Werk

Titel: Über die Wurzelverteilung analytischer Funktionen, deren Wert an zwei Stellen geg...

Autor: Fekete, M.

Jahr: 1927

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?37721857X_0036|log27

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Über die Wurzelverteilung analytischer Funktionen, deren Wert an zwei Stellen gegeben ist.

Von M. FEKETE in Budapest.

1. Es ist eine fundamentale Eigenschaft der für $a \leqq x \leqq b$ stetigen reellen Funktion $f(x)$ der reellen Veränderlichen x, daß sie jeden Wert γ, der zwischen $\alpha = f(a)$ und $\beta = f(b)$ liegt ($\alpha \neq \beta$), mindestens in einem Punkte c zwischen a und b annimmt.

In mehreren Noten habe ich mich mit der Frage beschäftigt, in wiefern sich die angeführte Eigenschaft auf nicht reelle stetige Funktionen einer nicht reellen Veränderlichen übertragen läßt, und habe diese Frage — bei entsprechender Verallgemeinerung des Begriffes „zwischen“[1]) — für gewisse Funktionsklassen gelöst, namentlich für die Polynome[2]) und für ganze transzendente Funktionen, die durch gewisse Potenzreihen mit Lücken[3]) definiert sind. In allen diesen Fällen waren die betrachteten — analytischen — Funktionen in jedem endlichen Teile ihrer Definitionsbereiche regulär und enthielt ihr Wertevorrat jeden endlichen Wert ohne Ausnahme. Es — mit Hilfe der für die betrachteten Funktionen $\varphi(z)$ charakteristischen Daten: Gradzahl[4]) oder Gliederanzahl[5]) oder Summe der reziproken Werte der Exponenten[5]) — um a und b Bereiche abgegrenzt, wo alle Werte zwischen $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ mindestens einmal durch $\varphi(z)$ angenommen werden. Es stellte sich dabei heraus, daß diese Bereiche derart bestimmbar sind,

1) Die komplexe Zahl r liegt *zwischen* den beiden komplexen Zahlen p und q, falls ihr Bildpunkt auf der komplexen Zahlenebene auf die Verbindungsstrecke der Bildpunkte von p und q fällt.

2) M. Fekete, a) Über Zwischenwerte bei komplexen Polynomen [Acta litt. ac. scient. reg. univ. hung. Franc.-Jos. **1** (1923), 98—100]; b) Analoga zu den Sätzen von Rolle und Bolzano für komplexe Polynome und Potenzreihen mit Lücken [Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. **32** (1923), 299—306]; c) Über Gebiete, in denen komplexe Polynome jeden Wert zwischen zwei gegebenen annehmen [Math. Zeitschr. **22** (1925), 1—7]; d) Über die Nullstellenverteilung bei Polynomen, deren Wert an zwei Stellen gegeben ist [Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. **34** (1925), 220—233]. Vgl. auch J. v. Sz. Nagy, Über einen Satz des Herrn M. Fekete [Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. **32** (1923), 307—309]; E. Bálint, Bemerkungen zu der Note: „Analoga zu den Sätzen von Rolle und Bolzano . . .“ des Herrn M. Fekete [Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. **34** (1925), 233—237].

3) A. a. O. [2]) b).

4) A. a. O. [2]) a) und c).

5) A. a. O. [2]) b).

daß sie außer von den genannten Daten bloß von a und b abhängig, von den speziellen Werten $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ aber unabhängig sind.

2. Nun will ich in vorliegender Note die Verteilung derjenigen Stellen, wo analytische Funktionen $\varphi(z)$ einer komplexen Veränderlichen z jeden Wert zwischen $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ annehmen, in dem Falle untersuchen, wo die fraglichen Funktionen auch im Endlichen Singularitäten aufweisen und auch endliche Werte auslassen können. Als Endresultat meiner Untersuchungen ergibt sich der folgende Satz:

I. *Sei $a \neq b$, sonst beliebig. Es gibt dann ein einfach zusammenhängendes, endliches, a und b enthaltendes Gebiet $G = G(a, b)$ — dessen Lage und Ausdehnung von a und b und nur von diesen abhängt — von der folgenden Beschaffenheit: Jede analytische Funktion $\varphi(z)$, die im Gebiete G regulär ist und an den Stellen a, b ungleiche Werte $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ besitzt, nimmt entweder jeden Wert zwischen $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ innerhalb dieses Gebietes mindestens einmal, oder, wenn dies nicht der Fall sein sollte, sowohl den Wert $\varphi(a)$, als den Wert $\varphi(b)$ mindestens zweimal ebenda an. (Ist $\varphi(z)$ in G schlicht, so kann nur ersterer Fall eintreten.)*

3. Ich gelange zu diesem Satze durch eine Kette von sechs Hilfssätzen, deren Formulierung und Beweis ich vorerst anführe:

Lemma I. *Wenn*

$$F(x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

für $|x| < r$ regulär und für $0 < |x| < r$ von 0 und 1 verschieden ist, so ist

$$\text{(1)} \qquad \operatorname*{Max}_{|x| \leqq \frac{r}{2}} |F(x)| < A,$$

wobei A eine absolute Konstante bezeichnet.

Beweis[6]: Zufolge der Voraussetzung ist für $|x| < r$

$$\Phi(x) = -\sqrt{F(x)} = -1 - \frac{c_1}{2} x + \cdots$$

regulär, $\neq 0$, $\neq 1$, also nach einem Schottkyschen Satze[7])

$$\operatorname*{Max}_{|x| \leqq \frac{r}{2}} |\Phi(x)| < B,$$

6) Hier wird ein Kunstgriff angewendet, welchen Herr Landau in seinem Aufsatze „Über den Picardschen Satz" [Vierteljahrschr. d. Naturf. Ges. in Zürich, **51** (1906), 252—318] für den vereinfachten Beweis eines Hurwitzschen Satzes benützt hat. Vgl. a. a. O. S. 285.

7) Über den Picardschen Satz und die Borelschen Ungleichungen. [Berliner Sitzungsberichte (1904), 1244—1262.]

wobei B eine absolute Konstante bezeichnet. Daher ist

$$\operatorname{Max}_{|x| \leqq \frac{r}{2}} |F(x)| < A = B^2. \qquad \text{W. z. b. w.}$$

Lemma II. *Wenn*

$$F(x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

für $|x| < r$ *regulär und für* $0 < |x| < r$ *von* 0 *und* 1 *verschieden ist, so ist für* $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$r < \frac{\mathsf{A}}{|c_n|^{\frac{1}{n}}},$$

wobei A *eine absolute Konstante bezeichnet.*

Beweis: Zufolge der Voraussetzung besteht nach Lemma I die Ungleichung (1). Folglich ist — nach dem Cauchyschen Satz — für alle n

$$|c_n| \left(\frac{r}{2}\right)^n < A,$$

also ist für $n = 1, 2, \ldots$ $\quad r < 2 \left|\frac{A}{c_n}\right|^{\frac{1}{n}}.$

Nun ist aber für jedes ganze positive n

$$A^{\frac{1}{n}} \leqq \operatorname{Max}\{1, A\} = \frac{\mathsf{A}}{2},$$

daher

$$r < \frac{\mathsf{A}}{|c_n|^{\frac{1}{n}}}, \quad (n = 1, 2, \ldots). \qquad \text{W. z. b. w.}$$

4. Lemma III. *Wenn*

$$f(x) = \alpha + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

für $|x| < r$ *konvergiert und für* $0 < |x| < r$ *von* α *und* γ *verschieden ist,* $(\gamma \neq \alpha)$, *so ist für* $n = 1, 2, \ldots$

$$r < \mathsf{A} \left|\frac{\gamma - \alpha}{a_n}\right|^{\frac{1}{n}},$$

wo A *dieselbe Zahl bedeutet, wie in Lemma II.*

Beweis: Man setze

$$F(x) = \frac{f(x) - \gamma}{\alpha - \gamma} = 1 + \frac{a_1}{\alpha - \gamma} x + \frac{a_2}{\alpha - \gamma} x^2 + \cdots;$$

dann genügt $F(x)$ für $|x| < r$ den Voraussetzungen des Lemma II. Danach ist aber

$$r < \frac{\mathsf{A}}{\left|\frac{a_n}{\alpha - \gamma}\right|^{\frac{1}{n}}}, \quad (n = 1, 2, \ldots). \qquad \text{W. z. b. w.}$$

Lemma IV. *Wenn die Funktion*

$$f(x) = \alpha + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots$$

mit $a_k \neq 0$ *(k feste Zahl) für* $|x| \leqq \mathsf{A}\left|\frac{\gamma-\alpha}{a_k}\right|^{\frac{1}{k}}$ *regulär ist, so hat im Bereiche*

$$0 < |x| \leqq \mathsf{A}\left|\frac{\gamma-\alpha}{a_k}\right|^{\frac{1}{k}}$$

mindestens eine der beiden Gleichungen

$$f(x) = \alpha, \quad f(x) = \gamma$$

eine Wurzel. (A *die obige Konstante.*)

Beweis: Sonst müßte — nach Lemma III — für jedes ganze positive n die Ungleichung

$$\mathsf{A}\left|\frac{\gamma-\alpha}{a_k}\right|^{\frac{1}{k}} < \mathsf{A}\left|\frac{\gamma-\alpha}{a_n}\right|^{\frac{1}{n}}$$

bestehen. Das ist aber für $n = k$ unmöglich.

5. Lemma V. *Sei*

$$f(x) = \alpha + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{2}$$

eine für $|x| \leqq 2\mathsf{A}$ *reguläre Funktion.* (*Hierbei bedeute* A *dieselbe Konstante, wie in Lemma* II. *Nach ihrer Definition ist* $\mathsf{A} \geqq 2$). *Sei*

$$f(0) = \alpha \neq \beta = f(1).$$

Bezeichne γ *irgendeine komplexe Größe, für welche die Ungleichungen*

$$|\gamma - \alpha| \leqq |\beta - \alpha|, \quad \gamma \neq \alpha, \quad \gamma \neq \beta$$

gelten. Dann besitzt im Bereiche

$$0 < |x| \leqq 2\mathsf{A}$$

mindestens eine der beiden Gleichungen

$$f(x) = \gamma, \quad f(x) = \alpha \qquad \textit{eine Wurzel.}$$

Beweis: Nach Voraussetzung ist die Potenzreihe (2) für $x = 1$ konvergent und besteht die Gleichung

$$\alpha + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \beta;$$

folglich ist $|\beta - \alpha| \leqq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots,$

also a fortiori

$$|\gamma - \alpha| \leqq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots. \tag{3}$$

Dann muß es eine solche natürliche Zahl k geben, daß

$$|\gamma - \alpha| \leqq 2^k |a_k|; \tag{4}$$

sonst wäre nämlich für jedes $n \geqq 1$

$$\frac{1}{2^n}|\gamma - \alpha| > |a_n|,$$

also wäre $(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots)|\gamma - \alpha| > |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots,$

im Widerspruche zu (3). Aus (4) folgen die beiden Ungleichungen

$$|a_k| > 0, \quad \left|\frac{\gamma - \alpha}{a_k}\right|^{\frac{1}{k}} \leqq 2,$$

man kann also Lemma IV auf $f(x)$ anwenden. Danach muß im Bereiche $0 < |x| \leqq 2A$ das Produkt $(f(x) - \alpha)(f(x) - \gamma)$ mindestens einmal verschwinden. W. z. b. w.

Durch zweimalige Anwendung ergibt sich daraus

Lemma VI. *Sei $f(x)$ eine analytische Funktion, welche in den beiden Kreisbereichen*

$$|x| \leqq 2A, \quad |x - 1| \leqq 2A \tag{5}$$

regulär ist und für welche

$$f(0) = \alpha + \beta = f(1)$$

ausfällt. Ist γ irgendeine komplexe Zahl, die zwischen α und β liegt, so muß die Gleichung

$$f(x) = \gamma$$

im Kreisbogenzweieck K, bestehend aus den Kreisbereichen (5), *mindestens eine Wurzel haben, es sei denn, daß die beiden Gleichungen*

$$f(x) = \alpha, \quad f(x) = \beta$$

daselbst mindestens je zwei Wurzeln besitzen.

6. Um nun zum Beweise des Satzes I überzugehen, ordne ich zunächst dem Paare der ungleichen Werte a und b ein Kreisbogenzweieck $K(a, b)$ zu, nämlich dasjenige, welches aus dem eben definierten K durch die Transformation

$$x = \frac{z - a}{b - a}$$

hervorgeht; offenbar ist $K(a, b)$ aus den beiden Kreisbereichen

$$|z - a| \leqq 2A\,|b - a|, \quad |z - b| \leqq 2A\,|b - a|$$

zusammengesetzt. Nun genügt $K(a, b)$ leichtersichtlich den Anforderungen, welche für das Gebiet $G(a, b)$ des zu beweisenden Satzes aufgestellt wurden: Es ist einfach zusammenhängend, endlich; enthält die Stelle a und b; seine Lage und Ausdehnung ist durch a und b völlig bestimmt; endlich nimmt jede analytische Funktion $\varphi(z)$, die in $K(a, b)$ regulär ist und in den Punkten a, b ungleiche Werte hat, jeden Wert zwischen $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ in $K(a, b)$ notwendigerweise mindestens einmal an, ausgenommen den Fall, wo die Gleichungen

$$\varphi(z) = \varphi(a), \quad \varphi(z) = \varphi(b)$$

mindestens je zwei Wurzeln daselbst besitzen. Die letzte Behauptung folgt aus dem Lemma VI, indem dieses auf die Funktion

$$f(x) \equiv \varphi((b - a)\,x + a)$$

angewendet wird. Damit ist die Existenz des Gebietes $G(a, b)$ und somit Satz I bewiesen.

7. Ich formuliere eine interessante Folgerung aus Lemma V als Satz II. *Sei*

$$F(x) = x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots \tag{6}$$

eine für $|x| \leqq 1$ *reguläre Funktion, die im Bereiche* $0 < |x| \leqq 1$ *nicht verschwindet. Dann bildet die Funktion* $w = F(x)$ *die Scheibe des Einheitskreises auf einen Bereich ab, der die Kreisscheibe*

$$|w| \leqq u$$

enthält. Hierbei bezeichnet u *eine positive absolute Konstante.*

Dieser Satz enthält[8]) den Koebe-Carathéodoryschen Satz über die schlichte Abbildung des Einheitskreises durch Potenzreihen der Form (6) als Spezialfall, und er kreuzt sich mit einer Landauschen Erweiterung[9]) desselben. Sein Beweis kann etwa so geführt werden:

Sei

$$\operatorname*{Max}_{|x| = \frac{1}{2A}} |F(x)| = m$$

gesetzt, wobei A die Konstante des Lemma II bezeichnet, und sei x_0 eine komplexe Zahl, für welche

$$|x_0| = \frac{1}{2A}, \quad |F(x_0)| = m, \quad F(x_0) = \beta$$

besteht. Man definiere $f(x)$ durch die Gleichung

$$f(x) = x x_0 + c_2 (x x_0)^2 + c_3 (x x_0)^3 + \cdots$$

Dann ist — zufolge der Voraussetzungen — die Funktion $f(x)$ für $|x| \leqq 2A$ regulär, für $0 < |x| \leqq 2A$ von $f(0) = 0$ verschieden; ferner ist $f(1) = \beta + f(0) = 0$. Daraus folgt nach dem Lemma V, daß die Gleichung

$$f(x) = \gamma$$

im Kreise $|x| \leqq 2A$ mindestens eine Wurzel haben muß, sobald

$$|\gamma| \leqq |\beta| \tag{7}$$

ist. Danach besitzt die Gleichung

$$F(x) = \gamma$$

im Kreise $|x| \leqq 1$ mindestens eine Wurzel, wenn nur (7) erfüllt ist. Nun ist wegen (6)

$$|\beta| = \operatorname*{Max}_{|x| = \frac{1}{2A}} |F(x)| \geqq \frac{1}{2A},$$

8) Vgl. L. Bieberbach, Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen. [Encyklopädie der math. Wiss. II 3, S. 511.]

9) E. Landau, Zum Koebeschen Verzerrungssatz. [Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo **46** (1922), 347—348.]

folglich wird jeder Wert γ, für welchen

$$|\gamma| \leqq \frac{1}{2A}$$

ist, im Einheitskreise durch $F(x)$ a fortiori angenommen. Daher gehört

$$|w| \leqq \frac{1}{2A}$$

zum Bildbereiche des Einheitskreises. W. z. b. w.

8. Schließlich will ich noch folgendes erwähnen:

Im Lemma VI und somit im Satze I wurde der Inhalt des Lemma V nicht völlig ausgebeutet: man kann daraus auch die weitergehende Tatsache herauslesen, daß im oben definierten Kreisbogenzweiecke $K(a, b)$ durch die daselbst regulären Funktionen $\varphi(z)$ nicht nur die Zwischenwerte von $\alpha = \varphi(a)$ und $\beta = \varphi(b)$, sondern auch sämtliche Werte γ aus dem Kreisbogenzweieck $\mathsf{K} = \mathsf{K}(\alpha, \beta)$, bestehend aus den Kreisbereichen $|\gamma - \alpha| \leqq |\beta - \alpha|, \quad |\gamma - \beta| \leqq |\beta - \alpha|,$ angenommen werden müssen, abgesehen von dem oben angedeuteten Ausnahmefalle. Wird aber das Beweisverfahren selbst, welches ich zur Begründung des Lemma V verwendet habe, besser ausgenützt, so kann man allgemeinere Bereiche als $\mathsf{K}(\alpha, \beta)$ angeben, deren sämtliche Werte in ähnlich bestimmbaren Gebieten wie $K(a, b)$ durch $\varphi(z)$ angenommen werden müssen, es sei denn, daß $\varphi(z)$ daselbst singulär wird oder die Werte $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ zweimal annimmt. Tritt z. B. der Doppelkreis

$$|\gamma - \alpha| \leqq p\,|\beta - \alpha|, \quad |\gamma - \beta| \leqq p\,|\beta - \alpha| \qquad (p > 1)$$

an die Stelle von $\mathsf{K}(\alpha, \beta)$, so genügt es, $K(a, b)$ durch den Doppelkreis

$$|z - a| \leqq 2pA\,|b - a|, \quad |z - b| \leqq 2pA\,|b - a|$$

zu ersetzen. Auf Grund dieses Ergebnisses kann man die folgende Aufgabe, bis auf den mehreremal angegebenen Ausnahmefall, unmittelbar lösen:

Wenn der Wert einer analytischen Funktion $\varphi(z)$ an zwei Stellen $z = a$ und $z = b$ gegeben ist, und wenn die Werte $\alpha = \varphi(a)$, $\varphi(b) = \beta$ voneinander und von γ verschieden sind, so bestimme man ein Gebiet auf der z-Ebene so, daß dessen Lage und Ausdehnung nur von den Größen a, b; α, β und γ abhänge, und daß es mindestens eine Nullstelle von $\varphi(z) - \gamma$ enthalte.[10])

Die Formulierung der Lösung überlasse ich dem Leser.

10) Vgl. a. a. O. [2]) d).

(Eingegangen am 24. 11. 25.)