert. Drittens fand ich[51]), daß das Integral

$$K = \iint (F^{2q+1}F_1)^{\frac{1}{2}}\,dx\,dy$$

eine absolute Invariante in beiderlei Sinne ist; es verallgemeinert den Flächeninhalts-Begriff (16) von P. Funk und L. Berwald. Ist s der Affinbogen, so wird K der gewöhnliche Flächeninhalt, also dasjenige Integral, welches mit s zusammen die einfachste isoperimetrische Aufgabe der Affingeometrie liefert.

11. In der Variationsrechnung *vielfacher Integrale* beziehen sich die meisten der vorliegenden invariantentheoretischen Ergebnisse auf den Fall, daß in (2) n beliebig, $N = n+1$, $q = 1$ ist, dem Abhandlungen von M. Fujiwara[52]) und Th. De Donder[8]) sowie mehrere meiner eigenen Arbeiten[53]) gelten. Nach einer Bemerkung von J. Radon[54]) und G. Vivanti[55]), die einen Sonderfall des Satzes von G. Usai[2]) darstellt, haben (2) und (3) hier die Gestalt

$$G(x_i, x_{i,\alpha}) = H(x_i, \theta_i) = F\,^{56}), \quad I = \int^{(n)} F\,du, \quad du = du_1 \ldots du_n.$$

11. 1. Man weist leicht die Punktinvarianz des auf zwei Flächen x_i, $\dot{x}_i$ bezüglichen Transversalitätsausdrucks $\mathfrak{T} = (\partial F/\partial\theta_i)\dot{\theta}_i$ und der Weierstraßschen E-Funktion $E(x_i, \theta_i, \dot{\theta}_i) = \dot{F} - \mathfrak{T}$ nach. Aus der

51) L. Koschmieder, Math. Zeitschr. 25 (1926), S. 74—86.

52) M. Fujiwara, The Tôhoku Math. Journ. 1 (1911/12), S. 8—18 ($n = 2$).

53) L. Koschmieder, a) Math. Ann. 94 (1925), S. 252—261. b) Math. Zeitschr. 24 (1926), S. 181—190. c) Revista matem. Hispano-Americana (2) 1 (1926), S. 129—146. d) Proc. Koninkl. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam 31 (1928), S. 140—150. e) Ebenda, S. 469—484.

54) J. Radon, Monatsh. f. Math. u. Phys. 22 (1911), S. 53—63.

55) G. Vivanti, Rend. del Circ. Matem. di Palermo 33 (1912), S. 268—274.

56) Eine Verwechslung mit dem oben in anderem Sinne gebrauchten gleichen Zeichen kommt nicht in Frage.

Invarianz der ersten Variation δI leitet man die Invarianzeigenschaften der Größe W her, durch die sich die Variationsableitungen von F in der Gestalt $W_i = W\theta_i$ ausdrücken lassen[55]), $W' = DW$, $\overline{W} = W$[57]). Zur Herstellung einer absoluten Punktinvariante braucht man noch das Gegenstück Φ[56]) der Funktion F_1 einfacher Integrale, das durch die Formeln erklärt wird

$$\Phi = \det.\,\Phi_{\alpha\beta}, \quad \Phi_{\alpha\beta} = \frac{1}{\theta^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_{i,\alpha}\,\partial x_{i,\beta}}, \quad \theta^2 = \theta_i\theta_i,$$

aber auch wie folgt erhalten werden kann: In der $(n+1)$-reihigen Determinante der $\partial^2 F/(\partial\theta_h\partial\theta_k)$ ist adj. $\partial^2 F/(\partial\theta_h\partial\theta_k) = \Phi\theta_h\theta_k$. Th. De Donder wies[8]) die Größe $W\Phi^{-\frac{1}{2n}}$ als eine absolute Punktinvariante nach; ich stellte darüber hinaus fest[53])[b]), daß

$$S = Wf^{-\frac{1}{2n}}, \quad \text{wo} \quad f = F^{n+2}\Phi, \tag{24}$$

eine absolute Punkt- und Parameterinvariante ist. Ich nenne sie die *extremale mittlere Überflächen-Krümmung*, weil, wenn I den Inhalt eines Stückes einer $\mathfrak{B}_2$ in $\mathfrak{B}_3$ bedeutet, S in die mittlere Krümmung der $\mathfrak{B}_2$ übergeht[53])[a]). — Ferner fand ich die Integralinvariante

$$K = \int^{(n+1)} f^{\frac{1}{2n}}\,dx, \quad dx = dx_1 \ldots dx_{n+1}. \tag{25}$$

Sie stellt wiederum eine Verallgemeinerung von (16) dar. Indem wir die im Integranden im allgemeinen auftretenden Größen $x_{i,\alpha}$ aus den Gleichungen eines das Integrationsgebiet X_{n+1} durchziehenden Überflächen-Feldes entnehmen, bezeichnen wir K als den *Rauminhalt* von X_{n+1} bezüglich jenes Feldes. K hängt im allgemeinen von dessen Wahl ab; bedeutet aber I den Inhalt eines Stückes einer $\mathfrak{B}_n$ in $\mathfrak{B}_{n+1}$, so ist das nicht der Fall, K ist dann der gewöhnliche Rauminhalt des Gebietes der $\mathfrak{B}_{n+1}$.[58])

11. 2. Ein weiterer differentialgeometrischer Gesichtspunkt tritt in die Variationsrechnung von I dadurch ein, daß man I als Inhalt eines Überflächen-Stückes im „allgemeinen Raume" Ξ_{n+1} betrachtet und dann in ihm folgendermaßen ein *Linienelement* gewinnt ([53])[e]), § 8). In einer $\mathfrak{B}_{n+1}$ mit dem Linienelemente $d\mathfrak{s}^2 = \mathfrak{a}_{ik}dx_i dx_k$ hat ein Stück einer $\mathfrak{B}_n$ den Inhalt

$$\mathfrak{O} = \int^{(n)} \mathfrak{F}\,du, \quad \mathfrak{F}^2 = \mathfrak{A}_{ik}\theta_i\theta_k, \quad \mathfrak{A}_{ik} = \text{adj.}\,\mathfrak{a}_{ik} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathfrak{F}^2}{\partial\theta_i\,\partial\theta_k}.$$

57) Zur Schreibweise vgl. (5), (7).

58) S. [53])[a]) $(n = 2)$.

Entsprechend führt man im allgemeinen Falle des Integrals $I = \int^{(n)} F\,du$ zur Erklärung eines maßbestimmenden Grundtensors die Größen $A_{ik} = \frac{1}{2}\partial^2 F^2/(\partial\theta_i\partial\theta_k)$ ein, mit denen wegen der in den θ_i homogenen Beschaffenheit von F[55]) die Formel gilt $F^2 = A_{ik}\theta_i\theta_k$. Man findet $A = \det. A_{ik} = F^{n+2}\Phi$; daher ist $A > 0$, wenn, wie wir annehmen, $F > 0, \Phi > 0$. Die Größen $a^{ik} = A^{-\frac{1}{n}} A_{ik}$ erweisen sich als die parameterinvarianten, bei Punkttransformationen kontravarianten Bestimmungszahlen eines Tensors zweiter Stufe; die kovarianten Bestimmungszahlen a_{ik} dieses *maßbestimmenden Grundtensors* sind die mit $A^{\frac{1}{n}-1}$ multiplizierten algebraischen Ergänzungen der A_{ik} bezüglich A. Die A_{ik}, a^{ik}, a_{ik} hängen von den x_l *und* θ_l ab; von den θ_l *frei* sind sie im Riemannschen Sonderfalle. — Die Größe $ds^2 = a_{ik}dx_i dx_k$ bezeichnen wir als das Linienelement des Ξ_{n+1} bezüglich des Flächenelementes (x_i, θ_i). Es ist

$$a = \det. a_{ik} = A^{\frac{1}{n}} = f^{\frac{1}{n}}; \quad K = \int^{(n+1)} \sqrt{a}\,dx,$$

wie in $\mathfrak{V}_{n+1}$.

11. 3. Die vorstehenden Invarianten hatten ihren Ursprung in der ersten Variation; weitere erhielt ich aus der *zweiten* Variation, die ich zuvor auf folgende Gestalt brachte ([53])[e]), § 9):

$$(26)\quad \delta^2 F = \delta \frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\frac{\partial F}{\partial x_{i,\alpha}}\,\delta x_i\right) + W\,\delta v - v\,\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\Phi_{\alpha\beta}\,\frac{\partial v}{\partial u_\beta}\right) + v Q_i\,\delta x_i,$$

$$v = \theta_i\,\delta x_i, \quad Q_i = \frac{\partial W}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\Phi_{\alpha\beta}\,\frac{\partial\theta_i}{\partial u_\beta}\right).$$

Man kann auch

$$v Q_i\,\delta x_i = L_{ik}\,\delta x_i\,\delta x_k, \quad L_{ik} = \tfrac{1}{2}(Q_i\theta_k + Q_k\theta_i)$$

setzen. Ich verweile einen Augenblick bei der Formel (26), die über frühere einschlägige Ergebnisse in verschiedener Richtung hinausgeht: Die Formeln von G. Kobb[59]) und A. Kneser[60]) beziehen sich auf *Doppel*integrale; die von Kobb ist für eine Extremale hergeleitet, die von Kneser unter der Annahme einer *Normal*variation aufgestellt. Die Formel (26) unterliegt keiner der genannten drei Beschränkungen. Sie verallgemeinert die Umformung der zweiten Variation *einfacher* Integrale, die A. L. Underhill[61]) angegeben hat.

59) G. Kobb, Acta math. 16 (1892—93), S. 89—107, 115.

60) A. Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung, 2. Aufl., S. 336—348.

61) A. a. O.[6]), § 6, § 7.

Handelt es sich um eine Extremale, ist also $W = 0$, so lassen sich die Größen L_{ik} in der Gestalt $L_{ik} = L\theta_i\theta_k$ darstellen, wobei L die Funktion verallgemeinert, die man bei einfachen Integralen nach K. Weierstraß mit F_2 bezeichnet[62]); es wird

$$\delta^2 F = \delta \frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\frac{\partial F}{\partial x_{i,\alpha}}\delta x_i\right) - v\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\Phi_{\alpha\beta}\frac{\partial v}{\partial u_\beta}\right) + Lv^2.$$

Im Falle $n = 1$ ergibt sich daraus durch Integration zwischen festen Endpunkten die bekannte Transformation der zweiten Variation von K. Weierstraß[62]).

11. 4. Im weiteren Verfolge des von A. L. Underhill[6]) bei einfachen Integralen eingeschlagenen Weges fand ich[63]) durch Zerlegung von $\delta^2 F$ (26) in invariante Bestandteile und nach Ersetzung der Variationen durch geeignete kogrediente Größen eine Punktinvariante U, zu der vorher Th. De Donder[8]) auf anderem Wege gelangt war; ferner durch Variation von S (24) eine neue Punkt- *und* Parameterinvariante U_0. Es wäre weitläufig, U und U_0 anzuschreiben. Für $n = 1$ gehen diese Größen in A. L. Underhills Invarianten $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_0$ über, von deren erster als der Krümmung des B_2 schon die Rede war (Nr. 7). In unserem Falle eines beliebigen n steht die Deutung von U und U_0 auch bei Riemannscher Maßbestimmung noch aus. Die Größe U_0 ermöglicht bei einer festberandeten Extremale $\mathfrak{E}$ eine bequeme Darstellung der zweiten Variation,

$$(27) \qquad \delta^2 I = \int^{(n)} \left(F^{-\frac{2}{n}}\Phi^{-\frac{1}{n}}\Phi_{\alpha\beta}\frac{\partial V}{\partial u_\alpha}\frac{\partial V}{\partial u_\beta} - U_0 V^2\right) F\, du$$

$$\left(V = F^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}\Phi^{\frac{1}{2n}} v\right),$$ [64])

die den folgenden Schluß zuläßt: Ist die quadratische Form $\Phi_{\alpha\beta}w_\alpha w_\beta$ etwa definit positiv und $U_0 < 0$ auf $\mathfrak{E}$, so ist dort $\delta^2 I > 0$.

---

62) Vgl. O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig 1909, S. 226—227. Die L_{ik} heißen für $n = 1$ herkömmlich L_1, M_1, N_1.

63) A. a. O. [53]) [e]), § 10—§ 13.

64) Ich setze das Ergebnis (27) für $n = 1$ her,

$$\delta^2 s = \int \left[F^{-2}\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 - \mathfrak{K}_0 V^2\right] F\, dt \quad \left(V = F^{\frac{1}{2}} F_1^{\frac{1}{2}} (\dot y\, \delta x - \dot x\, \delta y)\right),$$

das L. Berwalds Formel (Math. Zeitschr. 26 (1927), S. 176 (74)) auf einen beliebigen Parameter t (statt s) verallgemeinert. Die Jacobische Differentialgleichung, die mit der Unabhängigen s die einfache Gestalt $V'' + \mathfrak{K} V = 0$ hat (vgl. P. Funk[34]), S. 229), schreibt sich mit der Unabhängigen t

$$(F^{-1}\dot V)^{\cdot} + \mathfrak{K}_0 F V = 0.$$

11. 5. Wir vermerken bei dem Integrale I die Parameterinvarianz der *quadratischen Differentialform* $g_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta$, deren Grundtensor die kontravarianten Bestimmungszahlen $g^{\alpha\beta} = \theta \Phi_{\alpha\beta}$ besitzt. Mit Hilfe der zugehörigen Beltramischen Differenzierer kann man $\delta^2 I$ bei einer beliebigen Überfläche in sieben parameterinvariante Summanden aufspalten. Für $n = 2$ und, was $\delta^2 I$ betrifft, für eine festberandete Extremale rühren diese Ergebnisse von M. Fujiwara[65]) her; ohne diese Beschränkung habe ich sie bei beliebigem n a. a. O.[53])[c)], III erzielt. — Anknüpfend an $g_{\alpha\beta}$ weise ich auf den Skalar hin, dessen Quadrat durch

$$H^2 = \frac{1}{16}\frac{\theta}{F f^2} g_{\alpha\beta}\varrho^\alpha \varrho^\beta, \qquad \varrho^\alpha = F^{n+2}\frac{\partial F}{\partial \theta_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x_{i,\alpha}}$$

gegeben ist; er stellt insofern eine Verallgemeinerung des Berwaldschen Hauptskalars (23) dar, als er für $n = 1$ in diesen übergeht.

12. Noch ein Wort über den Fall, wo in (2) n beliebig, $N = n + 1$, $q = 2$ ist! Ich erhielt da[66]) unter Benutzung von Ergebnissen G. Vivantis[67]) bei einem beliebigen Integral[56]) $I = \int^{(n)} G(x_i, x_{i,\alpha}, x_{i,\alpha\beta})\, du$ erstens als Gegenstück zu S (24) eine Differentialinvariante, die, wenn I für $n = 2$ die Affinoberfläche ω bedeutet, in die mittlere Affinkrümmung übergeht; zweitens als Gegenstück zu K (25) eine Integralinvariante, die für $I = \omega$ den gewöhnlichen Rauminhalt vorstellt.

13. Das Vorstehende dürfte innerhalb der eingangs gesteckten Grenzen einen Überblick über die Rolle der Invariantentheorie in der Variationsrechnung vermitteln. Was E. Noethers Ergebnisse über Integrale betrifft, die gegenüber gewissen gegebenen Gruppen invariant sind[68]), so darf es wohl hier um so eher bei ihrer bloßen Erwähnung bewenden, als sie schon in die Lehrbücher übergegangen sind.[69]) Gleichfalls nur nennen kann ich die kovarianten Bildungen, die R. Courant gewann, als er durch eine neuartige Fragestellung[70]) den Rahmen der klassischen Variationsrechnung erweiterte, innerhalb dessen ja dieser Bericht verblieben ist. Um eine andere Richtung des Fortschritts der formalen Theorie wenigstens zu bezeichnen, führe ich an, daß G. Prange[71]) das Jacobi-Hamiltonsche Verfahren

65) M. Fujiwara, Tokyô Sûgaku-Buturigakkwai Kizi (2) 6 (1911/12), S. 123—127.

66) A. a. O.[51]), II.

67) G. Vivanti, Annali di Mat. (3) 20 (1913), S. 49—63.

68) E. Noether, Nachr. d. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, 1918, S. 235—257.

69) Vgl. A. Kneser[60]), § 53. R. Courant und D. Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik 1, Berlin 1924, S. 216—219.

70) R. Courant, Nachr. d. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, 1925, S. 111—117.

71) G. Prange, Die Hamilton-Jacobische Theorie für Doppelintegrale, Diss. Göttingen 1915.

auf Doppelintegrale übertragen hat; von ihm und von K. Boehm[72]) rühren Beweise des Hilbertschen Unabhängigkeitssatzes in diesem Falle her. C. Carathéodory[73]) hat gezeigt, wie man die Legendresche Transformation auf den Fall zu verallgemeinern hat, daß in (2) N und n beliebig sind, $q = 1$ ist und die u_a in G ausdrücklich auftreten dürfen. Die dabei von ihm entwickelte Transformationslehre der Variationsprobleme vielfacher Integrale bietet Beziehungen dar zu dem folgenden letzten Gegenstande meines Vortrages.

14. Ich möchte noch auf einen Gedanken eingehen, durch den wenigstens bei Doppelintegralen der Gestalt $I = \iint F\,du\,dv$, $F = H(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$[74]) *nachgeholt* wurde, was die ganze Lehre von den einfachen Integralen $s = \int f(x, y, \dot{x}, \dot{y})\,dt$ beherrscht: Der Aufbau der allgemeinen Theorie nach dem Muster eines geeigneten differentialgeometrischen *Beispiels* — bei s nach dem Beispiele der kürzesten Linien. Bei Integralen I liegt entsprechend ausgearbeitet die Lehre von den Minimalflächen vor. A. Haar hat deren Ergebnisse für die Aufgabe $\delta I = 0$ mit großem Erfolge nutzbar gemacht.[75]) Bei der Übertragung der Lehre von den Kürzesten mußte man den Begriff der senkrechten zu dem der transversalen Lage erweitern. Ähnlich ist in der Theorie von I der Begriff der adjungierten Minimalfläche heranzuziehen und geeignet zu dem der *adjungierten Extremalfläche* zu verallgemeinern. Man adjungiert bekanntlich einer Minimalfläche dadurch eine andere, daß man in ihrer Weierstraßschen Darstellung, die ihr eine analytische Funktion zuordnet; diese durch ihr i-faches ersetzt. Dieses Verfahren ist kaum übertragungsfähig; den geeigneten Gesichtspunkt legt die Untersuchung der Minimalfläche in allgemeinen Gaußschen Koordinaten nahe. Diesem folgend ordnet man der extremalen Fläche durch eine Berührungstransformation $\mathfrak{B}$ eine andere Fläche zu, ihre *Adjungierte.*[76]) Diese ist im allgemeinen nicht Extremale von I, wohl aber Extremale eines anderen Integrals $\bar{I}$, das aus I durch $\mathfrak{B}$ entsteht. Diese Beziehung, die das zu $\delta I = 0$ *adjungierte Variations-*

---

72) K. Boehm, Math. Ann. 83 (1921), S. 149—156. — Auch unter der Annahme, daß in (2) $n = 1$ ist, N und q beliebig sind, ist K. Boehm zum Unabhängigkeitssatze gelangt; Nachr. d. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen 1915, S. 186—192.

73) a) Math. Ann. 85 (1922), S. 78—88. b) Ebenda 86 (1922), S. 272—275. c) Acta Litt. ac Scient. Univ. Szeged 4 (1928/29), S. 193—216.

74) Bezeichnung wie in Nr. 11.

75) A. Haar, a) Math. Ann. 100 (1928), S. 481—502. b) Abh. aus d. math. Sem. d. Hamburgischen Univ. 8 (1930), S. 1—27.

76) Der erwähnte Zusammenhang mit [73]) besteht darin, daß $\mathfrak{B}$ auch dort vorkommt; vgl. [73]) c), S. 195.

problem $\delta \bar{I} = 0$ liefert, ist wechselseitig. Das Problem der Minimalflächen ist dadurch ausgezeichnet, daß es sich selbst adjungiert ist. Zur Verallgemeinerung der Sätze über Minimalflächen gelangt man, indem man die Abbildung der Extremale auf ihre Adjungierte untersucht; dabei kommen folgende Ergebnisse zustande: Auf einer Extremale und ihrer Adjungierten kann man eine solche nichteuklidische Maßbestimmung einführen, daß die Abbildung eine Verbiegung ist. Hierin bekundet sich, daß durch jede Aufgabe $\delta I = 0$ auf ihren Extremalen ein ganz bestimmtes Linienelement ds^2 gegeben ist. Das Integral I erweist sich als der dazu gehörige Flächeninhalt.

Es ist dieser Untersuchung, auf deren Einzelheiten ich nicht eingehen kann, eigentümlich, daß sie nicht mit den klassischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Extremalen, sondern mit solchen *erster* Ordnung geführt wird. Dieser Verzicht auf das Vorhandensein der zweiten Ableitungen ist der Ausgangspunkt einer Reihe weiterer erfolgreicher Entwicklungen in der Variationsrechnung von I.[77]) Man kann gleichwohl die Frage stellen[78]), wie sich die Sätze über adjungierte Minimalflächen, in denen *zweite* Ableitungen auftreten, auf adjungierte allgemeine Extremalen übertragen; sie ist noch unbeantwortet.[79])

Dasselbe gilt von zahlreichen Fragen aus *allen* Bezirken unseres erst in der Entwicklung begriffenen Gebietes; ich schließe meinen Bericht darüber in der Einsicht:

Ich weiß es wohl, noch bleibt es unvollendet,
Wenn es auch gleich geendigt scheinen möchte.

---

77) Ich nenne einige davon: A. Haar, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 149 (1919), S. 1—18. Math. Ann. 97 (1927), S. 124—158. Acta Litt. ac Scient. Univ. Szeged 3 (1927), S. 224—234. — A. Gergely, ebenda 2 (1924/26), S. 139—146. — T. Radó, Math. Zeitschr. 24 (1926), S. 321—327. Acta Litt. ac Scient. Univ. Szeged 2 (1924/26), S. 147—156. — J. Schauder, ebenda 4 (1928/29), S. 38—50. — A. Szücs, ebenda 3 (1927), S. 81—95.

78) A. Haar[75])[a]), S. 502.

Zusätze bei der Korrektur:

79) Mittlerweile hat L. Berwald sie beantwortet, Monatsh. f. Math. u. Phys. 38 (1931), S. 89—108.

80) (Nachtrag zu [22]).) Grundsätzliche Entwicklungen über den affinen Zusammenhang und sein Verhältnis zur Maßbestimmung gab neuerdings A. Winternitz, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch., Phys.-math. Klasse, 1930, S. 457—469.

(Eingegangen am 26. 6. 1930.)