Werk

Titel: Geodätische Viereckснetze mit inhaltsgleichen Feldern.

Autor: SAUER, R.; Graf, H.

Jahr: 1931

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?37721857X_0040|log11

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

hierin auch noch weiter gehen. Nicht scheint es jedoch möglich zu sein, mit Hilfe dieses Verfahrens sämtliche derartigen Gebiete einer solchen Fläche zu bestimmen oder auch etwa zu entscheiden, ob diese Gebiete immer dreieckig sein müssen, oder ob auch andere Polygone oder sogar krummlinige Begrenzungen vorkommen können.

Es möge schließlich noch eine *Frage* allgemeiner Natur gestellt werden, durch deren Beantwortung die Einsicht in die Verteilung der geschlossenen geodätischen Linien in einer Clifford-Kleinschen Fläche negativer Krümmung stark gefördert würde. Eine Binnengerade einer solchen Fläche ist nämlich dadurch ausgezeichnet, daß jede Bildgerade, die eine Abwicklung der Fläche auf die hyperbolische Ebene von ihr entwirft, als unendlich ferne Punkte zwei sogenannte Grenzpunkte der Gruppe der Deckbewegungen der Fläche besitzt. Die Menge dieser Punkte ist aber, falls die Fläche einen Binnenteil enthält, perfekt und, wenn die Fläche mit Außenteilen behaftet ist, nirgends dicht. Die Frage lautet demgemäß: *Man denke sich auf einem Kreis eine perfekte, nirgends dichte Punktmenge gegeben; dann denke man sich jeden Punkt dieser Menge mit jedem anderen Punkt der Menge durch eine Sehne verbunden. Kann man eine Aussage über die Struktur der von den Punkten dieser Sehnen gebildeten Menge machen?*

(Eingegangen am 19. 3. 1930.)

Geodätische Viereckснetze mit inhaltsgleichen Feldern.

Von H. GRAF[1]) in Aachen und R. SAUER in München.

Mit 11 Figuren im Text.

§ 1. Problemstellung.

Ein Bereich F einer regulären Fläche sei topologisch auf einen ebenen Bereich E abgebildet. Die Abbildung $\{E, F\}$ soll von der folgenden Art sein: den beiden Systemen von Geraden in E, welche parallel sind zu den Achsen eines dort befindlichen Koordinatensystems (u, v), entsprechen auf der Fläche F zwei Systeme geodätischer Linien. Diese beiden ausgezeichneten Kurvensysteme werden als Parametersysteme u und v der Fläche eingeführt.

Einem Parallelogrammnetz aus äquidistanten achsenparallelen Geraden der Ebene E entspricht ein Viereckснetz aus geodätischen Linien auf F, einer Verfeinerung des Parallelogrammnetzes in E durch Zwischenschaltung weiterer äquidistanter achsenparalleler Geraden

1) Vorgetragen auf der 90. Versammlung der „Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte" in Hamburg 1928; vgl. gleichbetitelten Bericht von H. Graf in diesen Jahresberichten, Band 8, Heft 1—4, S. 10.

entspricht auf F eine Verfeinerung des geodätischen Viereckshetzes. Der Grenzprozeß einer solchen systematischen Verfeinerung liefert ein *„infinitesimales geodätisches Viereckshetz"*.

Dadurch, daß man der besprochenen Abbildung {E, F} noch besondere Eigenschaften zuweist, gelangt man zu speziellen Flächen bzw. Flächenklassen. Beispielsweise sind die Liouvilleschen Flächen durch folgende Forderung gekennzeichnet: die achsenparallelen Geraden der Ebene E lassen sich äquidistant so anordnen, daß den beiden Systemen von Diagonalgeraden des damit in E festgelegten Parallelogrammnetzes zwei zueinander orthogonale Kurvensysteme auf der Fläche F entsprechen. Das heißt: das infinitesimale geodätische Viereckshetz ist hier ein „Rhombennetz".

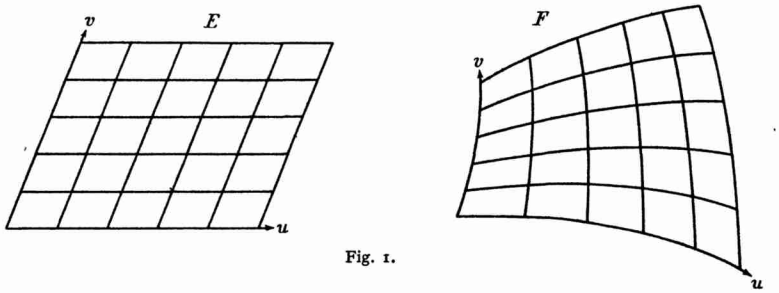


Fig. 1.

Für die Flächenklasse, welche den Gegenstand der vorliegenden Arbeit bildet, soll die Abbildung {E, F} eine *flächentreue* sein: einem Parallelogrammnetz äquidistanter achsenparalleler Geraden von E, welches ja stets inhaltsgleiche Felder besitzt, entspricht demnach auf der Fläche F ein geodätisches Viereckshetz mit wiederum inhaltsgleichen Feldern. An Stelle der *Seitengleichheit* der infinitesimalen Rhomben der Liouvilleschen Netze tritt hier die *Flächengleichheit* der Vierecke. Die so definierten infinitesimalen geodätischen Viereckshetze besitzen die Eigenschaft der Flächengleichheit aller Netzvierecke auch für endlich große Felder. Dies trifft in analogem Sinne für die infinitesimalen geodätischen Rhombennetze der Liouvilleschen Flächen nicht zu.

Im übrigen gibt es auch Flächen, welche *nur* geodätische Viereckshetze mit *endlich großen* inhaltsgleichen Feldern tragen, die nicht unbegrenzt unterteilbar sind. Man kommt zu einer solchen Fläche beispielsweise dadurch, daß man an einem ebenen Quadratmuster in jedem Feld passende Auswölbungen der Ebene vornimmt. Von gewissen nicht unbegrenzt unterteilbaren Netzen wird noch im § 5 die Rede sein.

Ebenso wie die Liouvilleschen Flächen sind auch die Flächen mit infinitesimalen geodätischen Viereckснetzen inhaltsgleicher Felder *biegungsinvariant* definiert, d. h. lediglich als Flächenhäute ohne Rücksicht auf die zufällige starre Form im Raum; denn sowohl die geodätischen Linien als auch die Flächeninhalte bleiben bei der Verbiegung erhalten.

§ 2. Die partiellen Differentialgleichungen des Problems.

Um die allgemeinsten Flächenhäute mit infinitesimalen geodätischen Viereckснetzen inhaltsgleicher Felder zu untersuchen, bezeichnen wir mit E, F, G ihre Fundamentalgrößen 1. Ordnung in bezug auf die Systeme u und v des Viereckснetzes als Parameterkurven. Die Forderung der Flächengleichheit aller Netzvierecke kann dann durch die Beziehung ausgedrückt werden

$$EG - F^2 = 1. \tag{1}$$

Die Bedingung dafür, daß die Kurven u und v geodätische Linien sind, geben die beiden partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$E_u - E_v E\sqrt{EG-1} + G_u E^2 = 0, \tag{2}$$

$$G_v - G_u G\sqrt{EG-1} + E_v G^2 = 0. \tag{3}$$

Die Indizes u, v bezeichnen partielle Ableitungen.

Nach den allgemeinen Sätzen über die Existenz von Integralen partieller Differentialgleichungen kann man zwei in der Umgebung von $u = 0$ reguläre reelle Funktionen $E(u, 0)$ und $G(u, 0)$ der einen Veränderlichen u mit den Nebenbedingungen $E(0, 0) > 0$, $G(0, 0) > 0$, $E(0, 0)\,G(0, 0) > 1$ willkürlich vorschreiben. Es gibt dann stets ein einziges Lösungssystem $E(u, v), G(u, v), F(u, v) = \sqrt{E(u, v)\,G(u, v) - 1}$, welches, von Biegung und Spiegelung abgesehen, eine reelle Fläche bestimmt, in der Umgebung von $u = 0$, $v = 0$ regulär ist und für $v = 0$ sich auf $E(u, 0)$, $G(u, 0)$, $F(u, 0)$ reduziert.

Statt der Fundamentalgrößen E und G kann man auch die Bogenlängen $s(u, v)$ der Kurven $v = \text{const.}$ und $t(u, v)$ der Kurven $u = \text{const.}$ einführen:

$$E = s_u^2, \qquad G = t_v^2,$$

wobei die Indizes wieder partielle Ableitungen bezeichnen.

Ferner ersetzen wir F durch den Winkel $\omega(u, v)$ des Viereckснetzes:

$$F = \operatorname{cotg} \omega.$$

Wenn man nun als Anfangsbedingungen die regulären Funktionen $s(u, 0)$ und $\omega(u, 0)$ vorgibt, so sind dadurch $E(u, 0)$, $F(u, 0)$ und nach (1) auch $G(u, 0)$ festgelegt. Damit $E(u, 0)$, $G(u, 0)$ in der Umgebung von $u = 0$ regulär sind und die oben angegebenen drei Ungleichungen erfüllen, muß man als Nebenbedingungen für $u = 0$, $v = 0$ fordern: $s_u \neq 0$, $\omega \neq 0$, $\neq \pi/2$. Die beiden ersten Ungleichungen sind für alle Punkte des Netzbereiches voraussetzungsgemäß von vornherein erfüllt, die Annahme $\omega = \pi/2$ für den ganzen Netzbereich führt auf abwickelbare Flächen, welche wir in § 5 gesondert besprechen werden.

Zusammenfassung:

Es seien $s(u, 0)$ und $\omega(u, 0)$ zwei in der Umgebung von $u = 0$ reguläre willkürliche Funktionen. Setzt man voraus: $s_u(0, 0) \neq 0$, $\omega(0, 0) \neq 0$ bzw. $\neq \pi/2$, dann gibt es stets ein einziges Linienelement reeller Flächen, welche in der Umgebung von $u = 0$, $v = 0$ regulär sind und auf welchen die Kurven u und v ein infinitesimales geodätisches Viereckснetz mit inhaltsgleichen Feldern bilden. Dabei ist $s(u, 0)$ die Bogenlänge der geodätischen Linie $v = 0$, während $\omega(u, 0)$ die Winkel angibt, unter denen die Linie $v = 0$ die Netzkurven u schneidet.

Setzt man die Differentialgleichungen (2), (3) in den Ausdruck für das Gaußsche Krümmungsmaß K ein, so bekommt man für die geodätischen Viereckснetze inhaltsgleicher Felder die einfachen Formeln:

$$K = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{1}{E}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{1}{G}\right) \tag{4a}$$

oder mit den Bogenlängen s und t

$$K = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{1}{s_u^2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{1}{t_v^2}\right). \tag{4b}$$

§ 3. Lösung des Problems für Drehflächen und Schraubenflächen.

Das im Vorhergehenden allgemein aufgestellte Problem soll jetzt speziell für Drehflächen und Schraubenflächen behandelt werden.

Der Natur der Drehflächen bzw. Schraubenflächen entsprechend werden wir solche Viereckснetze inhaltsgleicher Felder aufsuchen, welche von zwei Systemen jeweils durch Drehung bzw. Schraubung auseinander hervorgehender geodätischer Linien gebildet werden. Der hierdurch ausgeschlossene Fall, daß das eine netzbildende System die Breitenkreise bzw. Schraubenlinien seien, führt lediglich auf den Fall des Drehzylinders. Die ebene Ausbreitung des Zylindermantels samt Netz wird noch genauer in § 5 („Parallelogrammnetz") besprochen werden.

Da alle Schraubenflächen auf Drehflächen verbogen werden können, wobei die Schraubung einer Kurve in die Drehung einer Kurve übergeführt wird, können wir uns im folgenden durchwegs auf Drehflächen beschränken und erhalten damit auch die *allgemeinste Lösung für Schraubenflächen.*

I. Nichtgeodätische Viereckснetze inhaltsgleicher Felder.

Wir lassen zunächst die Forderung, daß die netzbildenden Kurven geodätische Linien seien, beiseite und stellen die folgende Frage:

Welches sind auf Drehflächen die allgemeinsten Viereckснetze inhaltsgleicher Felder, welche von zwei Systemen jeweils durch Drehung auseinander hervorgehender, sonst aber beliebiger Kurven gebildet werden?

Die Drehflächen werden bezogen auf den Winkel φ der Meridianebenen und die Bogenlänge σ der Meridiane. Das Linienelement hat dann die Form

$$ds^2 = d\sigma^2 + r(\sigma)^2 d\varphi^2.$$

$r(\sigma)$ = Abstand eines Flächenpunktes von der Drehachse.

Das System der aus einer beliebigen, von einem Breitenkreis verschiedenen Flächenkurve $\varphi + g(\sigma) = 0$ durch Drehung hervorgehenden kongruenten Kurven wird gegeben durch

$$\varphi + g(\sigma) = \text{const.}$$

Irgendein Viereckснetz der gesuchten Art hat also die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} H_1(\varphi + g_1(\sigma)) &= u, \\ H_2(\varphi + g_2(\sigma)) &= v. \end{aligned}\right\} \quad H_1 \not\equiv \text{const.},\ H_2 \not\equiv \text{const.},\ g_1 - g_2 \not\equiv \text{const.}$$

Die willkürlichen Funktionen H_1, H_2 bestimmen die Aufeinanderfolge der Systemkurven, wenn die Parameter u und v nach konstanten Intervallen fortschreiten.

Wie sind für eine durch die Fundamentalgrößen $E_1 = 1$, $F_1 = 0$, $G_1 = r(\sigma)^2$ vorgegebene Drehfläche die vier unbekannten Funktionen $H_1, H_2; g_1, g_2$ zu wählen, damit das infinitesimale Viereckснetz der Kurven u und v flächengleiche Felder bekommt?

Bei der Beantwortung der Frage setzen wir für H_1, H_2 zweimalige, für g_1, g_2 einmalige Differenzierbarkeit nach dem jeweiligen Argument voraus. Zwischen den Fundamentalgrößen E_1, F_1, G_1, bezogen auf σ und φ, und den Fundamentalgrößen E, F, G, bezogen auf u und v, besteht der Zusammenhang

$$\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} = \sqrt{EG - F^2} \left| \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial \sigma} & \frac{\partial u}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial v}{\partial \sigma} & \frac{\partial v}{\partial \varphi} \end{matrix} \right|.$$

Wegen (1) $\sqrt{EG - F^2} = 1$ folgt hieraus nach Einsetzen der Werte für E_1, F_1, G_1 die Gleichung

$$r(\sigma) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \sigma} & \frac{\partial u}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial v}{\partial \sigma} & \frac{\partial v}{\partial \varphi} \end{vmatrix}.$$

Nun ist weiter $\quad \frac{\partial u}{\partial \sigma} = H_1' g_1', \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = H_1',$

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma} = H_2' g_2', \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = H_2',$$

wobei die Striche die Differentialquotienten nach dem jeweiligen Argument bedeuten; man bekommt für $H_1, H_2; g_1, g_2$ die in σ und φ identisch zu erfüllende Funktionalgleichung

$$r(\sigma) = H_1'(\varphi + g_1(\sigma)) \cdot H_2'(\varphi + g_2(\sigma)) \cdot (g_1'(\sigma) - g_2'(\sigma)).$$

Wegen $g_1' - g_2' \not\equiv 0$ (vgl. S. 78) folgt

$$H_1' H_2' = \frac{r}{g_1' - g_2'} = I(\sigma). \tag{5}$$

Um die allgemeinste Lösung der Funktionalgleichung zu gewinnen, differenzieren wir zunächst nach φ und σ

$$H_1' H_2'' + H_1'' H_2' = 0, \tag{6}$$

$$H_1' H_2'' g_2' + H_1'' H_2' g_1' = I'. \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt

$$(g_1' - g_2') H_1'' H_2' = I', \tag{8}$$

aus (5) und (8) wegen $H_1' \not\equiv 0$, $H_2' \not\equiv 0$ (vgl. S. 78) schließlich

$$\frac{H_1''}{H_1'} = -\frac{H_2''}{H_2'} = \frac{I'}{(g_1' - g_2') I} = C(\sigma).$$

Da die Funktionalgleichung für jeden Wert φ und σ identisch bestehen muß, kann man speziell $\sigma = \text{const.}$, also $C(\sigma) = c$ setzen und findet dann, wenn man für $\varphi + g_1 = \tau_1$, $\varphi + g_2 = \tau_2$ schreibt, als allgemeinste Lösungen der Funktionalgleichung

(9a) $\quad c = 0: \quad H_1(\tau_1) = a_1 \tau_1 + b_1, \qquad H_2(\tau_2) = a_2 \tau_2 + b_2;$

(9b) $\quad c \neq 0: \quad H_1(\tau_1) = e^{c\tau_1 + a_1} + b_1, \quad H_2(\tau_2) = e^{-c\tau_2 + a_2} + b_2.$

Gleichung (5) liefert dann noch eine Bedingung für g_1 und g_2. Man findet nämlich durch Einsetzen von (9) und einmalige Differentiation nach σ

$$\frac{d}{d\sigma}\left[\frac{r(\sigma)}{g_1'(\sigma) - g_2'(\sigma)}\right] = \begin{cases} 0 \text{ bzw.} \\ c r(\sigma). \end{cases} \tag{10a/10b}$$

Zwei Funktionen $g_1(\sigma)$ und $g_2(\sigma)$, welche der Bedingung (10a) oder (10b) genügen, liefern die gesuchten Kurvensysteme $u = H_1(\varphi + g_1(\sigma))$ und $v = H_2(\varphi + g_2(\sigma))$.

Die in (9) auftretenden Konstanten $a_1, a_2; b_1, b_2$ können mit u und v zusammengefaßt werden, und man erhält dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit das folgende

Ergebnis:

Die allgemeinsten infinitesimalen Viereckснetze inhaltsgleicher Felder, welche von zwei Systemen durch Drehung auseinander hervorgehender Kurven einer beliebigen Drehfläche gebildet werden, haben als Gleichungen entweder

$$\text{(11a)} \qquad \begin{cases} \varphi + g_1(\sigma) = u, \\ \varphi + g_2(\sigma) = v; \end{cases} \qquad (\text{„lineare Anordnung“}) \qquad \textit{oder}$$

$$\text{(11b)} \qquad \begin{cases} \varphi + g_1(\sigma) = \frac{1}{c} \ln u, \\ \varphi + g_2(\sigma) = -\frac{1}{c} \ln v. \end{cases} \qquad (\text{„logarithmische Anordnung“})$$

Zwischen g_1, g_2 und der die Drehfläche charakterisierenden Funktion $r(\sigma)$ besteht dabei der Zusammenhang (10a) *bzw.* (10b).

II. Geodätisches Viereckснetz inhaltsgleicher Felder.

Nunmehr wird weiter gefordert, daß die Kurven u und v des Viereckснetzes geodätische Linien seien. Die Funktionen g_1 und g_2 müssen dann der Clairautschen Gleichung genügen:

$$\text{(12)} \qquad g_1' = \frac{c_1}{r\sqrt{r^2 - c_1^2}}, \qquad g_2' = \frac{c_2}{r\sqrt{r^2 - c_2^2}}.$$

c_1 und $c_2 \neq c_1$ sind zwei willkürliche reelle Konstante und wir nehmen an $c_2^2 \geqq c_1^2$.

Durch Einsetzen von (12) in (10a) und (10b) folgt

$$\frac{d}{d\sigma}\left[\frac{r^2\sqrt{(r^2 - c_1^2)(r^2 - c_2^2)}}{c_1\sqrt{r^2 - c_2^2} - c_2\sqrt{r^2 - c_1^2}}\right] = \begin{cases} 0 \\ cr \end{cases}$$

und nach Ausführen der Quadraturen

$$\text{(13a)} \qquad r = \text{const.};$$

$$\begin{cases} \text{(13b)} \quad c_1 + c_2 \neq 0: \quad c(c_1^2 - c_2^2)(\sigma + \sigma_0) \\ \qquad = \frac{3c_1}{2} r\sqrt{r^2 - c_1^2} - c_1\left(\frac{c_1^2}{2} + c_2^2\right) \ln\left(r + \sqrt{r^2 - c_1^2}\right) \\ \qquad + \frac{3c_2}{2} r\sqrt{r^2 - c_2^2} - c_2\left(\frac{c_2^2}{2} + c_1^2\right) \ln\left(r + \sqrt{r^2 - c_2^2}\right), \\ \text{(13b*)} \quad c_1 + c_2 = 0: \quad -2cc_2(\sigma + \sigma_0) = \frac{3}{2} r\sqrt{r^2 - c_2^2} - \frac{c_2^2}{2} \ln\left(r + \sqrt{r^2 - c_2^2}\right). \end{cases}$$

III. Mannigfaltigkeit der gefundenen Drehflächen.

a) Geodätische Viereckснetze in *linearer* Anordnung.

Die Gleichung (13a) stellt Drehzylinder dar. Das geodätische Viereckснetz wird gebildet von zwei beliebigen Systemen kongruenter Schraubenlinien. Bei der Abwicklung des Drehzylinders in die Ebene ergibt sich das Parallelogrammnetz (vgl. Fig. 6a, § 5).

b) Geodätische Viereckснetze in *logarithmischer* Anordnung.

Wegen der Voraussetzung $c_2^2 \geqq c_1^2$ (vgl. S. 80) ist die Bogenlänge σ reell für $r^2 \geqq c_2^2$; ferner ist $\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)_{r=c_2} = 0$, d. h. der Breitenkreis $r = c_2$ ist Kehlkreis.

Für die Winkel α_1 und α_2, unter denen die Breitenkreise von den geodätischen Linien u bzw. v geschnitten werden, hat man die Gleichungen

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{1}{c_1}\sqrt{r^2 - c_1^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{1}{c_2}\sqrt{r^2 - c_2^2}.$$

Hieraus folgt $\alpha_2 = 0$ für $r = c_2$: der Breitenkreis $r = c_2$ wird also von den geodätischen Linien v umhüllt. Weil der Breitenkreis $r = c_2$ Kehlkreis ist, so wird die Umhüllung eine asymptotische, d. h. die v-Linien nähern sich dem Kehlkreis in unendlich vielen Windungen. Der Kehlkreis gehört selbst mit $v = 0$ dem v-System als Ausartung an.

Um die Mannigfaltigkeit der durch die Gleichungen (13b), (13b*) dargestellten Drehflächen zu übersehen, verfahren wir folgendermaßen: Im *allgemeinen* Fall (13b) soll längs des Kehlkreises $r = c_2$ das Krümmungsmaß $K = -\frac{c^2}{c_2^2} = -1$ sein. Dadurch werden sämtliche zu der einen jeweils diskutierten Drehfläche ähnlichen Flächen ausgeschlossen. Ferner fordern wir $c_2 = 1$ $\left(\text{und } c = 1 \text{ wegen } \frac{c^2}{c_2^2} = 1\right)$, d. h. die Flächen werden als Drehflächen so verbogen, daß der Kehlkreis Einheitskreis wird. Wenn wir außerdem noch die Bogenlänge σ vom Kehlkreis $r = c_2$ an zählen, so haben wir damit auch über σ_0 verfügt, und die Zahl der in (13b) auftretenden Konstanten ist auf *eine* wesentliche Konstante c_1 reduziert. Diese eine wesentliche Konstante kann geometrisch durch den Winkel α_1 dargestellt werden, welchen das System der u-Linien mit dem Kehlkreis $r = c_2 = 1$ bildet. Dabei können wir stets ohne Beschränkung der Allgemeinheit positive Werte für c_1 ausschließen und für α_1 lediglich das Intervall $0 \leqq \alpha_1 \leqq \frac{\pi}{2}$ betrachten, wenn wir in der Gleichung (13b) alle Vorzeichenkombinationen für die zwei Quadratwurzeln zulassen. Die *spezielle* An-

nahme $\alpha_1 = 0$ liefert den in Gleichung (13 b*) angegebenen Sonderfall. Wenn wir die Festsetzung der Konstanten $c = c_2 = 1$ beibehalten, wird längs des Kehlkreises $r = c_2 = 1$ das Krümmungsmaß $K = -4$.

Wir haben gezeigt, daß wir alle durch die Gleichungen (13 b), (13 b*) gegebenen Drehflächen auf ∞^1 Drehflächen (entsprechend der einen wesentlichen Konstanten α_1) durch passende Ähnlichkeitsdeformation und Verbiegung zurückführen können. Jetzt ist noch die Frage zu untersuchen: *Sind diese ∞^1 durch die Konstante α_1 bestimmten Drehflächen alle voneinander verschieden?*

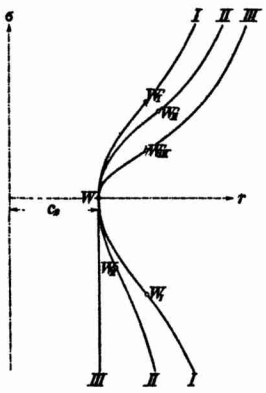


Fig. 2.

Wir denken uns die ∞^1 zu verschiedenen Werten von α_1 gehörigen Kurven $\sigma = \sigma(r)$ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem (r, σ) eingezeichnet. Alle Kurven (13 b) berühren sich wegen der getroffenen Festsetzungen $c_2 = 1$ und $K_{r=c_2} = -1$ in dem Punkte W der r-Achse und haben dort die nämliche Krümmung. (Vgl. die schematische Fig. 2.)

Für $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ (d. h. $c_1 = 0$) ergibt sich die Kurve I mit der r-Achse als Symmetrielinie und den zwei Wendepunkten W_I, W_I'. Sie verläuft nach beiden Seiten parabolisch ins Unendliche. Für $\frac{\pi}{2} > \alpha_1 > 0$ $(0 > c_1 > -1)$ verliert die Kurve $\sigma = \sigma(r)$ die Symmetrie zur r-Achse, behält aber zwei (zur r-Achse unsymmetrische) Wendepunkte und den parabolischen Verlauf nach beiden Seiten ins Unendliche (vgl. Kurve II). Für $\alpha_1 \to 0$ $(c_1 \to -1)$ rückt der eine Bogen zur einen Seite der r-Achse an die Gerade $r = 1$ heran, die Wendepunkte dieses Bogens nähern sich mehr und mehr dem Punkte W, während der andere Bogen sich an eine zur Kurve I in der σ-Richtung affin verzerrte Endlage III (Wendepunkt W_{III}') annähert. Für $\alpha_1 = 0$ $(c_1 = -1)$ gilt dann Gleichung (13 b*) und die $\sigma(r)$-Kurve ist affin zur Kurve I in der σ-Richtung auf die Hälfte zusammengedrückt.

Algebraisch sind immer alle Vorzeichenkombinationen der zwei Quadratwurzeln in den Gleichungen (13 b), (13 b*) zu berücksichtigen; deshalb erhält man algebraisch stets zwei durch Spiegelung an der r-Achse auseinander hervergehende $\sigma(r)$-Kurvenzweige. Diese beiden Zweige sind für $c_1 = 0$ identisch, für $0 > c_1 > -1$ haben sie in W einen gemeinsamen Berührungspunkt und arten für $c_1 = -1$ in die Kurve III und die Tangente $r = 1$ aus (vgl. die schematische Darstellung Fig. 3).

Aus dem (in Fig. 2 skizzierten) Verlauf der $\sigma(r)$-Kurven erkennt man, daß die Kurve I und die Kurve III zueinander affin sind, während

alle Zwischenlagen II nicht durch affine Verzerrung auseinander hervorgehen. Nun sind aber Drehflächen dann und nur dann zueinander ähnlich oder verbiegbar, wenn die Funktion $r(\sigma)$ bis auf einen konstanten Faktor übereinstimmt (vgl. auch S. 84), d. h. wenn in der Darstellungsweise der Fig. 2 die $\sigma(r)$-Kurven in der σ- und r-Richtung affin verzerrt sind. Also sind alle Drehflächen des Intervalls $0 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2}$ wesentlich verschieden.

Die beiden Drehflächen $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ können hingegen — nach passender ähnlicher Vergrößerung der einen Fläche — aufeinander verbogen werden und führen somit auf eine einzige Drehfläche. Diese speziellere Fläche hat dann die bemerkenswerte Eigenschaft, daß sie *zwei geodätische Viereckснetze* inhaltsgleicher Felder trägt. Das eine Netz wird gebildet von den Meridianen und dem einen den Kehlkreis asymptotisch umhüllenden System geodätischer Linien, das andere Netz wird erzeugt von den beiden zueinander symmetrischen Systemen der den Kehlkreis asymptotisch umhüllenden geodätischen Linien.

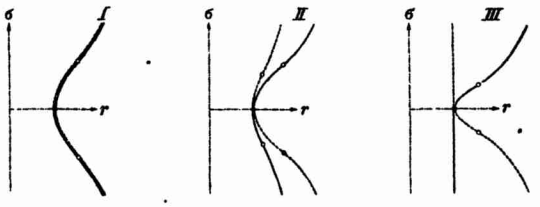


Fig. 3.

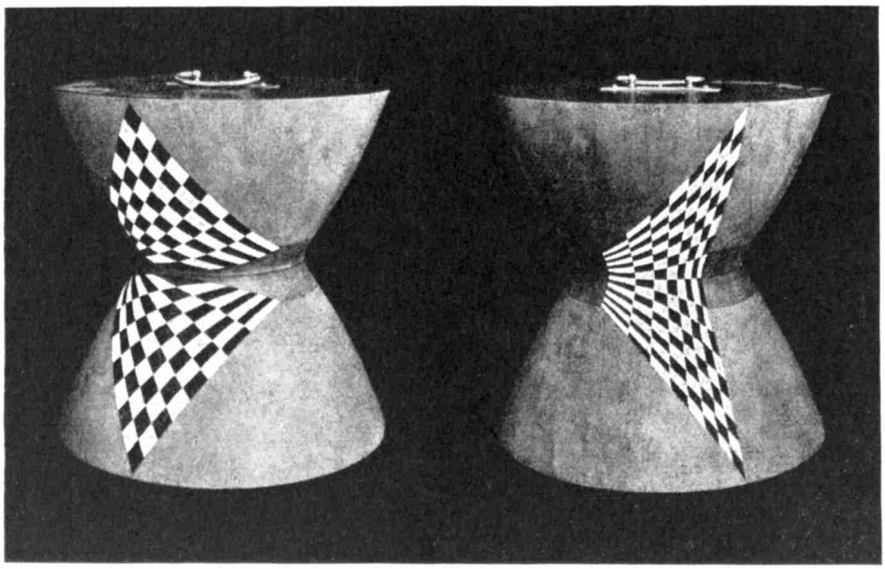
Figur 4 zeigt zwei Bilder eines Modells dieser Fläche mit der Gleichung

$$4\sigma = 3r\sqrt{r^2 - 1} - \ln\left(r + \sqrt{r^2 - 1}\right), \quad (-c_1 = c_2 = c = 1).$$

Die positiv und negativ gekrümmten Gebiete der Fläche sind — außerhalb der aufgezeichneten Musterung — durch verschiedene Tönung kenntlich gemacht. Von den beiden Netzen der Fläche ist je ein durch Netzlinien willkürlich begrenzter Teil mit Hilfe einer Schachbrettmusterung dargestellt; alle Felder eines Netzes haben gleichen Flächeninhalt. In beiden Netzen folgen die Drehwinkel φ der geodätischen Netzlinien nach je zwei gegenläufigen Skalen aufeinander u. zw. im 1. Netz ($\alpha_1 = 0$) gemäß der Skala $\varphi = \pm \ln \mu$, im 2. Netz $\left(\alpha_1 = \frac{\pi}{2}\right)$ gemäß der Skala $\varphi = \pm \frac{1}{2} \ln \mu$, $\mu = 0, 1, 2, \ldots$.

Zusammenfassung:

Neben a) dem trivialen Fall des Drehzylinders (S. 81) gibt es, von Ähnlichkeitsdeformation und Verbiegung abgesehen, b) ∞^1 verschiedene Drehflächen mit infinitesimalen geodätischen Viereckснetzen inhalts-



1. Fig. 4. 2.

gleicher Felder, bei denen die Netzkurven jedes Systems durch Drehung auseinander hervorgehen. Eine spezielle Drehfläche dieser Art ist zur Kehlkreisebene symmetrisch und trägt zwei verschiedene Viereckснetze, alle anderen Drehflächen sind nicht symmetrisch und tragen jeweils nur ein Viereckснetz der verlangten Eigenschaft.

IV. Gestaltliche Diskussion.

Die Meridiane sämtlicher Biegungsdrehflächen des Linienelements $ds^2 = d\sigma^2 + r(\sigma)^2 d\varphi^2$ sind in rechtwinkligen Koordinaten gegeben durch

$$x = \lambda r(\sigma),$$
$$z = \int \sqrt{1 - \lambda^2 \left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2}\, d\sigma,$$

wobei der Parameter λ die einzelnen Biegungsgestalten kennzeichnet. Die Flächen sind reell für $\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 \leqq \frac{1}{\lambda^2}$. Das Gleichheitszeichen liefert die zur Drehachse senkrechten Tangenten des Meridians.

Wir knüpfen wieder an die Darstellung der Fig. 2 (S. 82) an. Die Wendepunkte der $\sigma(r)$-Kurven liefern die Breitenkreise, in denen positiv und negativ gekrümmte Gebiete der Drehfläche zusammenstoßen. Wir bezeichnen mit ψ den spitzen Neigungswinkel der $\sigma(r)$-Kurve gegen die σ-Achse, insbesondere mit w und $w' \leqq w$ die spitzen Winkel der beiden Wendetangenten. Es ist dann $\frac{d\sigma}{dr} = \operatorname{cotg} \psi$.

Wir setzen nunmehr $\lambda = \operatorname{cotg} \psi_0$, wobei ψ_0 irgendeinen konstanten Winkel bedeutet, und erhalten dann für die durch ψ_0 festgelegte Biegungsdrehfläche den Realitätsbereich $\psi \leqq \psi_0$. Daraus ergeben sich die in den Figuren 5 zusammengestellten Biegungsformen.

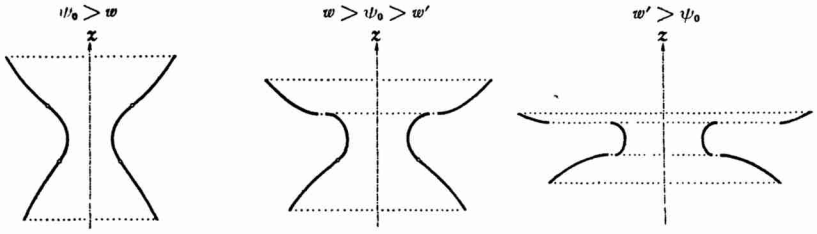


Fig. 5.

In den beiden Übergangsfällen $\psi_0 = w$ und $\psi_0 = w'$ sind die betreffenden Ebenen der Wendepunktkreise Tangentialebenen der Fläche.

Zusammenfassung:

Alle Flächen der Gleichungen (13 b) *und* (13 b*) *können als Drehflächen so verbogen werden, daß sie keinen Rückkehrkreis besitzen* ($\psi_0 > w$). *Sie haben dann einen negativ gekrümmten Bereich, an den sich nach jeder Seite ein parabolisch ins Unendliche verlaufender positiv gekrümmter Bereich anschließt.*

§ 4. Lösung des Problems für logarithmische Spiralflächen.

Die für Dreh- und Schraubenflächen gefundenen Resultate lassen sich auf die nach S. Lie benannten *„logarithmischen Spiralflächen"* verallgemeinern. Diese Flächen entstehen dadurch, daß sich eine ebene oder räumliche Kurve um eine feste z-Achse dreht und sich gleichzeitig in bezug auf einen festen Punkt O der Drehachse ähnlich verändert. Jeder Punkt P mit den Koordinaten r und z der sich drehenden Kurve beschreibt eine ebene oder räumlich logarithmische Spirale

$$\bar{r} = r e^{h\varphi},$$
$$\bar{z} = z e^{h\varphi}.$$

Für alle Bahnkurven hat die Konstante $h \neq 0$ denselben reellen Wert. Für $h = 0$ spezialisiert sich die „Spiralung" zur reinen Drehung und die Drehflächen erscheinen dadurch als Sonderfall der Spiralflächen.

Wenn man in den beiden obenstehenden Gleichungen r und z als Funktionen eines Parameters σ betrachtet, so hat man damit die Darstellung der Spiralfläche in den Zylinderkoordinaten $\varphi, \bar{r}(\varphi, \sigma)$, $\bar{z}(\varphi, \sigma)$. Die logarithmischen Spiralen haben die Gleichung $\sigma = \text{const}$.

und bilden das Analogon der Breitenkreise auf Drehflächen; jede andere Kurve der Spiralfläche hat eine Gleichung $\varphi + g(\sigma) = 0$. Das Kurvensystem $\varphi + g(\sigma) = \text{const.}$ besteht aus lauter ähnlichen, durch Spiralung auseinander hervorgehenden Kurven.

Der Natur der Spiralflächen entsprechend werden wir solche Viereckesnetze inhaltsgleicher Felder aufsuchen, welche von zwei Systemen jeweils durch Spiralung auseinander hervorgehender geodätischer Linien gebildet werden.

Der hierdurch ausgeschlossene Fall, daß das eine Kurvensystem des geodätischen Viereckesnetzes aus den logarithmischen Spiralen besteht, kann nur bei abwickelbaren Spiralflächen eintreten: die Spiralfläche ist ein Zylinder, dessen Normalschnitt eine logarithmische Spirale ist. Bei der ebenen Ausbreitung des Zylinders geht das geodätische Viereckesnetz in das im folgenden § 5 besprochene ebene „Trapeznetz" über.

I. Nichtgeodätische Viereckesnetze inhaltsgleicher Felder.

Wir lassen zunächst die Forderung, daß die netzbildenden Kurven geodätische Linien seien, beiseite und stellen, analog zu Seite 78, die Frage: *Welches sind auf Spiralflächen die allgemeinsten Viereckesnetze inhaltsgleicher Felder, welche von zwei Systemen jeweils durch Spiralung auseinander hervorgehender, sonst aber beliebiger Kurven gebildet werden?*

Die Spiralflächen werden bezogen auf die logarithmischen Spiralen σ und ihre Orthogonaltrajektorien φ in folgender Weise: $\sigma = 0$ bzw. $\varphi = 0$ bezeichnet irgendeine beliebig herausgegriffene Spirale bzw. eine Orthogonaltrajektorie des Systems der Spiralen. Jede andere Spirale S wird dann durch die Länge σ des Bogens gekennzeichnet, welcher auf der Kurve $\varphi = 0$ von den zwei Spiralen $\sigma = 0$ und S ausgeschnitten wird. Die Orthogonaltrajektorien werden bestimmt durch die Drehwinkel der Spiralung, welche von der Kurve $\varphi = 0$ an als Anfangslage gerechnet wird.

Das Linienelement der Spiralfläche erscheint nach den für φ und σ getroffenen Festsetzungen in der bekannten Form

$$ds^2 = e^{2h\varphi}(d\sigma^2 + r(\sigma)^2 d\varphi^2).$$

Ebenso wie bei den Drehflächen setzen wir für das auf Spiralflächen gesuchte infinitesimale Viereckesnetz die Gleichungen an

$$H_1(\varphi + g_1(\sigma)) = u,$$
$$H_2(\varphi + g_2(\sigma)) = v.$$

$H_1 \not\equiv$ const., $H_2 \not\equiv$ const., $g_1 - g_2 \not\equiv$ const. H_1 und H_2 sollen zweimal, g_1 und g_2 einmal nach ihrem Argument differenzierbar sein.

Analog Seite 79 ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung die in φ und σ identisch zu erfüllende Funktionalgleichung

$$H_1' H_2' = \frac{r}{g_1' - g_2'} e^{2h\varphi} = I(\sigma)\, e^{2h\varphi}.$$

Die Striche bedeuten die Ableitungen nach dem jeweiligen Argument.

Als allgemeinste Lösung der Funktionalgleichung folgt durch die nämlichen Rechnungen wie auf Seite 79
entweder

(14a) $\qquad H_1(\tau_1) = a_1 \tau_1 + b_1, \qquad H_2(\tau_2) = e^{2h\tau_2 + a_2} + b_2$

oder

(14b) $\qquad H_1(\tau_1) = e^{c\tau_1 + a_1} + b_1, \qquad H_2(\tau_2) = e^{(2h-c)\tau_2 + a_2} + b_2$

und für den Zusammenhang zwischen r, g_1 und g_2

(15a)
(15b) $$\frac{d}{d\sigma}\left[\ln \frac{r}{g_1' - g_2'}\right] = \begin{cases} 2h g_2' \text{ bzw.} \\ 2h g_2' + c(g_1' - g_2'). \end{cases}$$

Die Integrationskonstanten a_1, a_2; b_1, b_2 können wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit u und v zusammengefaßt werden und man hat dann folgendes

Ergebnis:

Die allgemeinsten Viereckssnetze inhaltsgleicher Felder, welche von zwei Systemen durch Spiralung auseinander hervorgehender Kurven einer beliebigen Spiralfläche gebildet werden, haben die Gleichungen entweder

(16a) $$\begin{cases} \varphi + g_1(\sigma) = u, \\ \varphi + g_2(\sigma) = \frac{1}{2h} \ln v; \end{cases}$$ *(„einfach-logarithmische Anordnung")*

oder

(16b) $$\begin{cases} \varphi + g_1(\sigma) = \frac{1}{c} \ln u, \\ \varphi + g_2(\sigma) = \frac{1}{2h - c} \ln v. \end{cases}$$ *(„doppelt-logarithmische Anordnung")*

Zwischen g_1 und g_2 und der zusammen mit der Konstanten h die Spiralfläche charakterisierenden Funktion $r(\sigma)$ besteht der Zusammenhang (15a) *bzw.* (15b).

II. Geodätisches Viereckснetz inhaltsgleicher Felder.

Nunmehr wird weiter gefordert, daß die Kurven u und v des Viereckснetzes geodätische Linien sind. Dies liefert die beiden Gleichungen

$$(17)\qquad \begin{cases} \frac{d}{d\sigma}\left[\frac{r^2 g_1'}{\sqrt{1+r^2 g_1'^2}}\right] + \frac{h}{\sqrt{1+r^2 g_1'^2}} = 0, \\ \frac{d}{d\sigma}\left[\frac{r^2 g_2'}{\sqrt{1+r^2 g_2'^2}}\right] + \frac{h}{\sqrt{1+r^2 g_2'^2}} = 0. \end{cases}$$

(15) und (17) zusammen ergeben für die drei unbekannten Funktionen $r(\sigma)$, $g_1'(\sigma)$, $g_2'(\sigma)$ die drei, die beiden Fälle (15a) und (15b) ($c = 0$ und $c \neq 0$) umfassenden Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$(18)\qquad \begin{cases} r^2 \frac{dg_1'}{d\sigma} + r g_1'(2 + r^2 g_1'^2)\frac{dr}{d\sigma} = h(1 + r^2 g_1'^2), \\ r^2 \frac{dg_2'}{d\sigma} + r g_2'(2 + r^2 g_2'^2)\frac{dr}{d\sigma} = h(1 + r^2 g_2'^2), \\ r\left(\frac{dg_1'}{d\sigma} - \frac{dg_2'}{d\sigma}\right) + (g_2' - g_1')\frac{dr}{d\sigma} = r(g_2' - g_1')\,(c g_1' + (2h - c) g_2'). \end{cases}$$

Da die Diskriminante $r^4(g_2' - g_1')\,(3 + r^2(g_1'^2 + g_1' g_2' + g_2'^2))$ für reelle Werte $r \neq 0$, $g_1' \neq g_2'$ stets von Null verschieden ist, sind zu willkürlich vorgegebenen reellen Anfangsbedingungen $r(0) \neq 0$, $g_1'(0)$ und $g_2'(0) \neq g_1'(0)$ die Funktionen r, g_1', g_2' eindeutig und somit durch je eine Quadratur g_1 und g_2 bis auf unwesentliche additive Konstanten festgelegt.

Ebenso wie bei Drehflächen gelten für die Winkel α_1 und α_2, welche die Spiralen σ mit den geodätischen Linien u bzw. v bilden, die Gleichungen

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = -\frac{1}{r g_1'}, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = -\frac{1}{r g_2'}.$$

Um die Mannigfaltigkeit der durch (18) bestimmten Spiralflächen zu übersehen, kann man nun in ähnlicher Weise wie bei den Drehflächen verfahren und erhält dann folgendes

Ergebnis:

Es gibt ∞^2 verschiedene nicht aufeinander verbiegbare und nicht zueinander ähnliche geodätische Viereckснetze inhaltsgleicher Felder, welche auf Spiralflächen liegen und von zwei Systemen jeweils durch Spiralung auseinander hervorgehender geodätischer Linien gebildet werden.

Als Sonderfall ist unter den Spiralflächen der Spiralzylinder enthalten: die beiden Systeme der netzbildenden geodätischen Linien sind zwei Systeme von Schraubenlinien jeweils konstanter Steigung und ergeben bei der Ausbreitung des Zylinders in die Ebene das Parallelogrammnetz (vgl. Fig. 6b, § 5).

III. Zusammenhang mit den partiellen Differentialgleichungen.

Aus den in § 2 angegebenen partiellen Differentialgleichungen ergeben sich die auf Spiralflächen gefundenen geodätischen Viereckснetze inhaltsgleicher Felder durch einen der beiden folgenden Ansätze, welche die partiellen Differentialgleichungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen reduzieren:

$$\text{(19a)} \qquad \begin{cases} E(u, v) = \frac{1}{u}\,\mathsf{E}(u \cdot e^v), \\ G(u, v) = u\,\mathsf{G}(u \cdot e^v); \end{cases} \qquad \text{(einfach-logarithmische Anordnung)}$$

$$\text{(19b)} \qquad \begin{cases} E(u, v) = u^{\frac{1-n}{n}}\,\mathsf{E}\left(\frac{u}{v^n}\right), \\ G(u, v) = v^{n-1}\,\mathsf{G}\left(\frac{u}{v^n}\right). \end{cases} \qquad \text{(doppelt-logarithmische Anordnung)}$$

In (19b) sind für $n = -1$ die Drehflächen mit den in § 3 gefundenen logarithmisch angeordneten geodätischen Viereckснetzen enthalten. $n = +1$ liefert den auf S. 88 angegebenen Sonderfall des Spiralzylinders.

§ 5. Lösung des Problems für die Ebene.

I. Die allgemeinsten geradlinigen Viereckснetze inhaltsgleicher Felder.

Zu den in den §§ 3, 4 erhaltenen Drehflächen und Spiralflächen gehörten speziell auch abwickelbare Flächen, nämlich der Drehzylinder und der Spiralzylinder. Man gelangt zu diesen Zylinderflächen in beiden Fällen durch die Annahme, daß die geodätischen Netzlinien des einen Parametersystems die Breitenkreise (S. 77) bzw. die Spiralen (S. 86) der Fläche sind. Auf die gleichen Zylinderflächen führen außerdem bei den Drehflächen die linearen Viereckснetze (S. 81) und bei den Spiralflächen besondere doppelt-logarithmische Viereckснetze (S. 88).

Durch Ausbreitung der Mantelfläche des Dreh- bzw. Spiralzylinders in die Ebene erhält man zwei Typen geradliniger Viereckснetze inhaltsgleicher Felder. Die Netzeigenschaft ist dabei gegen affine Transformation der Ebene invariant. Der Beweis, daß die beiden Netztypen die einzig möglichen in der Ebene sind, folgt in diesem Paragraphen unter II.

Fig. 6 gibt eine Darstellung der beiden Netztypen durch zwei Systeme diskret aufeinanderfolgender Geraden, welche inhaltsgleiche Parallelogramme (a) bzw. Trapeze (b) begrenzen.

a) Parallelogrammnetz: Der Abstand $s(u)$ bzw. $t(v)$ der Knotenpunkte auf einer Geraden v_0 bzw. u_0 ändert sich beide Male linear mit dem Parameter. Der Bereich des infinitesimalen Netzes ist die ganze Euklidische Ebene.

b) Trapeznetz: Der Abstand $s(u)$ der Knotenpunkte auf einer Geraden v_0 des Parallelensystems ändert sich linear, der Abstand $t(v)$

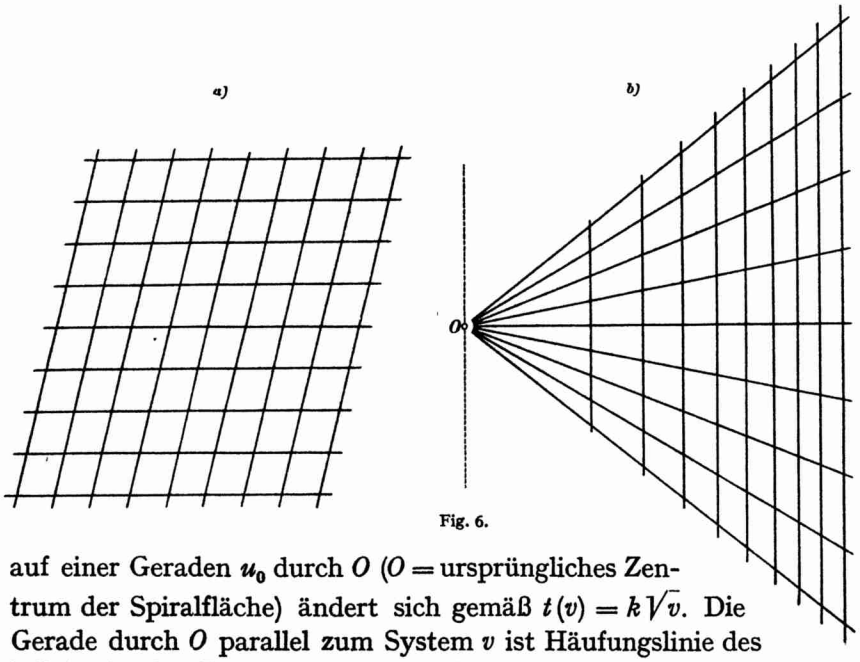


Fig. 6.

auf einer Geraden u_0 durch O (O = ursprüngliches Zentrum der Spiralfläche) ändert sich gemäß $t(v) = k\sqrt{v}$. Die Gerade durch O parallel zum System v ist Häufungslinie des infinitesimalen Trapeznetzes; sie selbst ausgeschlossen, überdeckt das Netz die ganze Euklidische Ebene ohne Singularität.

II. Unitätsbeweis.

Gemäß der Definition von § 1 ist ein geodätisches Viereckснetz das topologische Abbild eines Parallelogrammnetzes in der Ebene.

Ein geradliniges Viereckснetz inhaltsgleicher Felder in der Ebene existiert folglich mindestens innerhalb eines endlichen (nicht überschlagenen konvexen) Vierecks, dessen Seitengeraden paarweise verschiedenen Parametersystemen angehören. In diesem Netzbereich schneiden sich zwei Netzgerade des gleichen Systems in keinem, zwei Netzgerade verschiedener Systeme stets in genau einem Punkt P. Hält man irgendeine Netzgerade, etwa v_t, fest und bestimmt auf ihr den Abstand s_t des Punktes P_t von einem beliebigen eigentlichen Punkt O_t (der auch außerhalb des Netzbereiches liegen kann; vgl. Fig. 7) als

Funktion des Parameters u, so folgt gemäß der Formel (4b) für $K = 0$ unmittelbar

(20) entweder $\alpha)$ $s_i = a_i u + b_i$ oder $\beta)$ $s_i = a_i \sqrt{\pm u + b_i} + c_i$,

wobei a_i, b_i, c_i irgendwelche noch unbekannte reelle Zahlen sind; jedoch ist stets $a_i \neq 0$.

Die notwendige Folge der geforderten Flächengleichheit der infinitesimalen Vierecks*felder*, die durch jeweils zwei Paare konsekutiver Netzgeraden u, $u + du$; v, $v + dv$ begrenzt sind, ist die Flächengleichheit der Vierecks*streifen* zwischen zwei konsekutiven Geraden

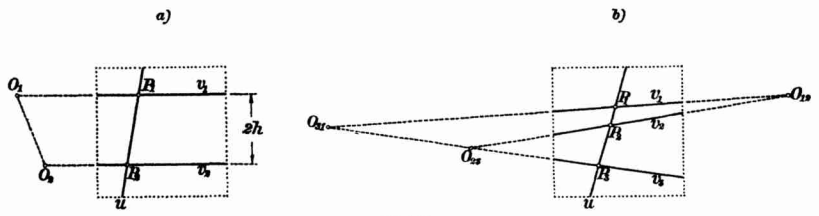


Fig. 7.

u, $u + du$ und zwei beliebigen Geraden v_1, v_2 des Netzbereiches; daraus folgt, daß der Flächeninhalt q_{12} eines durch die Geraden v_1, v_2 und u begrenzten Feldes (vgl. Fig. 7) als Funktion von u die Form

$$q_{12} = k_{12} u + \bar{q}_{12} \tag{21}$$

hat, wobei $k_{12} \neq 0$ und $\bar{q}_{12}$ feste Zahlen sind.

Wir greifen in einem Teil des Netzbereiches (in Fig. 7 durch ein punktiertes Quadrat angedeutet) irgend zwei Gerade v_1 und v_2 heraus, die den Winkel ϑ_{12} einschließen; es ist dann

(22) entweder a) $\vartheta_{12} = 0$ oder b) $\vartheta_{12} \neq 0$.

In Fig. 7a bzw. 7b ist die Fläche q_{12} gleich dem Viereck $O_2 O_1 P_1 P_2$ bzw. Dreieck $O_{12} P_1 P_2$.

Die sämtlichen sechs Möglichkeiten, welche hinsichtlich der Funktion $s_1(u)$ bzw. $s_2(u)$ auf den Geraden v_1 bzw. v_2 eintreten können, sind in der nachfolgenden Tabelle (vgl. (20) und (22)) zusammengestellt.

	(α); (α)	(α); (β)	(β); (β)
(a)	$a_1 = a_2$ Parallelogrammnetz $a_1 \neq a_2$ Trapeznetz	$a_2 = 0$ unmöglich	$a_1 + a_2 = 0$, d. h. $k_{12} = 0$ unmöglich
(b)	$a_1 \cdot a_2 = 0$ unmöglich	$a_2 = 0$ unmöglich	Trapeznetz

Die in der Tabelle angegebenen notwendigen Folgerungen, welche entweder der Voraussetzung $a_1 \cdot a_2 \neq 0$ bzw. $k_{12} \neq 0$ widersprechen oder auf wirkliche Lösungen führen, erhält man durch Koeffizientenvergleichung der Identitäten, die sich durch Einsetzen von (20) und (21) in die entsprechende der folgenden Gleichungen ergeben:

$$\text{a) } q_{12} = (s_1 + s_2)h \quad \text{und} \quad \text{b) } q_{12} = \tfrac{1}{2} s_1 s_2 \sin \vartheta_{12}.$$

Die Entfernungen s_1 und s_2 werden auf den Geraden v_1 und v_2 rechts vom Anfangspunkt positiv, links negativ gezählt.

Bei dem in der Tabelle zuletzt angeführten Fall ($b_{\beta\beta}$) ist noch eine besondere Überlegung nötig. Man füge zu den Geraden v_1 und v_2 noch eine weitere Gerade v_3 des Netzbereiches, die nicht parallel sein soll zu v_1 und v_2 (Fig. 7); $v_3 \parallel v_1$ oder $\parallel v_2$ ist bereits unter ($a_{\beta\beta}$) erledigt. Auf jeder der drei Geraden v_1, v_2, v_3 liegen nun je zwei eigentliche Schnittpunkte mit den beiden übrigen Geraden, welche als Anfangspunkte für die Entfernungen von P_1, P_2 und P_3 — ebenso wie oben — dienen sollen. Demgemäß gibt es auf jeder der drei Geraden zwei verschiedene Entfernungen, z. B. auf v_1

$$s_{12} = a_1 \sqrt{\pm u + b_1} + c_{12} \quad \text{und} \quad s_{13} = a_1 \sqrt{\pm u + b_1} + c_{13},$$

wobei zunächst $c_{12} \neq c_{21}$, $c_{13} \neq c_{31}$ und $c_{23} \neq c_{32}$ ist. Nun folgt durch Koeffizientenvergleichung, ganz entsprechend wie oben:

Das Vorzeichen von u unter dem Wurzelzeichen ist stets dasselbe; ferner ist

$$b_1 = b_2 = b_3 = b$$

und

$$\begin{aligned} a_1 c_{21} + a_2 c_{12} + \cdot &= 0, \\ a_1 c_{31} + \cdot + a_3 c_{13} &= 0, \\ \cdot + a_2 c_{32} + a_3 c_{23} &= 0; \end{aligned}$$

d. h. wenn $a_1 a_2 a_3 \neq 0$, gilt

$$c_{21} c_{32} c_{13} + c_{12} c_{23} c_{31} = 0. \tag{23}$$

Wendet man den Satz von Menelaos auf das Dreieck $O_{12} O_{23} O_{31}$ und die Gerade u an, so gilt

$$s_{21} s_{32} s_{13} - s_{12} s_{23} s_{31} \equiv 0, \qquad \text{also}$$

$$c_{21} c_{32} c_{13} - c_{12} c_{23} c_{31} = 0. \tag{24}$$

(23) und (24) liefern das Ergebnis $c_{21} c_{32} c_{13} = 0$.

Ist etwa $c_{21} = 0$, so folgt auch $c_{12} = 0$, also

$$s_{12} = a_1 \sqrt{u + b} \quad \text{und} \quad s_{21} = a_2 \sqrt{u + b}.$$

Das Geradensystem u ist folglich ein Parallelensystem, das mit den Geraden v, die wegen Fall ($a_{\alpha\alpha}$) alle durch einen Punkt gehen müssen, ein Trapeznetz bildet.

Ergebnis:

Die einzig möglichen geradlinigen Viereckснetze inhaltsgleicher Felder sind die auf S. 90 erwähnten zwei Typen des Parallelogramm- bzw. Trapeznetzes.

III. Nicht unbegrenzt unterteilbare Viereckснetze inhaltsgleicher Felder in der Ebene.

In § 1 wurde bei der Kennzeichnung infinitesimaler — d. h. unbegrenzt unterteilbarer — geodätischer Viereckснetze inhaltsgleicher Felder auch auf solche Viereckснetze mit endlich-großen Feldern hingewiesen, die keine weitere Unterteilung der verlangten Art zulassen. Die letzterwähnten Netze enthalten dann nur diskret aufeinanderfolgende geodätische Netzlinien u und v. Man kann nun die Mannigfaltigkeit solcher nicht unterteilbaren Netze dadurch einschränken, daß man fordert, das Netz lasse sich zwar nicht durch eine Zwischenfügung weiterer geodätischer Linien v, wohl aber durch eine solche der geodätischen Linien u fortgesetzt unterteilen.

Wir wollen jetzt in der Ebene solche „halb-unterteilbare" geradlinige Viereckснetze inhaltsgleicher Felder kennenlernen.

1. Gibt man drei eigentliche diskrete Gerade v_1, v_2, v_3 in der Ebene beliebig vor, so umhüllen die Geraden des Systems u, welche mit den drei festen Geraden zusammen ein halb-unterteilbares Viereckснetz inhaltsgleicher Felder bilden sollen, im allgemeinen eine Kurve 3. Klasse. Im speziellen kann die Hüllkurve auch eine Hyperbel sein; ihre Ausartung in ein Punktepaar führt auf die schon erledigten unbegrenzt unterteilbaren Netztypen (a) und (b), S. 90.

2. Wir suchen ein halb-unterteilbares Viereckснetz aus vier eigentlichen, nicht durch einen Punkt gehenden Geraden v_i aufzubauen. (Die Annahme, daß die vier Geraden einem Büschel angehören, führt abermals auf die beiden unbegrenzt unterteilbaren Netztypen, S. 90.) Es zeigt sich, daß die vier Geraden v_i in spezieller Weise miteinander verknüpft sind: ihre Konfiguration ist die von zwei Seiten AC und BC und den zwei zugehörigen Schwerlinien NB und MA eines Dreiecks. Die Hüllkurve der Geraden u ist eine spezielle Kurve 3. Klasse, welche durch das Salmonsche Doppelverhältnis gleich dem von vier gleichabständigen Punkten und durch die vier Asymptoten v_i charakterisiert ist.

In Fig. 8 ist ein solches halb-unterteilbares Netz konstruiert und die Hüllkurve punktiert angedeutet.

Das Dreieck ABC der Geradenkonfiguration ist speziell (d. h. in affiner Normierung) ein rechtwinklig-gleichschenkliges. Der Netzbereich erstreckt sich zwischen v_1 und v_4 nach beiden symmetrischen

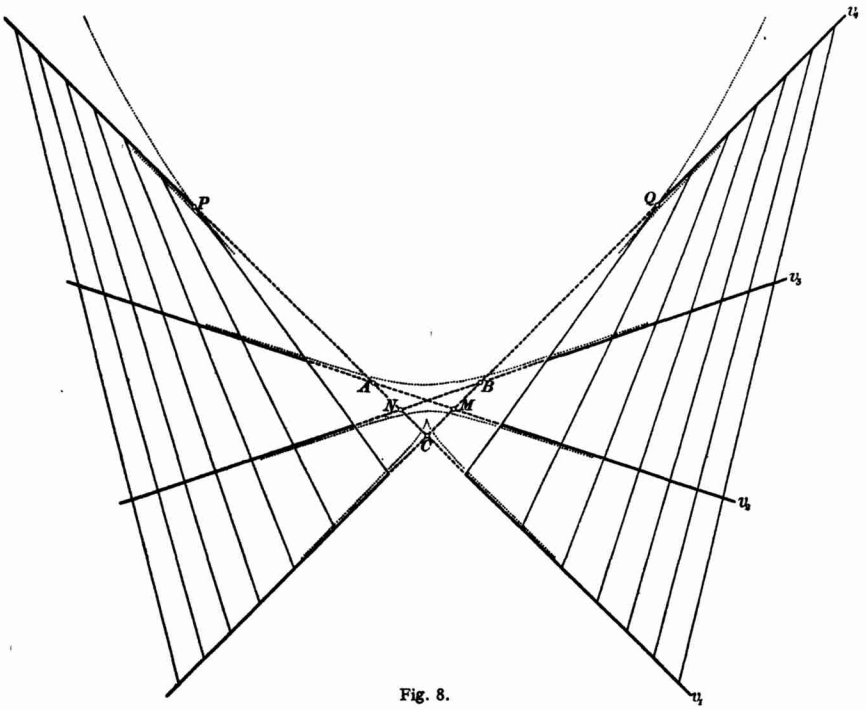


Fig. 8.

Hälften der Geradenkonfiguration v_i hin ins Unendliche und ist begrenzt durch die zwei Tangenten in den Schnittpunkten P und Q der Hüllkurve mit v_1 und v_4.

3. Der Versuch, aus mehr als vier Geraden v_i ein halb-unterteilbares Viereckснetz aufzubauen, führt lediglich auf die unbeschränkt unterteilbaren Netze, S. 90.

§ 6. Konstruktion polyedrischer Modelle.

In den § 3, 4 wurden Dreh- und Spiralflächen hergeleitet, auf welchen unbegrenzt unterteilbare geodätische Viereckснetze inhaltsgleicher Felder existieren.

Wir wollen jetzt *Ersatzpolyeder* herstellen, welche die für ganz allgemeine Flächen mit geodätischen Viereckснetzen inhaltsgleicher

Felder geforderten Eigenschaften in einem gewissen, im folgenden angegebenen Sinn besitzen.

1. An Stelle der Fläche trete ein Polyeder aus Dreiecken, deren immer je sechs in einer Polyederecke zusammenstoßen.

Einer Verbiegung der Flächenhaut entspreche eine „Faltung der Polyederhaut" längs der Kanten der starrbleibenden ebenen Dreiecksflächen.

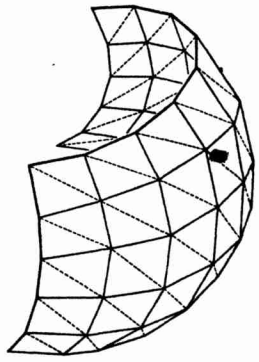


Fig. 9.

2. An Stelle der Kurven auf der Fläche treten Polygonzüge des Polyeders, und zwar sollen insbesondere die geodätischen Netzlinien eines auf der Fläche gelegenen Viereckssnetzes inhaltsgleicher Felder durch zwei Systeme von Polygonzügen ersetzt werden, die sich aus den Kanten des Polyeders systematisch zusammenfügen und unter 4. näher erklärt werden.

Das übrigbleibende dritte System von Polygonzügen ist zu dem Viereckssnetz, das die beiden anderen Systeme bilden, diagonal (vgl. Fig. 9; das Diagonalsystem ist gestrichelt).

3. An Stelle der Flächengleichheit der krummen Felder eines geodätischen Viereckssnetzes tritt die Flächengleichheit der windschiefen, geradlinig begrenzten Netzvierecke; dabei sei der Flächeninhalt eines Viereckes definiert als die Inhaltssumme der beiden Dreiecke, die längs der gestrichelten Linien zusammenstoßen.

4. Der Eigenschaft der Netzlinien, auf der Fläche geodätisch zu sein, entspreche folgende Eigenschaft der beiden Systeme von Kantenzügen des Polyeders: In jeder Polyederecke O (Netzknotenpunkt) sollen die anstoßenden Winkel zwischen den Kanten des Sechskants den in der Fig. 10 angegebenen Zusammenhang besitzen: $\alpha = \alpha'$; $\beta_1 + \beta_2 = \beta_1' + \beta_2'$. Jedes Einzelsechskant kann man folglich, vom übrigen Polyeder losgelöst, so falten, daß die längs OB und OB' zusammenstoßenden Dreieckspaare je ein ebenes Viereck bilden; das entstehende Vierkant ist dann von der Art, daß auf ihm die „Zweizüge" A_1OA_1' und A_2OA_2' eine gemeinsame Winkelhalbierende („Polyedernormale") besitzen.

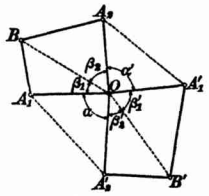


Fig. 10.

Ein Ersatzpolyeder der eben beschriebenen Art hat die für die Fläche geforderten Eigenschaften in dem Maße genauer, in welchem die Keilwinkel zwischen den Dreiecksflächen sich weniger von gestreckten Winkeln unterscheiden.