Werk

Titel: Literarisches.

Jahr: 1926

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?37721857X_0034|log42

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

mathematicas eximie egregieque docuit, virum in omni matheseos ambitu optime versatum, qui suis investigationibus hanc scientiam in omnibus fere suis partibus multum auxit, maxime vero in geometria et mechanica novas vias summo cum ingenio aperuit, qui profundis dissertationibus de cognoscendi modo in mathesi nec non de valore eius pro humano cultu amplificando optime meruit et nostrae quoque Universitati summopere profuit".

Literarisches.

Notizen.

Bei der unterzeichneten Sternwarte befindet sich noch eine Reihe von Exemplaren der Schrift von Hansen: „Ermittelung der absoluten Störungen in Ellipsen von beliebiger Exzentrizität und Neigung" (1843). — Institute, welche die Schrift früher nicht erhalten haben, und Personen, die sie zu besitzen wünschen, wollen sich vormerken lassen bei der

STERNWARTE GOTHA.

Besprechungen.

Sophus Lie, Gesammelte Abhandlungen. Auf Grund einer Bewilligung aus dem norwegischen Forschungsfonds von 1919 mit Unterstützung der Videnskapsselskap zu Kristiania und der Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, herausgegeben durch Friedrich Engel (Gießen) und Paul Heegaard (Kristiania). Fünfter Band. Abhandlungen über die Theorie der Transformationsgruppen, erste Abteilung, herausgegeben von Friedrich Engel, 776 S., gr. 8. Leipzig und Kristiania 1924. Geb. ℳ 20.—.

Der neue, von Engel mit gleicher Sorgfalt wie der 1922 erschienene Band III bearbeitet (s. die Besprechung in Band 33 dieser Jahresberichte, S. *50*), verschafft den langersehnten vollen Einblick in das ureigenste, als orginelle Leistung unbestrittene, in anderer Hinsicht umstrittene und nur gelegentlich in seinen elementarsten Teilen von Lehrbüchern berücksichtigte Schaffensgebiet von Sophus Lie, die Theorie der kontinuierlichen Transformationsgruppen.

Sein Programm, großzügigen Aufbau eines Teiles des berühmten Erlanger Programms verheißend, hat Lie in aller Stille dem so ganz anders gearteten, später so uneigennützig für ihn eingetretenen Freund Adolph Mayer 1873 mitgeteilt (S. 586): „Die Zeit ist gekommen, glaube ich, um in den Differentialgleichungen einen ähnlichen Fortschritt zu machen" [wie Galois in den algebraischen Gleichungen]. Und weiter 1874 (S. 604): „Meine Transformationstheorie gestattet, gewisse Klassen von Differentialgleichungen aufzustellen, deren Integration auf diejenige von Gleichungen niedrigerer Ordnung zurückführbar ist." „Jeder Differentialgleichung entspricht eine gewisse Gruppe, der Inbegriff aller Berührungs- [bzw. Punkt-]transformationen, welche die Gleichung in sich überführen. Zwei Differentialgleichungen gehören derselben Klasse an, wenn die Gruppen ineinander überführbar sind. Hierbei ist indessen wohl zu bemerken, daß es Differentialgleichungen gibt, welche überhaupt keine Transformation in sich gestatten". Im Jahre 1874 hat Lie auch schon (S. 603) seinem Freunde mitgeteilt, wie man gewöhnliche

Differentialgleichungen zweiter Ordnung von gewissem Bau zu konstruieren hat, damit sie eine Gruppe von Punkttransformationen gestatten, was ja im allgemeinen nicht der Fall ist.

Hier, nämlich an dem Umstand, daß die Theorie ganz gewiß nur für eine beschränkte Auswahl von Differentialgleichungen verwendbar ist, mag zum Teil jene (stille) Kritik eingesetzt haben, die neben anderen persönlichen und unpersönlichen Gründen hemmend wirkte und in dem (angeblichen) Wort von Frobenius gipfelt, eine Gruppentheorie für Differentialgleichungen sei wenig aussichtsreich.

Außer in einer Reihe von Ankündigungen und Mitteilungen hat dann Lie sein Programm noch zusammenfassend in einem Vortrag vor der Société Mathématique de France (3. Nov. 1882) entwickelt (S. 669 ff.) stolz verkündend: „Die Zusammenfassung aller dieser Theoreme gibt, wenn ich mich nicht täusche, das Mittel um den größtmöglichen Vorteil, aus bekannten infinitesimalen Transformationen zu ziehen." Daß diese Verheißung noch nicht geklärt ist, hat G. Scheffers später in redlichster Absicht um jeden Verdacht der Parteilichkeit zu vermeiden, nicht verschwiegen (vgl. diese Berichte XII (1903), 525—539), mit um so größerer Freude wird er jetzt begrüßen, was Engel zur Aufklärung beizubringen hat und was der weitere Band über Transformationsgruppen mit Sicherheit erwarten läßt. —

In eisernem Ringen mit dem neuen Stoff, ständig auf neue Hilfsmittel bedacht, schmiedete der nordische Titan sein Werkzeug, die Gruppen, es war eine „schreckliche Arbeit". Er kannte sie „wie ein alter Hauptmann jeden Mann seiner Kompagnie oder ein erfahrener Lehrer jeden Schüler seiner Klasse, ja noch besser". Engel nimmt in einer Zusammenstellung die Parade vorläufig einmal über die Infanterie, die Gruppen der Ebene ab (S. 767—773), überall auf die „Personalakten" verweisend. Er hat als Generalstabschef (und was zu unterstreichen ist, aber hier noch nicht hervortritt, Schöpfer neuer Formationen) die Geschichte der Eroberungszüge mit nachschaffendem Feinsinn aufgedeckt, den Lies oft so schwer zu deutendes „Man weiß bekanntlich" auf eine recht harte Probe stellte, eine Probe, die wiederum den Berichterstatter die Grenzlinie zwischen nachschaffen und neu erdenken kaum erkennen läßt.

Durch Engel erfahren wir zum erstenmal genau, wie eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung, die durch Berührungstransformation auf die lineare Form gebracht werden kann, zu behandeln ist (S. 599), wir sehn wie unter Aufgebot der ganzen Kerntruppe, eine Differentialgleichung m-ter Ordnung ($m > 1$), die eine $r\,(> m)$-gliedrige Gruppe gestattet, durch Quadratur oder sogar durch Elimination allein zu bewältigen ist. Um aus dem reichen Schatz dieser Analysen noch ein Stück herauszugreifen, sei hier noch der Integrationstheorie eines r-gliedrigen vollständigen Systems in n Veränderlichen mit bekannter $(n - r)$-gliedriger einfacher, d. h. keine invariante Untergruppe aufweisender Gruppe gedacht (S. 688 ff.), ein Fall, in dem das „bekanntlich" eine „selbst für ihn ganz ungewöhnlich starke Zumutung an den Leser stellt, zwischen den Zeilen zu lesen und Folgerungen zu ziehen". —

Wer auf neue Eroberungen ausgehen will, findet nicht nur im Vorwort des Herausgebers Winke, sondern auch zerstreut an anderen Stellen, z. B. auf S. 619 und S. 738. Die Feststellung, ob eine Differentialgleichung eine Gruppe gestattet, eine Vorfrage also, die in der Galoisschen Theorie ganz

ausscheidet, wird hier zu einem tiefliegenden und sehr schwierigen Problem. An dieser Stelle kann ich dem Herausgeber leider einen Vorwurf nicht ersparen: Hat er denn ganz vergessen, was in einer stattlichen Reihe von Greifswalder Dissertationen zutage gefördert worden ist? Die durch die „triviale aber wohl noch von niemandem vollständig ausgenützte Methode der Vertauschung der Differentiationsfolge" hat darin für die Invariantentheorie der Differentialgleichungen bei der unendlichen Gruppe aller Punkttransformationen große Vorspanndienste geleistet (vgl. Nr. 17—21 des Artikels III, D 7 der Mathematischen Encyklopädie).[1])

Genau die gleiche Methode kann mit Erfolg auch in einer andern, von Lie geweckten Fragestellung verwendet werden, der Bestimmung der Differentialinvarianten, die gerade jetzt wieder den Reichtum der großen Erbschaft an ungemünztem Gold zeigt. Der schöne Satz G. Kowalewskis, daß die niedrigste Differentialinvariante einer in den Elementen

$$(x, y, y', \ldots, y^{(r-2)})$$

transitiven Gruppe der Ebene in der Form

$$J_{r-1} = y^{(r-1)}\varphi(x, y, y', \ldots, y^{(r-2)}) + \psi(x, y, y', \ldots, y^{(r-2)})$$

geschrieben und daher durch Quadratur bestimmt werden kann, läßt sich unter Ausnützung der „trivialen" Methode in aller Kürze beweisen und vervollständigen, worauf an anderer Stelle einzugehen sein wird.[2])

Heidelberg. HEINRICH LIEBMANN.

A. Berliner und **K. Scheel, Physikalisches Handwörterbuch.** 903 S. Mit 573 Textfiguren. Berlin 1924, Julius Springer.

G. Berndt, Physikalisches Wörterbuch. 200 S. Mit 81 Textfiguren. Leipzig und Berlin 1920, B. G. Teubner. Geb. ℳ 3.60.

Nach den neuesten Beschlüssen der akademischen Kommission soll die mathematische Enzyklopädie für immer ein Torso bleiben. Früher in Aussicht genommene Artikel wurden gestrichen. Wann man in den Besitz von Bandregistern kommen wird, ist noch nicht abzusehen. Um so mehr ist es zu begrüßen, daß als notwendige Ergänzung Wörterbücher zu erscheinen beginnen. Die hier vorliegenden physikalischen Wörterbücher greifen auf den ursprünglichen, aber dann verlassenen Grundgedanken der Enzyklopädie zurück, bringen ihn aber unter prinzipiellem Verzicht auf den Charakter als Sammlung langer Monographien zur Durchführung, indem der Stoff auf recht viele Stichwörter verteilt wird.

Bei der Benutzung des erstgenannten Buches muß man freilich eine gewisse Sorgfalt beobachten, damit man findet, was man sucht. Die Herausgeber haben nämlich den Mitarbeitern so viel Freiheit gelassen, daß sie ohne gegenseitige Bezugnahme Artikel verschiedener Verfasser über das gleiche Stichwort hintereinander stellen. Besonders kraß tritt dies bei dem Artikel „Luftwiderstand" äußerlich und innerlich hervor. Den Magnuseffekt sucht man vergeblich.

---

1) Herr Engel wird gewiß im nächsten Band darauf eingehn.

2) H. Liebmann, Die Aufschließung von Differentialinvarianten. Heidelberger Akad. Ber. Math.-naturw. Klasse 1924/25. Elfte Abhandlung.

Die Herausgeber tun sich gleichwohl im Vorwort etwas darauf zugute, daß sie so viel sorgfältigere Menschen sind als ihre Mitarbeiter. Dem gegenüber verdient es wohl hervorgehoben zu werden, daß doch einer oder der andere Mitarbeiter recht pünktlich gewesen sein muß; denn mit Herrn F. Noether hatten wohl die Herausgeber seit Jahren nicht mehr zu tun, sonst müßten sie wohl bemerkt haben, daß er schon lange von Berlin verzogen ist.

Wenn auch zu bemängeln ist, daß die Herausgeber für rein mathematische Fragen, wie z. B. den Begriff des n-fach zusammenhängenden Raumes, schlecht geschulte Mathematiker herangezogen haben, so wird doch gerade dadurch die Brauchbarkeit des Buches für Mathematiker nicht geschmälert. Diese werden gern dazu greifen, wenn ihnen bei ihrer Lektüre ein physikalischer Begriff vorkommt. Man wird dann zuverlässige Auskunft finden.

Das kleine Wörterbuch von Berndt hat den wesentlichen Vorzug, daß es eines Mannes Arbeit ist. Es beschränkt sich durchweg auf die knappe und klare Erklärung der Begriffe nebst etymologischer Erläuterung. Es bringt zum Unterschied von Berliner und Scheel auch kurze biographische Angaben großer Physiker. Ich habe es bei Stichproben immer durchaus brauchbar gefunden.

Den durch diese Wörterbücher auf physikalischem Gebiet gesteuerten Mängeln will ein vom Referenten und Herrn v. Mises unternommenes, demnächst erscheinendes Wörterbuch auch auf mathematischem Gebiet abhelfen.

BIEBERBACH.

Robert Fricke, Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen. Zweiter Teil: Die algebraischen Ausführungen. 546 S. Mit 40 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig und Berlin 1922, B. G. Teubner. Geh. ℳ 14.—; geb. ℳ 16.—.

Die Besprechung dieses Buches kommt recht spät. Der verstorbene Herausgeber dieser Jahresberichte hatte zwar die Besprechung in Aussicht genommen, sie aber nicht mehr durchführen können. Inzwischen hat sich dieses Werk schon allgemein als wertvolle Bereicherung der mathematischen Literatur erwiesen; so mag hier ein kurzer Hinweis auf den Inhalt genügen.

In einer ungefähr 150 Seiten langen Einleitung trägt der Verfasser die Hilfsmittel aus der Algebra, der Theorie der algebraischen Funktionen und der Zahlentheorie zusammen, die weiter benötigt werden. Es folgt auf 100 Seiten die Darstellung der Additions- und Multiplikationstheoreme, und die volle zweite Hälfte des Buches gehört endlich der Transformationstheorie. Als besonderer Vorzug der Darstellung muß noch die stets lebendige Durchdringung geometrischer und algebraisch-zahlentheoretischer Überlegung gebucht werden, die es erlaubt, auch den sonst trockensten Erörterungen stets sozusagen mit dem Auge zu folgen.

BIEBERBACH.

August Schuster, Mathematische Unterrichtsbriefe. Zur Einführung in das Studium der höheren Mathematik mit besonderer Rücksicht auf den Selbstunterricht. Teil I 1918, Teil II (Übungsbuch) 1922. Berlin, Walther de Gruyter & Co.

„Die Mathematik ist wie keine andere Wissenschaft geeignet, das logische Denken zu lehren und zu üben.“ „In bezug auf die ‚Methode‘ rechnet es sich der Verfasser dieser Briefe zum Verdienst an, speziell bei der Definition . . .

der Differenzialrechnung den Begriff des unendlich Kleinen ganz und gar vermieden zu haben, dadurch, daß er das Differenzial als eine endliche Größe auffaßt. . . . Er glaubt dadurch dem Schüler viel Kopfzerbrechens erspart und sich dessen Dank verdient zu haben."

So weit der Verfasser im Vorwort. Beim Blättern im Buch fielen meine Augen zuerst auf die binomische Reihe, die der Verfasser schon vor der Betrachtung der Differenzialrechnung und vor Erläuterung des Grenzbegriffes, den man im ganzen Buch vergeblich sucht, für beliebige reelle Exponenten herleitet. Die Sache ist nämlich die, daß der Verfasser den binomischen Satz für ganzzahlige positive Exponenten zwar nicht beweist, aber glaubhaft macht, und dann die gewonnene Formel kurzerhand für gebrochene Exponenten behauptet. Wem dieses Beispiel nicht zur Erläuterung der eingangs zitierten Worte des Verfassers genügt, wird sich an der Unbefangenheit weiter erfreuen können, mit der die Potenzreihen für e^x, $\log(1+x)$ usw. gewonnen werden.

Wie in einer Lotterie geht es da zu, nur mit dem Unterschied, daß der Verfasser vorher weiß, welche Lose gewinnen. Der Verfasser gehört, wie durch beliebig viel Beispiele erhärtet werden kann, zu jenen leichtfertigen und oberflächlichen Pädagogen, die die Wahrheit für gefährlich halten, und die meinen, die Dinge hätten sich nach ihrer Fähigkeit, etwas klarzulegen, zu richten. Wundern muß man sich auch, daß ein Verleger, der sich früher „Vereinigung wissenschaftlicher Verleger" nannte, so schlecht beraten ist, daß er ein solches Märchenbuch unter dem Titel „Unterrichtsbriefe" auf den Markt bringt.

BIEBERBACH.

Felix Eberty, Die Gestirne und die Weltgeschichte. Gedanken über Raum, Zeit und Ewigkeit. Mit einer Einleitung von Albert Einstein. 48 S. Berlin 1925, J. M. Spaeth.

Das Büchlein wird wohl am besten charakterisiert, wenn wir ohne weiteren Kommentar die Einleitung hierher setzen, die Einstein dem Büchlein beigegeben hat:

„Dies Büchlein, von einem originellen, geistreichen Menschen geschrieben, entbehrt nicht des aktuellen Interesses. Denn es zeigt auf der einen Seite kritischen Geist gegenüber dem überkommenen Zeitbegriff; auf der anderen Seite zeigt es, vor welchen eigentümlichen Folgerungen uns die Relativitätstheorie rettet, der doch so vielfach gerade der bizarre Charakter ihrer Folgerungen zum Vorwurf gemacht wird." BIEBERBACH.

Gerhard Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der Fredholmschen Determinanten. 2., verkürzte Aufl. 304 S. Berlin und Leipzig 1925, Walter de Gruyter & Co. Geheftet ℳ 14,—; gebunden ℳ 15,50.

Das Buch ist bis auf einige Kürzungen ein unveränderter Abdruck der ersten Auflage. Die Streichungen betreffen wesentlich die Theorie der Elementarteiler, die aus dem Buch nun weggeblieben ist, sowie die Theorie der Integralgleichungen, die nun nur noch so weit dargestellt wird, als man aus der Verwendung der Determinanten in ihr Vorteile ziehen kann. Es unterliegt keinem Zweifel, daß das Buch durch die Kürzungen nichts von seiner Eigenart und dem Interesse verloren hat, auf das die lebendige Darstellung Anspruch besitzt.

BIEBERBACH.

K. Grelling, Mengenlehre. Math.-phys. Bibliothek Bd. 58. II u. 49 S. Mit 6 Figuren im Text. Leipzig und Berlin 1924, B. G. Teubner. Kart. ℳ 1.—.

Auf wenigen Seiten wird hier eine erste Einführung in die Mengenlehre geboten, die Lehrern, Studierenden und reiferen Schülern sehr wohl empfohlen werden kann. Die lebhafte, anregende Darstellung des Verfassers wird sie gewiß fesseln und tiefer interessieren und sie für ein eingehendes Studium der Mengenlehre gut vorbereiten. Auch derjenige, der lediglich einige Zweige der Mathematik anzuwenden gelernt hat und der nun wenigstens flüchtig einen Einblick in ihre Grundlagen tun möchte, sollte zu dem Grellingschen Büchlein greifen.

Selbstverständlich konnte der Verfasser auf dem durch die Richtlinien der mathematisch-physikalischen Bibliothek vorgeschriebenen Raum und Niveau keine systematische Darstellung der Mengenlehre geben. Er mußte in vielen Fällen auf die Mitteilung der Beweise verzichten und sich darauf beschränken, die wichtigsten Begriffe zu entwickeln und die charakteristischen Beweismethoden und Gedankengänge an stofflich leicht faßlichen Beispielen zu erläutern. Daß für eine derartige Auswahl keine Regel aufgestellt werden kann und daß sie dem Geschmack des Verfassers überlassen bleiben muß, ist selbstverständlich. Über den Geschmack läßt sich nicht disputieren, wohl aber über den Grad der Schwierigkeit einer mathematischen Betrachtung. So glaube ich, daß der ausdrücklich als zu abstrakt unterdrückte Beweis des Cantorschen Teilmengensatzes, der die Methode der klassischen Mengenlehre wohl am deutlichsten erkennen läßt, keineswegs schwieriger ist als manche in dem Buch dargestellten Gedankengänge, z. B. als diejenige Definition der endlichen Menge, die nur mit dem Begriff der Äquivalenz operiert. Diese Definition läßt sich übrigens klarer formulieren, als es bei Grelling geschieht, wenn man den Begriff der vollständigen Teilmenge heranzieht, der ja auch beim Beweis des Äquivalenztheorems eine Rolle spielt: Eine Menge M heißt endlich, wenn eine eineindeutige Abbildung eines echten Teils von M auf einen anderen so angegeben werden kann, daß nicht zwei komplementäre, echte Teile von M vollständig sind. Grelling stützt sich nur auf diese Definition, während er die auf der symmetrischen Wohlordnung beruhende bei Seite läßt. Er hat dadurch den Vorteil, das dem Anfänger leicht faßliche Problem der endlichen Menge sehr früh (im vierten Kapitel, die drei ersten Kapitel sind einleitender Natur) behandeln zu können. Das fünfte Kapitel beschäftigt sich mit abzählbaren und nichtabzählbaren Mengen. Daß der Beweis des Äquivalenztheorems unterdrückt wird, ist bei dem Niveau des Buches durchaus berechtigt. Wenn aber dieses Theorem überhaupt formuliert wird, dann gehört es an die Spitze der Theorie der Mächtigkeiten; denn die übliche, auch von Grelling gegebene Definition dafür, daß eine Menge von größerer Mächtigkeit ist als eine andere, erhält einen Sinn erst durch das Äquivalenztheorem. Grelling zitiert es viel später und zwar beim Wohlordnungssatz. — Zu diesem Abschnitt ist noch eine Bemerkung zu machen: Der Verfasser beweist auf dem üblichen Wege die Abzählbarkeit der zwischen 0 und 1 liegenden rationalen Zahlen; bei der Berechnung der Nummer, welche die Zahl $\frac{z}{n}$ erhält, übersieht er, daß in seinem Schema nicht alle Zahlen voneinander verschieden sind (z. B. ist $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$). Seine Berechnung behält den-

noch einen Wert; denn es genügt, für die Nummer, welche die Zahl $\frac{z}{n}$ erhält, eine obere Schranke anzugeben, und die Zahl $\frac{(n-2)(n-1)}{2} + z$ ist gewiß eine solche.

Mit großer Liebe behandelt der Verfasser in den beiden letzten, die Hälfte des ganzen Bändchens einnehmenden Kapiteln die Theorie der geordneten und der wohlgeordneten Mengen und die Ordnungstypen sowie die Antinomien der Mengenlehre. Die einerseits von Zermelo, andererseits von Russell und zuletzt von Brouwer und Weyl eingeschlagenen Methoden zur Behebung dieser Widersprüche werden kurz und treffend beleuchtet.

Feigl.

F. M. Urban, Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Theorie der Beobachtungsfehler. VI u. 274 S. Leipzig und Berlin 1923, B. G. Teubner. Geh. ℳ 6.20; geb. ℳ 8.—.

Das Buch, das in erster Linie für Biologen und Psychologen gedacht ist, läßt sich in zwei Teile, einen philosophisch-historischen und einen mathematischen, zerlegen. Der erste, der mit 150 Seiten mehr als die Hälfte des ganzen Buches einnimmt und eine Fülle von Literatur verwertet, dürfte gerade für den Mathematiker, der von solchen Dingen seltener zu hören bekommt, der interessantere sein. Der Verfasser erörtert hier in drei Abschnitten den Begriff des Zufalls, die Lehren vom Zufall und den Begriff der Wahrscheinlichkeit. Nachdem zunächst die verschiedenen Arten von Ereignissen charakterisiert sind, die der gewöhnliche Sprachgebrauch als zufällig bezeichnet, werden die historischen Versuche vorgeführt, den Begriff des Zufalls scharf zu fassen und so einer wissenschaftlichen Behandlung zugänglich zu machen: die Lehren vom subjektiven und objektiven, teleologischen, absoluten und relativen sowie logischen Zufall, wobei der Verf., sich im wesentlichen an Cournot anschließend, sich für den letzten, der bis auf Aristoteles zurückgeht, entscheidet als den, der in der Wissenschaft im allgemeinen und der Wahrscheinlichkeitsrechnung im besonderen zur Anwendung kommt: An einem Gegenstand, der unter einen Allgemeinbegriff fällt, sind die Eigenschaften zufällig, die nicht in der Definition des Allgemeinbegriffs notwendig mitgegeben sind. An einem der Erfahrung entnommenen Gegenstand sind alle Eigenschaften notwendig, Zufälligkeit kommt nur im Hinblick auf abstrahierende Unterordnung unter einen Allgemeinbegriff zustande. — Hieran schließt sich ein längerer Exkurs über Naturgeschehen und Naturgesetz und die mathematische Erklärung der Naturerscheinungen. — Analog sucht der Verf. den logischen Charakter des Wahrscheinlichkeitsbegriffs gegenüber der empiristischen Auffassung nachzuweisen. Vieles wäre hier noch überzeugender herausgekommen, wenn er noch geradliniger und konsequenter den Unterschied zwischen der reinen Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Anwendung auf die Erfahrungswelt herausgearbeitet hätte. — Treffend sind die Ausführungen über die Möglichkeit verschiedener Wahrscheinlichkeitsansätze bei anscheinend demselben Problem. — Nach Besprechung der wichtigsten klassischen Beispiele der Wahrscheinlichkeitsrechnung wendet sich der Verfasser zur Statistik, wo die Lexissche Dispersionstheorie gewürdigt wird, und zur Kollektivmaßlehre, wo insbesondere Pearson zu Worte kommt.

Der zweite, mathematische Teil bringt die üblichen Grundregeln und Haupttheoreme der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Nicht recht ersichtlich ist hier, warum der Verf. dauernd das schwere Geschütz der Mengenlehre auffährt (eigentlich ist es mehr ein Drohen damit), da es sich bei ihm zunächst prinzipiell um endliche Mengen handelt und die auf unendliche Mengen bezüglichen Wahrscheinlichkeiten durch Grenzübergang von endlichen Mengen her erhalten werden. Hier ist manches mathematisch unbefriedigend, besonders seitdem der Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Mengentheorie durch von Mises in so grundlegender Weise vollzogen ist. — Das Kapitel über die Theorie der Beobachtungsfehler nimmt speziell Rücksicht auf die psychometrischen Funktionen und gibt eine gute Einleitung in dies Gebiet.

Störend für den Mathematiker sind Entgleisungen wie der durch das ganze Buch sich ziehende Gedanke, daß analytische Funktionen durch eine endliche Anzahl von Daten bestimmt seien (z. B. S. 31, 51), die Verwechslung von rationalen mit algebraischen Funktionen (S. 115, 254), von Ordnung mit Wohlordnung (S. 159), die fehlende Präzisierung des gemeinten Begriffs von Meßbarkeit (z. B. S. 163, 164 u. öfter).

Stuttgart, Januar 1925. DOETSCH.

H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen. I. Bd. VII u. 600 S. Berlin 1921, J. Springer.

Über dieses Werk, das noch unbesprochen in dem Nachlaß des früheren Herausgebers des Jahresberichts gefunden wurde, heute noch ausführlich zu berichten, hieße Eulen nach Athen tragen, da es zusammen mit dem Carathéodoryschen Werk, mit dem es sich stofflich und formal nur wenig berührt, bereits zum Allgemeingut der interessierten Fachgenossen und zum unentbehrlichen Nachschlagewerk geworden ist. Es behandelt nach Rekapitulation der für die Theorie der reellen Funktionen wichtigen Theoreme aus der abstrakten und Punktmengenlehre die modernen Stetigkeitsbegriffe und die unstetigen Funktionen, die Funktionenfolgen und dann folgende Funktionsklassen: die Baireschen Funktionen, die absolut-additiven Mengenfunktionen, die Funktionen endlicher Variation und die meßbaren Funktionen. Integration und Differentiation sind u. a. dem 2. Bd. vorbehalten, von dem man nur wünschen kann, daß ihn der Verf. der mathematischen Welt bald schenken möge.

Stuttgart, Januar 1925. DOETSCH.

L. Tonelli, Fondamenti di calcolo delle variazioni. Volume primo VII u. 466 S. (1921). Volume secondo VIII u. 660 S. (1923). Bologna, Nicola Zanichelli.

Die Bedeutung des Tonellischen Werkes kann nicht hoch genug veranschlagt werden. Macht es doch Ernst mit dem schon von Hadamard in seinen Leçons sur le calcul des variations mehr der Absicht als der Durchführung nach unternommenen Versuche, die Variationsrechnung konsequent in die *Funktionalanalysis* einzubauen, d. h. in die Theorie der Funktionen, die selbst wieder von Funktionen abhängen (sog. Linienfunktionen), innerhalb deren die Variationsrechnung als die Lehre vom Maximum und Minimum aufzufassen ist. Tonelli selbst hat bekanntlich die Variationsrechnung in Verfolg dieses Gedankens um wertvolle Erkenntnisse bereichert und hat nun die

Mühe nicht gescheut, einmal die wesentlichen Teile dieser Disziplin wohlfundamentiert und von seinem leitenden Gesichtspunkt beherrscht in vollendeter Präzision in Buchform vorzuführen.

Die Tonellische Variationsrechnung macht Gebrauch von einem bedeutenden Teile der modernen Theorie der reellen Funktionen. Der *erste Band* des Werkes beschäftigt sich ausschließlich mit diesen Dingen und enthält zunächst eine *Einleitung* über reelle Funktionen und die Lebesguesche Maßtheorie, sodann eine Darlegung der Stetigkeitseigenschaften der Linienfunktionen, wie sie in der Variationsrechnung auftreten. Der einleitende Abschnitt, fast die Hälfte des Buches umfassend, bringt die Definition der Grundbegriffe wie Stetigkeit, Länge, beschränkte Variation, Rektifizierbarkeit, absolute Stetigkeit und das fundamentale Lebesguesche Theorem über die fast überall vorhandene Ableitung einer Funktion von beschränkter Variation; dann bei Betrachtung der Mengen von Funktionen bzw. Kurven nach Definition der Umgebung einer Funktion den Begriff der Häufungsfunktion bzw. -kurve. Im Gegensatz zu dem Bolzano-Weierstraßschen Satz über unendliche *Punkt*mengen braucht für unendliche *Kurven*mengen keine Häufungskurve zu existieren. Jedoch werden durch die Theoreme von Ascoli, Arzelà, Hilbert und Tonelli Kurvenmengen abgegrenzt, für die die Existenz einer Häufungskurve gesichert ist. Zu dem Begriff der Konvergenz tritt der von F. Riesz eingeführte Begriff der convergence en mesure, von Tonelli approximative Konvergenz genannt, hinsichtlich dessen ein Satz über die approximative Konvergenz der Ableitungen bewiesen wird. (Hier wie auch sonst hätte sich die Ausdrucksweise durch Verwendung eines dem deutschen Wort „Nullmenge" nachgebildeten Terminus vereinfachen lassen.) Nunmehr wird die Lebesguesche Theorie der meßbaren Mengen und Funktionen in origineller Weise vorgeführt. Tonellis Streben geht nämlich dahin, das Zermelosche Auswahlaxiom, das von Lebesgue für sein Fundamentaltheorem benutzt wird, zu vermeiden, und deshalb gibt er der Maßtheorie eine Einkleidung, die sich, ohne die Definitionen im einzelnen wiederzugeben, etwa so charakterisieren läßt: Zunächst definiert Tonelli, gestützt im wesentlichen auf eine Strukturanalyse der abgeschlossenen Mengen, den Begriff einer Menge, die einem Intervall „äquivalent" ist, und beschränkt sich dann auf diejenigen dieser Mengen, bei denen nach gewöhnlichem Sprachgebrauch der Maßtheorie die Intervallfolgen, die zum inneren und äußeren Maß hinführen, in Form eines Gesetzes in abzählbarer Anzahl aufweisbar sind. Dadurch werden zu komplizierte Mengen, wie sie insbesondere auf Grund des Auswahlaxioms und der Wohlordenbarkeit des Kontinuums konstruiert werden können, ausgeschlossen. Die so definierten „Pseudointervalle" ersetzen die nach Lebesgue meßbaren Mengen, mit denen sie im Falle der Beschränktheit zusammenfallen. (Vielleicht wäre es praktisch und nützlich gewesen, wenn Tonelli seine Theorie noch deutlicher mit der Lebesgueschen konfrontiert hätte.) Den nach Lebesgue meßbaren Funktionen entsprechen bei Tonelli die in einem Intervall oder Pseudointervall definierten „quasi-stetigen" Funktionen, bei deren Definition wiederum das Zermelosche Axiom umgangen wird. Das Lebesguesche Integral dieser quasi-stetigen Funktionen wird für beschränkte Funktionen nach dem Vorgang von W. H. Young in einer Art, die der Definition des Riemannschen Integrals vollkommen analog ist, für unbeschränkte Funktionen in Anlehnung an den Cours d'analyse von De la Vallée-Poussin definiert. Die Gesamtheit der danach abgeleiteten

Hauptsätze über Lebesguesche Integrale ist eine auch für sich genommen wertvolle Darstellung dieser Theorie.

Nach dieser Einleitung, die die analytischen Werkzeuge für die eigentlichen Untersuchungen bereit gelegt hat, folgt als Vorbereitung auf die Variationsrechnung eine Darstellung der *grundlegenden Eigenschaften* der in dieser auftretenden *Integrale, aufgefaßt als Funktionen des* (rektifizierbaren) *Integrationsweges* $\mathfrak{C}$, also als Linienfunktionen, zunächst in Parameterform: $J_{\mathfrak{C}} = \int_{\mathfrak{C}} F\left(x(s), y(s), \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right) ds$, wo s die Bogenlänge von $\mathfrak{C}$ bedeutet, dann in einem genau analogen Abschnitt in gewöhnlicher Form $\int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx$, die Integrale genommen im Lebesgueschen Sinn. Für diese Linienfunktionen wird nun in Analogie zu dem von Baire für die gewöhnlichen Funktionen eingeführten Begriff die „*Halbstetigkeit*" definiert: Während die gewöhnliche Stetigkeit verlangt, daß die Funktionswerte für benachbarte Argumente (das sind hier benachbarte Kurven) zwischen zwei nahen Grenzen schwanken, verlangt die Halbstetigkeit die Begrenzung dieser Schwankung nur nach einer Seite (Halbstetigkeit nach oben oder nach unten). Daß dieser Begriff für die Variationsrechnung von grundlegender Bedeutung ist, sieht man ja schon an den einfachsten Beispielen; so ist das Integral $\int_{\mathfrak{C}} \sqrt{x'^2 + y'^2} ds$, d. h. die Länge von $\mathfrak{C}$, offenbar nach unten halbstetig, nicht aber nach oben; Tonelli stellt eine Reihe von notwendigen Bedingungen auf, die die Funktion F erfüllen muß, wenn $J_{\mathfrak{C}}$ halbstetig auf einer einzelnen Kurve, bzw. in dem ganzen Feld der in Betracht kommenden Kurven halbstetig sein soll, ebenso eine größere Anzahl von hinreichenden Bedingungen, die teils die Funktion F, teils den Kreis der zur Konkurrenz zugelassenen Kurven, teils beides beschränken und im Hinblick auf die spätere Anwendung in der Variationsrechnung ausgewählt sind. Hieran schließen sich eine Reihe von Konvergenzsätzen, die z. B. aus der Konvergenz von $\mathfrak{C}$ gegen $\mathfrak{C}_0$ und von $J_{\mathfrak{C}}$ gegen $J_{\mathfrak{C}_0}$ für einen Kern F auf die Konvergenz für andere Kerne zu schließen gestatten.

Von der Eigenart des *zweiten Bandes*, die hauptsächlich in der Methode beruht, läßt sich ohne Weitschweifigkeit nur ein unvollkommenes Bild geben. Wesentlich für Tonellis Vorgehen, der hier in den Bahnen Hilberts wandelt, ist, daß es ihm auf Grund der im ersten Band entwickelten Theorie gelingt, sogleich die *Existenzfrage* auf feste Füße zu stellen, d. h. im Sinne Hilberts das Dirichletsche Prinzip durch sichere, scharf umgrenzte Existenztheoreme zu ersetzen. Was die Anordnung des Stoffes angeht, so wird zunächst das *absolute* freie, dann das gebundene Extremum behandelt und zum Schluß das *relative* (freie und gebundene) Extremum, wobei jeweils die Parameterform vorangestellt und vollkommen erledigt wird, ehe die gewöhnliche Form an die Reihe kommt. An der Spitze der Behandlung des absoluten freien Extremums stehen zwei *allgemeine Existenzkriterien* für reguläre bzw. reguläre und definite Probleme, die in der Weise gewonnen werden, daß unter den vorausgesetzten Bedingungen auf Grund der Sätze des ersten Bandes die Existenz einer Häufungskurve in einer Minimalfolge sowie die Halbstetigkeit des Integrals gefolgert wird, woraus sich leicht die Existenz der „Extremanten", d. h. einer Kurve, auf der ein Extremum angenommen wird, ergibt. Hierauf basieren nun 12 Existenztheoreme

von hoher Allgemeinheit, von denen das erste eine Verallgemeinerung des Hilbertschen Theorems für reguläre, definite Probleme darstellt und von Tonelli 1913 bewiesen wurde, während die übrigen einer Arbeit Tonellis aus jüngster Zeit (1921) entstammen.

Die Beschäftigung mit den Eigenschaften der Extremanten bringt den *Anschluß an die klassische Theorie*, nämlich die notwendigen Bedingungen von Legendre, Weierstraß und Euler. Die Eulersche Differentialgleichung bietet Gelegenheit zur Einführung der Extremalen, worunter wie üblich nach Kneser die Lösungen mit stetigem Differentialquotienten zu verstehen sind, während die Lösungen, die diese Bedingung nicht erfüllen, Extremaloide genannt werden. Ihre Existenz ergibt sich aus der Existenz der Extremanten, ohne Heranziehung der Theorie der Differentialgleichungen. Es folgt die Einführung des Begriffs der ersten Variation, die Weierstraßsche Ausdehnung der Eulerschen Bedingung auf den Rand und der Knesersche Transversalensatz; sodann die Weierstraßschen Sätze über Existenz und Eindeutigkeit des Extremums „im Kleinen" bei regulären Problemen, die stetige und differenzierbare Abhängigkeit der Extremalen von den Anfangsbedingungen und einem Parameter in F; Bedingungen, unter denen die Sätze auch im Großen bestehen, die Carathéodoryschen Sätze über die sog. diskontinuierlichen Lösungen, d. h. Extremaloide, die stückweise aus Extremalen bestehen; ferner ein Satz nach Darboux über die Extremanteneigenschaft der Extremantenbogen und der Osgoodsche Satz (in verallgemeinerter Form) über den Abstand des Wertes von $J_{\mathfrak{C}}$ vom Extremum auf Kurven, die sich einmal von der Extremanten hinreichend weit entfernen. Dann wird der Begriff des zu einem Extremalenpunkte konjugierten Punktes eingeführt und die Jacobische Bedingung für feste Endpunkte (ohne Benutzung der zweiten Variation nach Hadamard) sowie die Verallgemeinerungen von Kneser und Bliss für einen bzw. zwei freie Endpunkte abgeleitet, weiter die entsprechenden Bedingungen von Poincaré und Carathéodory für geschlossene bzw. diskontinuierliche Lösungen. Die Jacobische Bedingung wird dann nochmals vermittels der zweiten Variation behandelt. — Nachdem die ganze Theorie noch einmal für den Fall des Integrals in gewöhnlicher Form durchgegangen worden ist, wird eine Reihe von klassischen Problemen als Beispiele behandelt.

Nunmehr folgen die sog. *isoperimetrischen Probleme* als Beispiel für die gebundenen Extrema, wo also die Extremanten noch die Bedingung erfüllen müssen, einem Integral $K_{\mathfrak{C}} = \int_{\mathfrak{C}} G(x, y, x', y')\,ds$ einen bestimmten Wert zu erteilen. (Extrema, bei denen die Nebenbedingungen durch gewöhnliche oder Differentialgleichungen ausgedrückt sind, werden nicht behandelt.) Auch hier erlauben es die Methoden des ersten Bandes, vorab fünf Theoreme für die Existenz eines Extremums sicherzustellen, worauf wieder der Anschluß an die klassische Theorie erfolgt (Eulersche isoperimetrische Regel, Legendresche und Weierstraßsche Bedingung, Knesersches Analogon zur Jacobischen Bedingung, Tonellisches Analogon zum Osgoodschen Satz, Reziprozitätsgesetz). Nach Behandlung einiger klassischer Beispiele erscheint die Theorie noch einmal für den Fall des Integrals in gewöhnlicher Form.

Der letzte Teil bringt das relative Extremum *auf Grund der Theorie des absoluten*, wobei naturgemäß der Begriff des starken und schwachen Extremums auftritt. Es werden erst notwendige, dann hinreichende Bedingungen

für ein schwaches, hierauf für ein starkes Extremum aufgestellt, und zwar jeweils für feste, bewegliche und teils feste, teils bewegliche Endpunkte. Das Problem der festen Endpunkte wird dann nochmals mit dem Weierstraß-Schwarzschen Begriff des Feldes von Extremalen behandelt. Nach Ausdehnung der Ergebnisse auf diskontinuierliche Lösungen nach Carathéodory und auf den Rand des Gebietes nach Bliss wird das relative *bedingte* Extremum behandelt in analogem Aufbau wie früher das absolute.

Mehr noch, als man aus dieser knappen Inhaltsangabe ersieht, ist mit dem Tonellischen Werk ein systematischer (fast pedantischer) Aufbau der Variationsrechnung in peinlich exakter Form erreicht. Mag es vielleicht gerade aus diesem Grunde nicht als Lehrbuch geeignet sein, eine Eigenschaft, die sich auch darin ausdrückt, daß jedes Werten und Gegeneinanderabwägen der Ergebnisse vermieden ist, so stellt es jedenfalls für die wissenschaftliche Literatur ein hochbedeutsames und grundlegendes Werk dar, und man sieht mit Spannung dem von Tonelli versprochenen Buche entgegen, das Anwendungen in den verschiedensten Gebieten behandeln soll.

Stuttgart, Januar 1925. DOETSCH.

C. Burali-Forti und **T. Boggio, Espaces courbes, Critique de la Relativité.** XXIV u. 250 S. Turin 1924, Sten Editrice.

Das Buch besteht aus zwei Teilen, sein Titel bezieht sich auf den zweiten Teil. Im ersten werden Vektoren und „allgemeine Homographien" (=Tensoren) behandelt, wobei die Kenntnis des Werkes „Analyse vectorielle générale" von C. Burali-Forti und R. Marcolongo vorausgesetzt wird.

Was zunächst den letzten Abschnitt des zweiten Teiles anbelangt, der mit „Critique de la relativité" überschrieben ist, genügt die Bemerkung, daß die Verfasser den Standpunkt der klassischen Mechanik und Physik nicht verlassen *wollen* und demgemäß fast alles, was die (spezielle und allgemeine) Relativitätstheorie bisher errungen haben, als absurd beschauen.

Der erste Teil ist eine schlechte Übersetzung der modernen Tensoralgebra und -Analysis in das Abracadabra der extremsten Vektorathletik. Dabei wird fast auf jeder Seite betont, daß die Methode „absolut" ist, d. h. unabhängig von jedem Bezugssystem. Wieweit bei den Verfassern die Einschätzung ihrer eigenen Methode geht, möge ein Satz von S. 213 illustrieren: „Wir haben so *alle* Elemente des gewöhnlichen absoluten Differentialkalküls" eliminiert, d. h.: die Koordinaten; die Tensoren mit unteren und oberen Indices und das Hinauf- bzw, das Herunterziehen dieser Indices; die Multiplikation und die Komposition der Tensoren; die Christoffelschen Symbole und den Riemannschen Krümmungstensor..."

So steht z. B. an Stelle von

$$\begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix} \text{ das Zeichen } \boldsymbol{c} \prec \alpha \lambda_2 \boldsymbol{ab}$$

(wo die fettgedruckten Buchstaben Vektoren bedeuten); an Stelle des Krümmungstensors R_{iklm} steht $\boldsymbol{b} \prec (k^* - 1)\,\alpha\lambda_3 \boldsymbol{cda}$ und statt R_{ik} wird $\boldsymbol{a} \prec \mathrm{v}\,K(1 - k^*)\,\lambda_3 \boldsymbol{b}$ geschrieben!

Diese Proben mögen genügen. Das Buch besitzt jedenfalls Wert für einen Sammler mathematischer Raritäten.

Blaricum, 21. Oktober 1924. R. WEITZENBÖCK.

R. Courant und **D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik.** 450 S. (Erschienen in der Sammlung: „Die Grundlehren der Math. Wissenschaften in Einzeldarstellungen." Bd. XII.) Berlin 1924, Julius Springer.

Die Schüler des Pythagoras pflegten ihre Werke mit dem Namen des großen Meisters zu schmücken. So ist über dem von Courant geschriebenen Buch Hilberts Name zu lesen. Doch nicht zu Unrecht; ist es doch so ganz aus der Hilbertschen Schule erwachsen. Die Integralgleichungen und die zum Beweis des Dirichletschen Prinzips von Hilbert neu in die Variationsrechnung hineingetragenen Gedanken sind die wesentlichen Hilfsmittel, mit denen Courant die Schwingungs- und Eigenwertprobleme in Angriff nimmt. Von Hilberts Abhandlungen und Vorlesungen ist dabei in weitem Umfang Gebrauch gemacht.

Ein Kapitel über „lineare Transformationen und quadratische Formen" bildet den Auftakt. Hier werden in Kürze alle diejenigen Tatsachen zusammengestellt, die beim Grenzübergang zu unendlich vielen Veränderlichen auf Integralgleichungen führen. Hauptachsentransformation und Maximum-Minimum-Eigenschaften der Eigenwerte stehen dabei im Mittelpunkt.

Im nächsten Kapitel „Probleme der Reihenentwicklung willkürlicher Funktionen" wird der für das Folgende fundamentale Begriff des orthogonalen Funktionensystems behandelt. Die wichtigsten Sätze über Fouriersche Reihen und das Fouriersche Integral finden hier Platz. Schließlich werden noch die bekannten orthogonalen Polynomsysteme untersucht.

Das dritte Kapitel wendet sich den linearen Integralgleichungen zu. Die Zurückführung auf Gleichungssysteme mit endlich vielen Variablen geschieht, im Anschluß an frühere Arbeiten Courants, durch Approximation des Kerns $K(s,t)$ durch eine Summe der Gestalt

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(s)\,\beta_i(t).$$

Der Grenzübergang wird mit Hilfe des bekannten Häufungssatzes für Funktionen vollzogen. Es erübrigt sich, hinzuzufügen, daß auch die Fredholmschen, Neumannschen und Schmidtschen Ansätze den gebührenden Platz gefunden haben.

Im folgenden „Grundtatsachen der Variationsrechnung" überschriebenen Kapitel sind das Beachtenswerteste vielleicht die Bemerkungen über die direkten Methoden, d. h. die Auffindung der Lösung eines Variationsproblems als Grenzkurve einer solchen Schar, für welche das Integral gegen die untere (obere) Grenze geht. Dafür werden einige lehrreiche Beispiele gegeben. Der Verfasser verspricht, im nächsten Band eine allgemeine Theorie zu entwickeln. Der klassische Ansatz der Variationsrechnung wird nur bis zur Eulerschen Differentialgleichung als notwendiger Bedingung für ein Extremum geführt. Neu ist der Begriff der natürlichen Randbedingungen. Darunter werden solche Randbedingungen verstanden, die sich, wenn man von Variationsproblemen ohne Nebenbedingungen ausgeht, ganz von selbst für das Bestehen eines Extremums als notwendig einstellen. Die üblichen Randbedingungen können aus ihnen durch Grenzübergang gewonnen werden. Mit der Formulierung des Hamiltonschen Prinzips und einigen Anwendungen schließt der Abschnitt.

Nach den vier ersten der mathematischen Theorie gewidmeten Kapiteln

folgen die Anwendungen auf „Schwingungs- und Eigenwertprobleme der Physik". Systeme von endlich vielen Freiheitsgraden werden mit Hilfe der Theorie der quadratischen Formen behandelt. Für die Schwingungsprobleme mit unendlich vielen Freiheitsgraden (Saite, Membran und Verwandtes) werden die Differentialgleichungen aufgestellt und untersucht. Das Eigenwertproblem wird durch Vermittlung der Greenschen Funktion mit Integralgleichungen in Angriff genommen. Der Nachweis für die Existenz einer Greenschen Funktion ist nur für spezielle Fälle durchgeführt; allgemein bleibt er für den zweiten Band vorbehalten.

Der „Anwendung der Variationsrechnung auf die Eigenwertprobleme" ist ein besonderes Kapitel gewidmet, das im wesentlichen den Inhalt früherer Arbeiten Courants wiedergibt. Die Eigenwerte sind hier als die Maxima-Minima desjenigen Variationsproblems mit gewissen Nebenbedingungen definiert, welche die zu behandelnde Differentialgleichung als Eulersche Gleichung hat. Der Nachweis für die Existenz eines Extremums ist wieder für den zweiten Band aufgespart. Die Maximum-Minimum-Eigenschaft erweist sich für das Studium des asymptotischen Verhaltens sowie von Stetigkeitseigenschaften der Eigenwerte als äußerst nutzbringend. Nicht weniger als 21 Sätze ergeben sich aus ihr ganz natürlich.

Das letzte Kapitel endlich erstreckt sich auf „Spezielle durch Eigenwertprobleme definierte Funktionen". Hier werden die Besselschen Funktionen für komplexe Werte des Arguments und Parameters betrachtet. Ausgehend von der Laplaceschen Transformation erhält man die Integraldarstellung und die Reihenentwicklung. In ähnlicher Weise wird mit den Kugelfunktionen verfahren. Die asymptotische Entwicklung nach der Laplaceschen und Sattelpunktsmethode beschließt den ersten Band.

Zu bemerken ist noch, daß jedem Kapitel ein Paragraph mit Ergänzungen hinzugefügt ist, in dem mit dem Vorangehenden im Zusammenhang stehende Ergebnisse angeführt werden, die späterhin zwar keine unmittelbare Verwendung finden, aber das Gesamtbild vervollständigen. Der Leser wird hier bis an die Grenzen des heutigen Wissens geführt.

Die Darstellung ist an manchen Stellen etwas knapp gehalten — oft sind die Beweise gänzlich unterdrückt —, wodurch jedoch der Überblick über den Stoff erleichtert wird.

Es bestand seit langem das Bedürfnis nach einer methodisch geordneten Zusammenfassung derjenigen Probleme der mathematischen Physik, die sich mit den modernen Hilfsmitteln, wie sie insbesondere durch die Hilbertsche Schule in den Vordergrund gerückt sind, erfassen lassen: diesem Bedürfnis wird das vorliegende Buch in vollem Maße gerecht. HAMMERSTEIN.

Hans Lorenz, Lehrbuch der technischen Physik. Erster Band: Technische Mechanik starrer Gebilde; erster Teil: Mechanik ebener Gebilde. VIII u. 390 S. Mit 295 Textabbildungen. Zweite Auflage. Berlin 1924, Julius Springer.

Gegenüber der ersten Auflage, die 1902 bei Oldenbourg in München erschien und vom Unterzeichneten im 51. Bande der Zeitschrift für Mathematik und Physik besprochen wurde, stellt diese zweite Auflage eine vollständige Umarbeitung dar, die aber den Charakter des Buches im wesentlichen ungeändert gelassen hat. Es ist ein in erster Linie für Ingenieure geschriebenes

Lehrbuch, dessen außerordentliche Reichhaltigkeit noch erheblich zugenommen hat. Für den Mathematiker kommt es deshalb hauptsächlich als Materialsammlung in Betracht. Schon der reiche Inhalt bedingte eine Zweiteilung, für die der Verfasser auch den pädagogischen Gesichtspunkt ins Treffen führt, erst die ebenen Gebilde ohne Benutzung der Vektorrechnung darzustellen.

Der Aufbau des vorliegenden ersten Teiles ist im wesentlichen auch der alte geblieben. Er gliedert sich in vier „Bücher": 1. Kinematik, 2. Dynamik des Massenpunktes, 3. Statik, 4. Dynamik.

Diesem Aufbau entsprechend stützt sich das Buch auf den kinetischen Kraftbegriff. Leider läßt hier die Darstellung an Schärfe zu wünschen übrig, es will dem Referenten sogar scheinen, als sei die alte Darstellung an dieser Stelle klarer gewesen. Diesesmal verfällt der Verfasser in den bekannten Fehler, aus der kinetischen Definition der Kraft auf die Selbstverständlichkeit des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte zu schließen.

Da die Dynamik der Statik folgt, bietet sich als natürliches Mittel zum Übergang das d'Alembertsche Prinzip dar. Aber auch hier ist die Darstellung nicht ganz befriedigend. Da es sich in dem ganzen Buche um starre Körper handelt, will ich es nicht zu sehr bemängeln, daß der Verfasser das Prinzip nur für den einzelnen starren Körper ausspricht. Schwerer wiegt, daß die Begründung das Prinzip als eine Selbstverständlichkeit erscheinen läßt, die es bekanntlich nicht ist.

Was Einzelheiten anbetrifft, so möchte ich noch von einer Theorie der steifen Seile sprechen, die in der zweiten Auflage neu ist und in allen wesentlichen Punkten mit der Theorie übereinstimmt, die der Referent in seinem Lehrbuch 1912 entwickelt hat, die aber offenbar dem Verfasser unbekannt geblieben ist. In einem wesentlichen Punkte besteht allerdings ein Unterschied: der Verfasser behandelt nur den Fall, daß sich das Seil beständig im Zustande der Verbiegung befindet — ohne es hervorzuheben —, eine Annahme, die nicht immer zulässig ist, besteht doch z. B. der Satz, daß ein steifes, aber kräftefreies Seil sich nur an einzelnen Stellen im Zustande der Verbiegung befinden kann.

So gewinnt man im ganzen den Eindruck eines zwar nicht ganz einwandfreien, aber doch außerordentlich reichhaltigen, gutgeschriebenen und ausgezeichnet ausgestatteten Lehrbuches, das gewiß zahlreichen Beifall finden wird.

Berlin, im Januar 1925. HAMEL.

Niels Erik Nörlund, Vorlesungen über Differenzenrechnung. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Bd. 13.) IX u. 551 S. Berlin 1924.

Ein außerordentlich reichhaltiges Werk, in dem die neueren Forschungsergebnisse im Gebiet der Differenzenrechnung und vor allem der linearen Differenzengleichungen systematisch zusammengefaßt sind. Freilich ist es kein Lehrbuch im gewöhnlichen Sinne, das Nörlund hier dem mathematischen Publikum vorlegt, vielmehr ist es ein Mittelding zwischen einem Enzyklopädieartikel und einem Lehrbuch. Die Fülle des Stoffes und die sorgfältigen Literaturangaben machen es zu einem für den Forscher auf diesem Gebiet unentbehrlichen Nachschlagewerk; das Literaturverzeichnis allein umfaßt 68 S.! Aber dafür mußte sich der Verf. in anderer Richtung weitgehende Beschränkungen auferlegen, die der Leser oft unangenehm empfinden wird. Daß die

mehr formal-algebraischen Theorien, die in dem Buch von Guldberg-Wallenberg im Vordergrund stehen, beiseite gelassen sind, wird zwar eher als Vorzug wie als Nachteil empfunden werden. Schmerzliche Lücken aber findet man oft in den Beweisen, Lücken, die der Verf. bewußt und absichtlich lassen mußte, um Raum zu sparen. Denn nur selten ist ein Beweis vollständig durchgeführt; meistens werden nur Skizzen gegeben und die leitenden Gesichtspunkte zur Geltung gebracht, oft wird auch bloß über Resultate referiert ohne die geringste Andeutung eines Beweises. Der Leser, der in die Materie eindringen will und glaubt, daß ihn das Buch der Benutzung der Originalliteratur entheben würde, wird daher vielfach enttäuscht sein; er muß sehr oft auf die Literatur zurückgreifen und hat dabei allerdings den Vorteil, daß er sie nicht erst mühsam zusammensuchen muß. Auch sonst werden in bezug auf Vorkenntnisse und auf analytisches Geschick im selbständigen Durchführen von Zwischenrechnungen ziemlich hohe Anforderungen an den Leser gestellt. Beispielsweise auf S. 71/72 heißt es ohne Zitat: „Nach einem bekannten Phragmén-Lindelöfschen Satze vermag man ...." Aber dieser bekannte Satz ist bis heute nicht in die Lehrbücher der Funktionentheorie übergegangen und wird selbst in Abhandlungen meistens nur mit Ortsangabe angeführt. S. 111 heißt es: „Aus der Stirlingschen Reihe lassen sich ferner ... herleiten." Aber nicht viele werden das selbst machen können, wiewohl der fortgeschrittene Leser sich allerdings erinnern wird, den betreffenden Formeln schon in anderen Büchern begegnet zu sein.

Auf den Inhalt im einzelnen kann bei der außerordentlichen Fülle nur ganz kurz eingegangen werden. Die zwei ersten Kapitel sind als Vorbereitung für die Differenzengleichungen der eigentlichen Differenzenrechnung gewidmet. Man findet hier z. B. Interpolationsformeln mit Restglied sowie eine ausführliche Theorie der Bernoullischen Zahlen und Polynome. Die zwei nächsten Kapitel sind den beiden grundlegenden Differenzengleichungen:

$$\frac{F(x+w)-F(x)}{w}=\varphi(x) \quad \text{und} \quad \frac{F(x+w)+F(x)}{2}=\varphi(x)$$

gewidmet, wobei die Variable x als komplex betrachtet wird und stets die analytischen Eigenschaften der Lösungen im Vordergrund stehen. Die „Hauptlösungen" dieser beiden Gleichungen heißen die Summe und die Wechselsumme von $\varphi(x)$; sie werden zunächst formal durch summierbare Reihen definiert und lassen sich hinterher auch durch analytische Eigenschaften eindeutig charakterisieren. Speziell die Summe ist das Analogon zum Integral.

Sehr bemerkenswert ist dann im fünften Kapitel die Theorie der Gammafunktion, die von den üblichen Darstellungen erheblich abweicht und einzig aus der Differenzengleichung:

$$\log \Gamma(x+1)-\log \Gamma(x)=\log x$$

unter konsequenter Anwendung der vorausgehenden Theorie entwickelt wird.

Die nächsten Kapitel beschäftigen sich mit den höheren Bernoullischen Polynomen und mehrfachen Summen, die den mehrfachen Integralen analog sind. Als wichtiges Hilfsmittel zur Behandlung linearer Differenzengleichungen höherer Ordnung wird ferner im neunten Kapitel die Theorie der Fakultätenreihen begründet. Das zehnte Kapitel bringt „allgemeines über homogene lineare Differenzengleichungen". Hier findet man z. B. den Hölderschen Satz,

daß die Gammafunktion keiner algebraischen Differentialgleichung genügt, sodann den Poincaréschen Satz, und eine besonders sorgältige Zusammenstellung aller Phänomene, zu deren Untersuchung dieser Satz angeregt hat. In den folgenden Kapiteln werden die analytischen Lösungen der homogenen linearen Differenzengleichungen untersucht, und zwar sowohl mit Hilfe der Laplaceschen Transformation als auch mit Hilfe von Fakultätenreihen. Speziell für Gleichungen zweiter Ordnung wird im letzten Kapitel auch noch eine Lösung mit Hilfe von Kettenbrüchen entwickelt. Die nicht homogenen Gleichungen werden durch „Variation der Konstanten" auf „Summationen", das im dritten und vierten Kapitel behandelte Analogon zu Quadraturen, zurückgeführt. Auch den Systemen linearer Differenzengleichungen und ihren symbolischen Matrixlösungen ist ein Kapitel gewidmet.

Das Werk enthält 54 sorgfältig gezeichnete Textfiguren, darunter eine in Dreifarbendruck, um die Deformationen der bei der Laplaceschen Transformation auftretenden Integrationswege zu illustrieren. Sehr begrüßen wird man auch die am Schluß des Buches befindlichen Tafeln häufig vorkommender Zahlen und Polynome. Oskar Perron.

Richard Baldus, Formalismus und Intuitionismus in der Mathematik. Aus: Wissen und Wirken. 11. Band 45 S. Karlsruhe 1924, G. Braun.

Die Schrift gibt den wesentlichen Inhalt einer Rektoratsrede wieder, die der Verfasser 1923 an der Technischen Hochschule Karlsruhe gehalten hat, und behandelt die, nicht nur für die Mathematik, sondern für das gesamte menschliche Denken so außerordentlich wichtige Frage: *„Ob die jetzige Mathematik logisch zwingend ist?"*

Der „Formalist" wird von Baldus folgendermaßen beschrieben: „Er ist Axiomatiker (nach der Art von Hilbert und Zermelo), hält zur Vollendung des Beweises der Widerspruchlosigkeit der Geometrie den Beweis der Widerspruchslosigkeit der Arithmetik der ganzen Zahlen für nötig, glaubt an die Lösbarkeit jedes mathematischen Problems, benützt ununterbrochen den Satz vom ausgeschlossenen Dritten und läßt reine Existenzialaussagen gelten" (das letztere heißt: er läßt gewisse Existenzbeweise gelten, wobei die „Existenz" eines mathematischen Objekts „bewiesen" wird, ohne daß der Weg, der in einer *endlichen* Zahl von Schritten dahinführt, angegeben würde).

„Für den *Intuitionisten* (z. B. Kronecker, Poincaré, L. E. J. Brouwer) stehen unter Ausschluß jedes Zweifels und Widerspruchs die einfachsten Gesetze der ganzen Zahlen fest, die nicht mehr beweisbar sind, durch Intuition erfaßt werden. Darüber hinaus existiert für ihn nicht, wie für den Formalisten, alles das, was widerspruchslos ist, sondern nur das, was mit endlich vielen Worten ausdrückbar, mit endlich vielen Schlüssen beweisbar, *was wirklich gedanklich konstruierbar ist.* ‚Es ist' bedeutet für ihn soviel wie: ‚es ist mit einer angebbaren Zahl von Schritten feststellbar.' Der Intuitionist hält es *nicht* für ausgeschlossen, daß es mathematische Probleme gibt, die prinzipiell (mit endlich vielen Schlüssen) nicht lösbar sind. Beim Satze vom ausgeschlossenen Dritten erblickt er stets neben dem Januskopfe des ‚entweder-oder' das Medusenhaupt der Unentscheidbarkeit."

Auf dies Medusenhaupt (wie Baldus es nennt) hat L. E. J. Brouwer hingewiesen. Nach seiner Ansicht darf das Prinzip vom ausgeschlossenen

Dritten nicht ausnahmslos angewendet werden. Wenn er Recht behält, so stürzt ein großer Teil der Mathematik, z. B. *der größte Teil der Theorie der reellen Funktionen*, zusammen. Baldus spricht „von den geradezu verheerenden Wirkungen, mit denen der Intuitionismus den derzeitigen Bestand der Mathematik bedroht".

In seinem Schlußwort charakterisiert Baldus die Leistung des Intuitionismus mit dem Wort: daß durch ihn „aus dem großen Reiche des Widerspruchslosen die Provinzen des für jeden Mathematiker *logisch Zwingenden* herausgeschnitten" würden. Nach Ansicht von Baldus bestände Brouwers Leistung darin, gezeigt zu haben, daß die verschiedenen mathematischen Schlußweisen „nicht in der gleichen Weise logisch zwingend" sind; daß insbesondere das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten weniger logisch zwingend wäre als der Satz der Identität oder der Satz des Widerspruches. Nach Baldus wäre die eingangs gestellte Frage: „ob die jetzige Mathematik logisch zwingend ist", nach Ausschaltung der minderzwingenden Schlußweisen, mit Ja zu beantworten.

Ich glaube, daß Baldus die philosophische Tragweite von Brouwers Argumentation unterschätzt. Auch H. Weyl, der Erste unter den Vorkämpfern für Brouwer, hat doch, als Anhänger der Philosophie von Husserl, ihren philosophischen Sinn verkannt. Die „verheerenden Wirkungen", von denen sie sprechen, betreffen mehr die Oberfläche der Mathematik. Jener „treffliche Minierer" hat aber das mathematische Erdreich viel tiefer aufgewühlt: Brouwer hat auf eine Reihe mathematischer Beispiele hingewiesen, wo man weder den Satz „*a* ist *b*", noch den Satz „*a* ist non *b*" beweisen kann und wo auch kein Weg, der in einer endlichen Zahl von Schritten zu einer Entscheidung führt, zu sehen ist. In solchen Fällen hält Brouwer die Anwendung des Prinzips des ausgeschlossenen Dritten für unerlaubt. *Nach Brouwer darf also auch ein logischer Satz nur dann angewendet werden, falls er verifizierbar ist; und es ist nur insoweit wahr, als er verifiziert ist.* Auf die Frage, ob die Mathematik logisch zwingend ist, würde Brouwer wahrscheinlich antworten, daß die Logik für ihn überhaupt nicht absolut zwingend ist.

Die Philosophie der Mathematik aber, in die sich Brouwers Ideen gleichsam von selbst einfügen, ist im Jahre 1871 von Josef Popper-Lynkeus in seinem *noch unveröffentlichten* Werke: *„Über die Grundbegriffe der Philosophie und die Gewißheit unserer Erkenntnis"*, das demnächst aus dem literarischen Nachlaß herausgegeben werden soll, entwickelt worden. In dem Kapitel: „Über die Art der Gewißheit in den mathematischen Wissenschaften" legt Popper dar: *„daß jeder mathematische Satz als ein Induktionsgesetz anzusehen ist, d. h. als ein Gesetz, wie jedes andere der Naturwissenschaft"*. Außerhalb der Mathematik hat Popper in der Novelle *„Unsterblich"*, in den *„Phantasien eines Realisten"*, gegen die absolute Gültigkeit der Logik und speziell des *Prinzips des ausgeschlossenen Dritten* einen Einwand erhoben, den er Epikur in den Mund legt.

Wien, Februar 1925. Heinrich Löwy.

Hans Driesch, Relativitätstheorie und Philosophie. Aus: Wissen und Wirken. 14. Band 52 S. Karlsruhe 1924.

Driesch wirft in seiner Schrift die Frage auf, ob die Relativitätstheorie „logisch und phänomenologisch, d. h. ‚wesensmäßig' im Rahmen der Natur-

wissenschaft zulässig" ist. Bezüglich der *allgemeinen* Relativitätstheorie „läuft die logische Kritik hinaus auf eine Kritik der sog. Metageometrie, insofern als diese den Anspruch erhebt, auf den *Natur-Raum* übertragbar zu sein". Seine Argumentation lautet in seinen eigenen Worten:

„Was dreidimensionaler Raum ist, weiß ich durch reines Schauen von der ‚anschaulichen' Art. Mit dem Wissen um das, was Raum ist, also mit dem Wissen um das *Wesen* des Raums, weiß ich zugleich um die Gültigkeit, und zwar die absolute ‚unverbesserbare' Gültigkeit der euklidischen Axiome. Der *rein wesenhaft geschaute* Raum und der Raum der empirischen Wirklichkeit, insofern sie Natur (nicht Innenleben) ist, oder kurz der Natur-Raum sind aber *dasselbe* Ding! Daher *gilt auch für den Naturraum die euklidische Geometrie mit absoluter Wesensevidenz,* und die Frage, ‚ob' wohl die euklidischen Axiome für den Raum der Physik gelten möchten oder nicht, *ist von vornherein eine Frage ohne jeden Sinn.* Die Frage war übrigens schon (vor Einstein) von dem Mathematiker Gauß aufgeworfen worden, und er hatte versucht, sie durch Messung zu entscheiden, d. h. zu entscheiden, ob die Winkelsumme eines von 3 weit voneinander entfernten Orten gebildeten Naturdreiecks gleich 2 Rechten sei. Er fand 2 Rechte. Er sah nicht, daß auch, wenn seine Messung anders ausgefallen wäre, irgendwelche störenden Umstände im euklidischen Raum zur Erklärung hätten herangezogen werden müssen!"

Es versteht sich von selbst, daß Driesch seine Ansicht nicht etwa bescheiden neben die von Gauß und Einstein stellt, denn er spricht ja vom Standpunkt *„einer aprioristischen, d. h. nicht von der Empirie abhängigen und andererseits apodiktischen, absolut sicheren Lehre recht neuen Datums".* Daß der Natur-Raum euklidisch ist, „das ist eine der ganz wenigen Sachen, die wir *ganz sicher und endgültig wissen*". Gewiß, auch Gauß und Einstein haben darüber nachgedacht, aber ihr Nachdenken ist von geringerer Qualität, *kein* „Schauen". Gauß hätte sich viel Mühe ersparen können, wenn er das Talent des „Schauens" besessen hätte. Im Jahre 1824 (etwa 30 Jahre vor seinem Tod) schrieb er an Taurinus, daß er sich seit mehr als 30 Jahren mit diesem Problem beschäftige. An Bessel schrieb er über seine (von Driesch erwähnten) Versuche bei der Hannoverschen Triangulation: „Die Fatigen im heißen Sommer sind oft äußerst angreifend für mich gewesen, zuweilen so, daß ich glaubte, ich würde ihnen erliegen". 1826 klagt er über die „sehr beschwerliche Arbeit" der Netzausgleichung: „Es hat vielleicht noch niemals jemand eine so komplizierte Elimination ausgeführt, wo 55 Gleichungen ebenso viele unbekannte Größen involvierten". — Da ist die Wesensschauerei eine viel bequemere Wissenschaft: Ohne etwas zu tun, besitzt man diktatorische Gewalt über alle Andersdenkenden. Nach Driesch ist nämlich das Schauen *„keine Tätigkeit, sondern ein schlichtes Haben".*

Wie Gauß über diese und alle verwandten, philosophischen Wesenslehren geurteilt haben würde, dürfen wir nach dem folgenden Passus vermuten, den ich dem erwähnten Brief an Taurinus entnehme:

„Aber mir deucht, wir wissen, trotz der nichtssagenden Wort-Weisheit der Metaphysiker eigentlich zu wenig oder gar nichts über das wahre Wesen des Raums, als daß wir etwas uns unnatürlich Vorkommendes mit *Absolut Unmöglich* verwechseln dürfen."

Wien, Februar 1925. Heinrich Löwy.

Karl Boehm, Begriffsbildung. Aus: Wissen und Wirken. 2. Band 45 S. Karlsruhe 1922.

Der Verfasser hat seine Schrift David Hilbert gewidmet und stellt sich darin die Aufgabe, die mathematische Axiomatik „für einen Leser, welcher philosophische, aber nicht eigentlich mathematische Interessen hat, in großen Zügen zu kennzeichnen". Er beginnt mit der Unterscheidung des gewöhnlichen Existenzbegriffes „unter dem Gesichtspunkt der Wirklichkeit" und dem mathematischen Existenzbegriff „unter dem Gesichtspunkt der Widerspruchslosigkeit". In der („formalistischen") Mathematik existiert ein Gegenstand, „sobald nicht, offen oder verdeckt, zwei kontradiktorische Aussagen über ihn gemacht worden sind". „Die empirische Wissenschaft beruhigt sich leicht über die Existenz ihrer Objekte; die Nichtexistenz von erdachten Gegenständen kann sie selten beweisen, während für die reine Begriffslehre die Dinge gerade umgekehrt liegen." Hier, in der formalistischen Mathematik, „ist es ungeheuer schwer, *ja vielleicht unmöglich*, die Abwesenheit jedes Widerspruches in einem Begriffe darzutun, mit anderen Worten: die Existenz eines Begriffes sicherzustellen".

„Wie werden uns die Begriffe, welche dem Denken den ersten Stoff geben, übermittelt? Gewiß nicht durch schulgemäße Definition, sondern durch Aufzeigen und Benennen. Man definiert nicht, was ‚rot' was ‚blau' ist, sondern deutet auf rote und blaue Gegenstände und gibt die entsprechenden Laute von sich. Welchen sinnlichen Eindruck das, was mir rot erscheint, bei einem andern hervorruft, bleibt mir gänzlich verschlossen. Worauf es allein ankommt, ist nur, daß der andere zwei Eindrücke voneinander zu unterscheiden vermag, die auch in meinem Empfinden verschieden sind. — Demgemäß setzt die Axiomatik bei dem, welchen sie in irgendein Gebiet einführen will, nur voraus, daß er, auf ein Zeichen hin, einen Bewußtseinsinhalt — ein Gedankending — zu bilden und von anderen Bewußtseinsinhalten dauernd zu unterscheiden vermag. Diese Gedankendinge nennen wir ‚Grundbegriffe'. Welche Vorstellungen sich mit den Grundbegriffen verbinden mögen, ist dabei gleichgültig, wenn sie nur den Axiomen genügen. So könnten z. B. zwei Menschen sich über projektive Geometrie der Ebene unterhalten, wobei der eine mit den Begriffen ‚Punkt' und ‚Gerade' die üblichen Vorstellungen verbände, während der andere sich unter einem Punkt eine Gerade, unter einer Geraden einen Punkt vorstellte, ohne je in Widerstreit zu geraten, ja ohne sich ihrer verschiedenen Vorstellungen überhaupt bewußt zu werden". Der Verfasser erläutert hierauf an einfachen Beispielen, „wie der Begriff allmählich — durch die Axiome — mit Inhalt erfüllt wird". Ebenso wird durch ein einfaches Beispiel die Einwendung entkräftet, daß die Mathematik „nur aus dem Begriffe herauszieht, was bereits in ihm liegt, uns also nichts Neues lehrt".

Wien, Februar 1925. Heinrich Löwy.

René Descartes, Geometrie. Deutsch herausgegeben von Ludwig Schlesinger. Zweite, durchgesehene Auflage. 8^0. X u. 122 S., mit 25 Textfiguren. Leipzig 1923. Mayer & Müller, G. m. b. H.

Es sind jetzt 30 Jahre seit dem Erscheinen dieser deutschen Übersetzung des klassischen Werkes in erster Auflage vergangen. Damals schrieb Moritz Cantor das Referat darüber für den XL. Band der Zeitschrift für Mathematik und Physik (S. 57/58). Wir erfahren die in der Vorrede nieder-

gelegte Tatsache, daß die Übersetzung in Übungen zur analytischen Geometrie erwachsen ist, welche L. Schlesinger im Jahre 1893 an der Berliner Universität abgehalten hat. Der Übersetzung zugrunde liegt die französische Ausgabe der Geometrie des großen Philosophen in Cousins „Oeuvres de Descartes", Paris 1824, tome V, pag. 309—428. Seit dem Erscheinen der ersten Auflage der Verdeutschung ist die neue Monumentalausgabe Descartes' durch Charles Adam und Paul Tannery herausgekommen, wo wir die Geometrie Bd. VI (1902), S. 367—485 finden. Ein Hinweis auf diese neueste Ausgabe steht hier vor dem Texte. Aber auch die neueren Arbeiten von Wieleitner „Über zwei algebraische Einleitungen zu Descartes' Géométrie" in den Blättern für das Gymnasialschulwesen, hrsgegeb. von Dr. Stemplinger, 1913, Bd. 49, S. 299/314; „Zur Erfindung der analytischen Geometrie" in Zeitschr. f. mathem. u. naturw. Unterr. XLVII, 1916, S. 414/26 und „Die Anfänge der analytischen Raumgeometrie", ebenda XLIX, 1918, S. 73/79, zu welchen Lorias 1904 auf dem Heidelberger Kongreß vorgetragener Plan einer Geschichte der analytischen Geometrie die Veranlassung gab, sind heute zur Beurteilung von Descartes' Geometrie unentbehrlich.

Durch die neue Auflage ist die Möglichkeit der Lektüre des Meisterwerkes sehr erleichtert; jeder Studierende der Mathematik sollte Descartes' Geometrie kennen und mit ihr vertraut sein, was wir hier erneut betonen.

Heidelberg. K. Bopp.

R. Mehmke, Leitfaden zum graphischen Rechnen. 2. Aufl. Leipzig und Wien 1924, Verlag von Fr. Deuticke.

Das Buch gibt den Inhalt der Vorlesungen wieder, die der Verfasser an der Technischen Hochschule in Stuttgart zu halten pflegte; es zerfällt in zwei ziemlich scharf getrennte Teile, von denen der erste das eigentliche Rechnen, der zweite Differentiation und Integration behandelt.

Der erste Teil enthält zunächst die Auflösung linearer Gleichungen, die Darstellung ganzer rationaler Funktionen sowie der Potenzsummen mit gebrochenen Exponenten und die Auflösung von Gleichungen. Mit besonderer Liebe verweilt der Verfasser bei der Anwendung logarithmischer Maßstäbe, die bei Verwendung des sogenannten logarithmischen Zirkels (dessen Gebrauch der Anwendung von Additionslogarithmen entspricht) von besonderem Nutzen sind. Vorteile und Tragweite der Methoden werden an einer Reihe von Beispielen erläutert. — Daß der Verfasser mit Rücksicht auf den Umfang des Buches die Nomographie nicht behandelt, wird man um so mehr billigen, da das Buch von Schwerdt erst eben erschienen ist. Ein wenig vermißt habe ich das graphische Rechnen mit komplexen Größen, insbesondere die Berechnung komplexer Wurzeln algebraischer Gleichungen; auch meine ich, daß z. B. die Interpolation durch ganze Funktionen wegen ihrer praktischen Bedeutung manchem Leser willkommen gewesen wäre.

Der zweite Teil des Buches bringt die graphischen Methoden der Differential- und Integralrechnung einschließlich der Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen nicht wesentlich verschieden von anderen Darstellungen dieses Gebietes. Die ausführliche Darstellung der Differentiation mit der Beschreibung der instrumentellen Hilfsmittel verdient Erwähnung. Als Beispiel zur Integration wird im Anhang die Bestimmung von Trägheitsmomenten usw. behandelt.

Das Buch, dessen schöne Ausstattung mit übersichtlichen Figuren nicht unerwähnt bleiben darf, ist ein nützliches Hilfsmittel für den Unterricht und zum Nachschlagen. — Die überall spürbare Begeisterung des Verfassers für seine zeichnerischen Methoden macht das Lesen leicht und erfreulich, und so ist zu hoffen, daß es nicht nur die alten Freunde der graphischen Methoden erfreuen, sondern ihnen auch neue gewinnen wird. TREFFTZ.

Heinrich W. E. Jung, Algebraische Flächen. Hannover 1925, Helwingsche Verlagsbuchhandlung.

Das Erscheinen des Jungschen Buches wird man — besonders in Deutschland — mit Freude begrüßen. Fehlt es doch gänzlich an einem derartigen, unseren heutigen Anforderungen von Strenge genügenden Lehrbuche. Während Herr K. Kommerell den 1. elementaren Teil der Raumgeometrie von Salmon-Fiedler in dankenswerter Weise neu bearbeitet hat (Leipzig, Teubner, 1922, 5. Aufl.), bleibt der 2. höhere, von den algebraischen Flächen u. a. handelnde Teil unbearbeitet. Das Eindringen in die (zumeist italienische) Originalliteratur — s. den Encyklopädieartikel von Castelnuovo u. Enriques, Bd. III, 2. Heft 6 — wird uns, die wir nicht in der Cremonaschen oder Clebsch-Noetherschen Schule aufgewachsen sind, durch die eigenartige geometrische Sprechweise der Autoren aufs höchste erschwert; zudem pflegen wir bei unserer heutigen, vorwiegend analytisch-mathematischen Erziehung uns nicht eher zu „beruhigen", als bis alles auf arithmetische und funktionentheoretische Grundlage gestellt ist.

Diesem Wunsche kommt Jung mit seinem Buche entgegen.

Seine arithmetisch geprägten Begriffe „Primteiler 1. und 2. Art", welche „Kurven" und „Stellen" auf der algebraischen Fläche scharf zu definieren gestatten, sind das sichere Fundament, auf dem das Gebäude ruht. Gerade hier im Anfang liegen die großen Schwierigkeiten, welche die Theorie der algebraischen Flächen bietet, vor allem wegen der Nichtinvarianz der Dimension: durch birationale Transformation kann ein Punkt in eine Kurve auseinandergezerrt werden und umgekehrt. Eine solche Erscheinung hat man bei algebraischen Kurven noch nicht; daher ist deren Theorie so sehr viel einfacher.

Die Möglichkeit der lokalen Uniformisierung einer Fläche, welche eigentlich zwei Probleme in sich schließt: Uniformisierung in der Umgebung eines Punktes und Uniformisierung in der Umgebung einer Kurve — wird aus der Funktionentheorie vorausgesetzt. Vielleicht hätte ein ausführlicheres Eingehen darauf nicht geschadet, zumal es dem Berichterstatter scheinen will, daß trotz der in der Vorrede zitierten Literatur diese Probleme noch nicht restlos erledigt sind.

Aber Verfasser will nicht in die Funktionentheorie der algebraischen Funktionen von 2 Veränderlichen einführen, sondern in die algebraische Geometrie der Flächen. Wir lernen in Kap. II die wichtigsten Differentialinvarianten kennen, in Kap. III ebene Schnitte und Berührungskegel, in Kap. IV Inflexions- und Salmonsche Tangenten, in Kap. V „besondere" Kurven, in Kap. VI die Zeuthen-Segresche Invariante und das arithmetische Geschlecht, in Kap. VII schließlich die sog. Salmonschen Gleichungen.

Damit ist ein großes Kapitel aus der algebraisch-analytischen Geometrie auf der Fläche in voller Allgemeinheit und Strenge erfaßt; man hat den

Wunsch, Verfasser möchte auch dem funktionentheoretischen Teil (der Theorie der einfachen und Doppelintegrale auf der Fläche usw.) einmal eine ähnliche Behandlung schenken!

Dem Leser sei auf alle Fälle empfohlen, vor der Lektüre dieses Buches, das in die algebraischen Funktionen von einer Veränderlichen vom arithmetisch-funktionentheoretischen Standpunkt einführende Werk desselben Verfassers: „Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen", Berlin 1922, vorzunehmen, um an dem leichteren Stoff zuerst in die arithmetisch-funktionentheoretische Denk- und Behandlungsweise einzudringen.

Münster, 16. Dez. 1924. Rob. König.

T. Levi-Civita, Lezioni di calcolo differenziale assoluto. Raccolte e compilate dal dott. E. Persico. 314 S. Rom 1925, Alberto Stock.

Während der „Ricci-Kalkül" von Schouten[1]) sich in erster Linie an den vorgeschrittenen Leser wendet, soll das neue Lehrbuch des absoluten Differentialkalküls von Levi-Civita vor allem der ersten Einführung in den Gegenstand und seine wichtigsten Anwendungen auf die Theorie der Riemannschen Mannigfaltigkeiten dienen. Dem entsprechend ist auf eine ausführliche und lückenlose Darstellung der Gedankengänge mehr Gewicht gelegt als auf den Umfang des behandelten Stoffes, und vom Leser werden keine weiteren Vorkenntnisse verlangt als Vertrautheit mit den Elementen der Infinitesimalrechnung. Ungeachtet dieses elementaren Charakters ist durchwegs der heutige Stand der Wissenschaft berücksichtigt; insbesondere führt der Verfasser von vornherein alle Vereinfachungen ein, die der von ihm herrührende Begriff der Parallelverschiebung in Riemannschen Mannigfaltigkeiten ermöglicht. Auch in pädagogischer Hinsicht sind diese Vorlesungen mustergültig.

Das Buch zerfällt in zwei, etwa gleichstarke Teile, von denen der erste die einführenden Theorien enthält, der zweite der Darlegung des absoluten Differentialkalküls und seiner Anwendungen gewidmet ist. Die ersten drei Kapitel behandeln die Funktionaldeterminanten und -matrizen, die Systeme von totalen Differentialgleichungen, die homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen und die vollständigen Systeme. Im vierten wird die Tensoralgebra entwickelt. Das fünfte Kapitel gibt eine geometrische Einführung in die Theorie der quadratischen Differentialformen. Hier wird zunächst alles Notwendige aus der inneren Geometrie der Flächen im dreidimensionalen euklidischen Raum abgeleitet, sodann der Begriff des Parallelismus auf einer solchen Fläche eingeführt und eingehend studiert, und erst jetzt der Übergang zu den n-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeiten vollzogen. Nachdem so alle Vorkenntnisse bereitgestellt sind, folgt im sechsten Kapitel (dem ersten des zweiten Teiles) eine ausführliche Auseinandersetzung der Grundbegriffe des absoluten Differentialkalküls, an die sich im nächsten naturgemäß die Erörterung der Krümmungseigenschaften einer Riemannschen Mannigfaltigkeit anschließt. Die ersten Abschnitte des achten Kapitels beschäftigen sich mit dem Zusammenhang der kovarianten Ableitungen und der Krümmungstensoren, die zu zwei verschiedenen Maßbestimmungen in derselben Mannigfaltigkeit gehören. Die Ergebnisse werden für den Fall der konformen Abbildung zweier

1) Vgl. die Besprechung im letzten Bande dieses Jahresberichtes, 2. Abt., S. *147*.

quadratischen Maßbestimmungen spezialisiert und hierauf die Mannigfaltigkeiten konstanten Riemannschen Krümmungsmaßes und ihre konforme Abbildung auf die euklidischen Mannigfaltigkeiten behandelt. Das neunte Kapitel bringt die Aufstellung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine quadratische Differentialform das quadrierte Bogenelement eines n-dimensionalen euklidischen Raumes oder einer Hyperfläche in einem solchen ist. Hier fügt sich eine Betrachtung der Hyperflächen in euklidischen Räumen zwanglos ein. Den Inhalt des Schlußkapitels bildet die Theorie der Kurvenkongruenzen in Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

Eine Übersetzung dieses vortrefflichen Lehrbuches ins Deutsche wäre sehr zu wünschen. Da es nach Zweck und Anlage von dem eingangs genannten Werke von Schouten grundverschieden ist, braucht man wohl nicht zu befürchten, daß das eine dem anderen irgendwie Abbruch tun könnte.

Prag. L. Berwald.

E. Hecke, Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen. Leipzig 1923, Akademische Verlagsgesellschaft.

Wenn auch die Ansichten darüber auseinandergehen, ob die Dedekindsche Idealtheorie, die Kronecker-Webersche Formentheorie oder die Henselsche Theorie der p-adischen Zahlen als Grundlage für die algebraische Zahlentheorie zu bevorzugen ist, so wird doch wohl jeder Freund der Zahlentheorie mit mir darin übereinstimmen, daß der vorliegende Versuch, die algebraische Zahlentheorie mit der Dedekindschen Methode zu begründen und bis in ihre tiefliegendsten Ergebnisse und Problemstellungen durchzuführen, als in vollstem Maße gelungen zu bezeichnen ist. Von den bisherigen Darstellungen der algebraischen Zahlentheorie auf Grund der Dedekindschen Idealtheorie entspricht heute keine mehr den billigerweise zu stellenden Forderungen größtmöglicher Prägnanz, Faßlichkeit und moderner Ausdrucksweise einerseits und weitgehendster Berücksichtigung der modernen Ergebnisse und Probleme andererseits. Alle diese Forderungen erfüllt die Darstellung des Verfassers aufs beste und beseitigt damit eine empfindliche Lücke in der vorhandenen Literatur.

Im einzelnen mag über den Inhalt folgendes gesagt werden:

Im 1. Kapitel werden die Elemente der Zahlentheorie im rationalen Zahlkörper in großer Eleganz und Kürze entwickelt. Der beim Beweise des Fundamentalsatzes von der eindeutigen Zerlegbarkeit in Primzahlen im Vordergrund stehende Begriff des Moduls bereitet den Dedekindschen Idealbegriff aufs beste vor.

Das 2. Kapitel enthält die wichtigste methodische Grundlage für das ganze folgende, die Theorie der Abelschen Gruppen. Es ist wohl bisher nirgends so klar herausgearbeitet wie hier, daß fast die ganze Zahlentheorie von der Theorie der endlichen und unendlichen Abelschen Gruppen beherrscht wird. Die Zahlen eines Körpers in additiver, in multiplikativer Hinsicht, die Zahlen eines Ideals, die Restklassen nach einem Ideal, die Idealklassen eines Körpers usw., das alles sind endliche oder unendliche Abelsche Gruppen, deren genauere Struktur zu untersuchen zu den Hauptaufgaben der Zahlentheorie gehört. Dadurch, daß die wichtigsten Sätze über Abelsche Gruppen ein- für allemal im voraus bewiesen werden, wird die folgende Darstellung der algebraischen Zahlentheorie methodisch ganz erheblich vereinfacht, indem später

überall auf jene Sätze zurückverwiesen werden kann. Besonders mag der überaus einfache Beweis des Basissatzes für endliche Abelsche Gruppen hervorgehoben werden. Die fragliche Basis wird hier unmittelbar durch eine Maximalforderung aufgestellt, und nicht, wie gewöhnlich, in komplizierter Weise successive konstruiert. Auch die Theorie der Gruppencharaktere läßt sich wohl kaum einfacher und faßlicher darstellen als hier. Besonders wertvoll ist schließlich, daß auch die für die Anwendungen wichtigen Sätze über unendliche Abelsche Gruppen mit endlicher Basis gesondert entwickelt werden, was bisher noch in keinem zahlentheoretischen Lehrbuch geschehen ist.

Im 3. Kapitel werden die im rationalen Zahlkörper auftretenden Gruppen, insbesondere die Restklassengruppen auf ihre Struktur hin untersucht. Dabei ergibt sich zwanglos die Theorie der Potenzreste und die Formulierung des quadratischen Reziprozitätsgesetzes. Dieses bietet dann den Anlaß, die Theorie der algebraischen Zahlen zu entwickeln, mit deren Hilfe allein ein naturgemäßer Beweis geführt werden kann.

Das 4. Kapitel bringt in üblicher Weise die Algebra der Zahlkörper. Die auch äußerlich durchgeführte Trennung dieses rein formalen Teiles der Elemente der algebraischen Zahlentheorie von dem im folgenden Kapitel behandelten arithmetischen Teil, der mit der Einführung des Ganzheitsbegriffs und der darauf gegründeten Teilbarkeitslehre einsetzt und in die feinere Struktur der algebraischen Zahlkörper hineinführt, ist vom systematischen Standpunkt und auch im Interesse der Übersichtlichkeit sehr zu begrüßen.

Im 5. Kapitel wird die Arithmetik der Zahlkörper, d. h. die Dedekindsche Idealtheorie in der durch Hurwitz und Hilbert gegebenen, vereinfachten Form entwickelt. Nachdem der Fundamentalsatz von der eindeutigen Zerlegbarkeit in Primideale bewiesen und die Struktur der Restklassengruppen nach Idealen analog zum 3. Kapitel untersucht ist, folgt eine höchst bemerkenswerte Orientierung über den Zusammenhang des quadratischen Reziprozitätsgesetzes mit der Idealtheorie in algebraischen Körpern. Während in einem quadratischen Körper $k(\sqrt{d})$ die Zerlegung der rationalen Primzahlen p durch den Wert des Legendreschen Restsymbols $\left(\frac{d}{p}\right)$ bedingt wird (*erster* Typus von Zerlegungsgesetzen), ist im Körper $k\left(e^{\frac{2\pi i}{d}}\right)$ der d-ten Einheitswurzeln die Restklasse p mod. d maßgebend für die Zerlegungsart von p (*zweiter* Typus von Zerlegungsgesetzen). Hieraus wird verständlich, wie das quadratische Reziprozitätsgesetz als verbindende Aussage zwischen $\left(\frac{d}{p}\right)$ und dem nur von der Restklasse p mod. d abhängigen umgekehrten Symbol $\left(\frac{p}{d}\right)$ herauskommen kann, indem man das erste Zerlegungsgesetz für p in $k(\sqrt{d})$ mit demjenigen vom zweiten Typus identifiziert, das sich ergibt, wenn man $k(\sqrt{d})$ als Unterkörper von $k\left(e^{\frac{2\pi i}{d}}\right)$ betrachtet, (was bei geeigneter Wahl von d der Fall ist). Es folgen dann die Dirichletschen Sätze über die Einheiten. Bemerkenswert einfach gestaltet sich der Beweis des hierzu erforderlichen Satzes von Minkowski über die linearen Formen (auf nur wenig mehr als einer Druckseite) dadurch, daß er *indirekt* gewendet wird. Der Existenzbeweis eines Systems von r Grundeinheiten wird in zwei Teile zerlegt, erstens den Beweis dafür,

daß eine Basis von höchstens r Einheiten vorhanden ist, was im wesentlichen durch Anwendung des Hauptsatzes über unendliche Abelsche Gruppen mit endlicher Basis gezeigt wird, und zweitens, daß genau r Grundeinheiten vorhanden sind, was dann ganz schnell durch Anwendung des Sates von Minkowski über lineare Formen herauskommt. Es ist wohl kaum möglich, diese an sich komplizierten Beweise klarer und durchsichtiger zu gestalten als hier. Besondere Beachtung verdient die dann folgende Einführung der Differente, die unter vollständiger Vermeidung der bisher immer verwendeten Kronecker-Weberschen Formentheorie, ganz auf Grund des ursprünglichen Ansatzes von Dedekind geschieht: Die Differente wird nämlich definiert als das Reziproke desjenigen Ideals, das durch alle Körperzahlen gebildet wird, deren Produkt mit jeder ganzen Körperzahl eine ganzzahlige Spur hat. Diese Definition führt leicht zu allen wichtigen Sätzen über Differente und Diskriminante und ist vor allem ohne weiteres auch auf den gleich im Anschluß daran behandelten Fall des Relativkörpers übertragbar. Jeder der die komplizierte Theorie der Relativdifferente und Relativdiskriminante etwa in Hilberts „Zahlbericht" studiert hat, wird die hier vorgenommene wesentliche Vereinfachung dieser Theorie mit Freude begrüßen. Die bei der Differente vermiedene Formentheorie wird vom Verfasser nur noch zu einer möglichst einfachen Begründung der Sätze über Normen und Relativnormen von Idealen gebraucht; es ist hierfür, wie auch zur Vermeidung einer besonderen Untersuchung der Beziehungen von Idealen verschiedener Körper zueinander, wohl doch die Henselsche Theorie die naturgemäßeste Grundlage.

Das 6. Kapitel bringt als neuartiges Element zu den bisherigen rein arithmetischen Entwicklungen die analytischen Hilfsmittel hinzu, ohne die die Theorie der algebraischen Zahlen heute nicht bis zu ihrem letzten und schönsten Ergebnissen durchgeführt werden kann. Es wird zunächst der Zusammenhang zwischen der Dichtigkeit der nach wachsender Norm geordneten Ideale und der Klassenzahl des Körpers entwickelt und dann gezeigt, wie sich dieser Zusammenhang durch Einführung der Dedekindschen Zetafunktion in die elegantere Form einer funktionentheoretischen Aussage, nämlich über deren Residuum an der Stelle 1, transformieren läßt, und so gleichzeitig auf Grund der Produktdarstellung der Zetafunktion die Klassenzahl in Zusammenhang mit den Primidealen des Körpers gesetzt wird. Die Anwendung dieser Tatsachen auf den Fall des Kreiskörpers führt nun unmittelbar auf den klassischen Beweis von Dirichlet für den Satz von den Primzahlen in einer arithmetischen Progression. Der Hauptpunkt dieses Beweises, das Nichtverschwinden der L-Reihen bei $s = 1$, ergibt sich dabei ohne weiteres aus dem im 5. Kapitel abgeleiteten Zerlegungsgesetz für den Kreiskörper, indem man die aus ihm fließende Kenntnis über die Art des Unendlichwerdens des Produktes aller L-Reihen mit der durch das Nichtverschwinden der Klassenzahl bedingten Art des Unendlichwerdens der Zetafunktion des Kreiskörpers vergleicht. Gleichzeitig resultiert dabei die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung. Für die anschließende, interessante Übersicht über die verschiedenen, bisher erbrachten Beweise für das Nichtverschwinden der L-Reihen bei $s = 1$ wäre es vielleicht besser gewesen, die allen diesen, stets unter Benutzung des Produktes aller L-Reihen geführten Beweisen gemeinsame Grundtatsache, daß nämlich in Wahrheit dieses Produkt mit der Zetafunktion des Kreiskörpers identisch ist, wirklich aussprechen, zumal auch der Beweis dieses Satzes (oder wenigstens

einer etwas eingeschränkten Behauptung dieser Art) mit den entwickelten Hilfsmitteln in ein paar Zeilen geführt werden konnte.

Die beiden letzten Kapitel bringen die Anwendungen der bisherigen allgemeinen Theorie auf die speziellen Fälle des quadratischen und relativ quadratischen Körpers, insbesondere das quadratische Reziprozitätsgesetz in beliebigen algebraischen Zahlkörpern.

Im 7. Kapitel wird die klassische Theorie des quadratischen Zahlkörpers $k(\sqrt{d})$ in Anpassung an die moderne Methode und Darstellungsform der vor angehenden Kapitel entwickelt. Sehr zu begrüßen ist die Einführung der Idealklasseneinteilung im engeren Sinne beim Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes. Hierdurch verschwinden die aus den früheren Darstellungen als unbequem und verständniserschwerend bekannten ambigen Idealklassen ohne ambige Ideale, und der zum Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes führende Zusammenhang zwischen der Anzahl t der Primteiler von d, der Anzahl 2^{t-1} der ambigen Klassen, der Teilbarkeit durch 2 der engeren Klassenzahl und der Norm der Grundeinheit wird überaus durchsichtig und einfach in der Darstellung. Die Ausdeutung des so bewiesenen quadratischen Reziprozitätsgesetzes als Aussage, die das Zerlegungsgesetz ersten Typus des quadratischen Zahlkörpers in ein solches vom zweiten Typus verwandelt, führt auf den Begriff des Klassenkörpers. Wenn leider der Verfasser auf eine explizite Formulierung dieses für die ganze moderne algebraische Zahlentheorie fundamentalen Begriffes, sowie die Angabe der Hauptresultate der Takagischen Klassenkörpertheorie nicht eingegangen ist, sondern sie nur an den von ihm ganz durchgeführten Spezialfällen durch Hinweise erläutert hat, so ist das wohl daraus zu erklären, daß schon die Formulierung der Hauptsätze dieser Theorie, um so mehr deren Beweise, weitere, umfangreiche Erläuterungen notwendig gemacht hätte, die aus dem Rahmen des Ganzen herausgefallen wären. Es wäre aber wohl doch, gerade für den Anfänger, sehr wertvoll gewesen, wenigstens das einheitliche Ziel der ganzen, allgemeinen Theorie klar vor Augen zu sehen, da man nur so die speziellen Sätze über quadratische und relativ-quadratische Zahlkörper, die im folgenden entwickelt werden, in ihrem letzten, inneren Zusammenhang recht verstehen und würdigen kann. Das trifft z. B. gleich für die nunmehr behandelte Theorie der Normenreste und Geschlechter zu, deren tieferer Sinn eben erst in der Klassenkörpertheorie voll herauskommt, während losgelöst davon der Fundamentalsatz von der Existenz von genau 2^{t-1} Geschlechtern vom Verfasser höchstens aus historischen Gründen als „fundamental" bezeichnet werden kann. Daß die Theorie der Normenreste in der vom Verfasser eingeschlagenen, das Hilbertsche Normenrestsymbol vermeidenden Form an Durchsichtigkeit gewonnen hat, muß zugegeben werden. Dennoch erscheint der gänzliche Verzicht auf dieses Symbol wegen der mit seiner Hilfe möglichen, eleganten Formulierung der *formalen* Seite des Reziprozitätsgesetzes als ein Verlust für die Theorie. Die nun folgende Klassenzahlbestimmung von $k(\sqrt{d})$ wird zunächst unter Vermeidung der lediglich als formales Gerüst dienenden Zetafunktion ausgeführt. Hierdurch tritt eben die Rolle der Zetafunktion bei dieser Bestimmung ganz besonders klar hervor. Bei der Auswertung des die Klassenzahl liefernden L-Reihenwertes ist die Rechnung in bisher nicht erreichter Kürze und Klarheit durchgeführt. Ein besonderer Paragraph behandelt den Zusammenhang der Theorie

des quadratischen Zahlkörpers mit der von Gauß begründeten Theorie der binären quadratischen Formen.

Das 8. und letzte Kapitel bringt die Theorie des relativ-quadratischen Zahlkörpers und das quadratische Reziprozitätsgesetz in beliebigen algebraischen Zahlkörpern. Es wird hier ein ganz neuartiger Beweis dieses Gesetzes auf analytischer Grundlage geliefert, der eine Verallgemeinerung des vierten Gaußschen Beweises mittels der Gaußschen Summen ist. Eine der Natur des Grundkörpers angepaßte Thetareihe in mehreren Variablen liefert zunächst vermöge ihrer Transformationsformel eine Reziprozität zwischen deren Grenzwerten bei Annäherung an singuläre Stellen. Diese Grenzwerte erweisen sich als Analoga zu den von Gauß betrachteten Summen, und die genannte Reziprozität führt ohne weiteres zum quadratischen Reziprozitätsgesetz in dem betr. Grundkörper. Gleichzeitig ermöglicht sie auf Grund des Reziprozitätsgesetzes die Lösung des klassischen Problems der Vorzeichenbestimmung der fraglichen Gaußschen Summen. Die beiden Ergänzungssätze werden in der auf Hilbert zurückgehenden Formulierung als notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß ein Ideal primär bzw. hyperprimär ist, ausgesprochen. Es erscheint fraglich, ob der Zusammenhang dieser Formulierung mit der aus dem rationalen Körper bekannten ohne weitere Erläuterung leicht verstanden werden kann. Die Formulierung mittels des Hilbertschen Normenrestsymbols ist wohl doch vorzuziehen, schon um die formale Übereinstimmung der Ergänzungssätze mit dem allgemeinen Reziprozitätsgesetz in Evidenz zu setzen und damit ihre Benennung als „Ergänzungssätze" zu rechtfertigen. Zum Schluß wird der Zusammenhang der Ergänzungssätze mit der Existenz unverzweigter relativ-quadratischer Körper, d. h. gewisser Unterkörper des Hilbertschen Klassenkörpers entwickelt. Hierzu ist neben dem schon oben Hervorgehobenen zu sagen, daß die gewöhnliche Theorie den umgekehrten Weg geht, nämlich das Reziprozitätsgesetz auf Grund der Existenz des Klassenkörpers beweist. Der Verfasser ist sich im klaren darüber, daß der von ihm eingeschlagene Weg vorläufig nicht auf andere als relativ-quadratische Körper anwendbar ist. Seine neuesten Arbeiten scheinen aber dahin zu zielen, die nötigen Grundlagen für eine derartige Verallgemeinerung zu schaffen und so den Hilbert-Furtwängler-Takagischen Weg der äußerst komplizierten arithmetischen Konstruktion der Klassenkörper durch die viel einfachere, von ihm hier in einem Spezialfall eingeschlagene funktionentheoretische Methode zu ersetzen. In dieser Hinsicht ist das letzte Kapitel von großer Bedeutung für den, der dem Verfasser auf seinem schwierigen Wege in ein undurchforschtes, problemreiches Gebiet folgen will, und es ist dem Verfasser aufs beste zu danken, daß er solch einen interessanten Einblick in die Werkstatt seines Schaffens gewährt.

Wenn also auch dieses letzte Kapitel wohl nur von Kennern ganz verstanden und gewürdigt werden kann, so stellt doch alles in allem das Buch einen ganz vortrefflichen, von einheitlicher Methode beherrschten, überaus durchsichtigen und verständlichen und die mannigfachsten Zusammenhänge klar herausarbeitenden Leitfaden dar, der jedem, der in die algebraische Zahlentheorie eindringen will, aufs wärmste empfohlen sein mag. Die übersichtliche Hervorhebung der Hauptresultate in der festen Form von „Sätzen" und Abgrenzung dieser „Sätze" gegen die nur zu den Beweisen erforderlichen „Hilfssätze" erleichtert das Lesen außerordentlich. Nicht zum mindesten ist es aber die trotz des hohen wissenschaftlichen Ernstes so überaus anziehende

Schreibweise des Verfassers und die seinen Schülern aus seinen Vorlesungen wohlbekannte, edle Art, auch die kompliziertesten Gedankengänge spielend zu meistern und dem Leser in schöner Form vertraut zu machen, die das Durchlesen des Buches zu einem wertvollen Genuß macht.

Möge es recht zahlreiche Freunde in aller Welt finden!

Kiel, den 1. März 1925. HELMUT HASSE.

Zeitschriftenschau.

Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität. Band III. (1924.)

Ch. H. Müntz, Allgemeine Begründung der Theorie der höheren ζ-Funktionen. Hans Rademacher, Beiträge zur Viggo Brunschen Methode in der Zahlentheorie. G. Thomsen, Über konforme Geometrie I. Grundlagen der konformen Flächentheorie. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some problems of Diophantine approximation: The analytic character of the sum of a Dirichlet's series considered by Hecke. Robert Furch, Zur Grundlegung der kombinatorischen Topologie. E. Artin, Über eine neue Art von L-Reihen. Hans Rademacher, Zur additiven Primzahltheorie algebraischer Zahlkörper. I. Über die Darstellung totalpositiver Zahlen als Summe von totalpositiven Primzahlen im reell-quadratischen Zahlkörper. Wilhelm Blaschke, Eine topologische Kennzeichnung der Kreise auf der Kugel. Otto Schreier, Über die Gruppen $A^a B^b = 1$. Emil Artin, Ein mechanisches System mit quasiergodischen Bahnen. Wilhelm Blaschke, Über die Geometrie von Laguerre. I. Grundformeln der Flächentheorie. Wilhelm Blaschke, Über die Geometrie von Laguerre. II. Flächentheorie in Ebenenkoordinaten. Erich Hecke, Analytische Funktionen und algebraische Zahlen. II. Teil. Robert Furch, Zur kombinatorischen Topologie des dreidimensionalen Raumes. Jakob Nielsen, Über topologische Abbildungen geschlossener Flächen. Heinz Behnke, Zur Theorie der diophantischen Approximationen. Emil Artin, Kennzeichnung des Körpers der reellen algebraischen Zahlen. Hans Petersson, Über die Konvergenz der Reihen in der Störungstheorie. Hans Rademacher, Zur additiven Primzahltheorie algebraischer Zahlkörper. II. Über die Darstellung von Körperzahlen als Summe von Primzahlen im imaginär-quadratischen Zahlkörper.

Mathematische Annalen.

Band 91 (1924):

W. Krull, Algebraische Theorie der Ringe. II. W. Schmeidler, Über die Zerlegung von Primgruppen. M Sopmann, Ein Kriterium für Irreduzibilität ganzer Funktionen in einem beliebigen algebraischen Körper. L. Koschmieder, Über ein Biorthogonalsystem von Polynomen zweier Veränderlichen. E. Study, Über S. Lies Geometrie der Kreise und Kugeln. (4. Fortsetzung.) F. Sibirani, Sopra un teorema di R. Sturm. H. Künneth, Über die Torsionszahlen von Produktmannigfaltigkeiten. H. Kneser, Reguläre Kurvenscharen auf den Ringflächen. H. Kneser, Die adiabatische Invarianz des Phasenintegrals bei einem Freiheitsgrad. I. Tzénoff, Sur les équations du mouvement des systèmes matériels non holonomes J. Nielsen, Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen. H. Tietze, Beiträge zur allgemeinen Topologie. II. Über die Einführung uneigentlicher Elemente. E. Study, Über S. Lies Geometrie der Kreise und Kugeln. (Schluß.) T. Bonnesen, Über das isoperimetrische Defizit ebener Figuren. H. W. Brinkmann, Riemann spaces conformal to Einstein spaces. J. Weinacht, Über die bedingt-periodische Bewegung eines Massenpunktes. H. Brandt, Der Kompositionsbegriff bei den quaternären quadratischen Formen. K. Grandjot, Über Grenzwerte ganzer transzendenter Funktionen.

Band 92 (1924):

D. Hilbert, Die Grundlagen der Physik. G. Hamel, Über nichtholonome Systeme. I. Tzénoff, Sur les percussions appliquées aux systèmes matériels. H. Mohrmann, Reduzible Kurven vom Maximalindex. Fr. Schilling, Über die Abbildung der projektiven Ebene auf eine geschlossene singularitätenfreie Fläche im erreichbaren Gebiet des Raumes. G. Heußel, Bemerkungen über zentrische Kollineation. M. Frank, Über zentrische Kollineation von Kegelschnitten. O. Haupt, Bemerkung über die ebenen Elementarkurven 3. Ordnung. O. Haupt und E. Hilb, Über Greensche Randbedingungen. W. Rogosinski, Ein Satz über Dirichletsche Reihen. A. Khintchine, Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen. S. Breuer, Zur Bestimmung der metazyklischen Minimalbasis von Primzahlgrad. R. Nevanlinna, Über eine Klasse meromorpher Funktionen. R. Remak, Über indefinite binäre quadratische Minimalformen. W. Krull, Algebraische Theorie der zerlegbaren Ringe. (Algebraische Theorie der Ringe. III.) H. Jonas, Aufstellung einer Transformationstheorie für eine neue Klasse aufeinander abwickelbarer Flächen. P. Alexandroff und P. Urysohn †, Zur Theorie der topologischen Räume. P. Alexandroff, Über die Struktur der bikompakten topologischen Räume. P. Urysohn †, Über die Metrisation der kompakten topologischen Räume. P. Alexandroff, Über die Metrisation der im Kleinen kompakten topologischen Räume. P. Urysohn †, Der Hilbertsche Raum als Urbild der metrischen Räume. M. Schönfinkel, Über die Bausteine der mathematischen Logik.

Monatshefte für Mathematik und Physik. Band 33. (1923.)

A. Duschek, Über eine besondere Klasse algebraischer Mannigfaltigkeiten. H. Hahn, Über Reihen mit monoton abnehmenden Gliedern. H. Hahn, Die Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Mittel. P. Hebroni, Über sogenannte zweigliedrige, kontinuisierte Matrizen und ihre Anwendung auf Integral- und Integrodifferentialgleichungen. J. Lense, Über mehrdimensionale lineare Strahlen- und Ebenenkomplexe. K. Mack, Zur stereographischen Projektion imaginärer Gebilde. K. Menger, Über die Dimensionalität von Punktmengen. E. Müller, Der Aufbau von Perioden arithmetischer Reihen als Grundlage topologischer Erfahrungssätze Simonys. Th. Radaković, Über die Kurven auf einer Fläche, die durch die Normalenflächen extremen Dralls ausgeschnitten werden. H. Tietze, Über die Komponenten offener Mengen. L. Vietoris, Kontinua zweiter Ordnung. W. Wirtinger, Über allgemeine Maßbestimmungen, in welchen die geodätischen Linien durch lineare Gleichungen dargestellt werden. K. Zindler, Über die partiellen Differentialgleichungen der schwingenden Saiten und Membranen.

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Jahrg. 23. (1924.)

A. Hammerstein, Begründung der Theorie der linearen Integralgleichungen mit symmetrischem Kern mittels Variationsrechnung. H. Reißner, Beitrag zum Erddruckproblem. R. Fuchs, Zur Theorie der Druckkräfte. G. Szegö, Über die Eigenschaft der Exponentialreihe.

Mathematische Zeitschrift.

Band 16 (1923):

M. Bauer, Verschiedene Bemerkungen über die Differente und die Diskriminante eines algebraischen Zahlkörpers. St. Jolles, Die Bestimmung der Inzidenzen in korrelativen Räumen vermöge der windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz. G. Scheffers, Flächen mit geradlinig projizierbaren konjugierten Kurvennetzen. A. Weinstein, Fundamentalsatz der Tensorrechnung. B. P. Haalmeijer, Über lineare homogene Punktmengen. M. Mathias, Über positive Fourier-Integrale. W. Fr. Meyer, Über die Darstellung und Zusammensetzung nichteuklidischer Raumbewegungen. Fr. Levi, Streckenkomplexe auf Flächen. P. Funk, Über Flächen mit einem festen Abstand der konjugierten Punkte.

F. Hausdorff, Eine Ausdehnung des Parsevalschen Satzes über Fourierreihen. W. van der Woude, Über die Staudeschen Kreiselbewegungen. E. Schlechter, Untersuchungen über die Konvergenz der limitär-periodischen Jacobi-Ketten beliebiger Ordnung. J. Tamarkine, Sur le théorème d'unicité des solutions des équations différentielles ordinaires. J. Tamarkine, Sur la méthode de C. Störmer pour l'intégration approchée des équations différentielles ordinaires. F. Hausdorff, Momentprobleme für ein endliches Intervall. R. Weyrich, Beiträge zur Theorie der Kurven konstanter geodätischer Krümmung auf krummen Flächen. O. Perron, Über die Gestalt der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes. Zweiter Teil. J. Lense, Über eine Integralgleichung in der Theorie der heterogenen Gleichgewichtsfiguren. E. Hecke, Über die Lösungen der Riemannschen Funktionalgleichung. H. Tietze, Über die Parallelverschiebung in Riemannschen Räumen. M. Bauer, Ganzzahlige Gleichungen ohne Affekt. H. Liebmann, Bemerkung zu der Arbeit: Eine charakteristische Eigenschaft der H-Netze, diese Zeitschrift **14**, S. 160—168.

Band 17 (1923):

R. Remak, Verallgemeinerung eines Minkowskischen Satzes. (Erster Teil.) H. Prüfer, Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen. L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Figur der Himmelskörper. Vierte Abhandlung. Zur Maxwellschen Theorie der Saturnringe. J. A. Schouten, Über die Bianchische Identität für symmetrische Übertragungen. E. Steinitz, Über die Maximalzahl der Doppelpunkte bei ebenen Polygonen von gerader Seitenzahl. L. Neder, Über das Wachstum analytischer Funktionen in Halbstreifen und ähnlichen Gebieten. E. Salkowski, Über affine Geometrie: Zur Theorie der Affingesimsflächen. O. Perron, Über einen Grenzwertsatz. H. Brandt, Bilineare Transformation quadratischer Formen. J. A. Schouten, Über die Einordnung der Affingeometrie in die Theorie der höheren Übertragungen. I. J. A. Schouten, Über die Einordnung der Affingeometrie in die Theorie der höheren Übertragungen. II. A. Timpe, Die Airysche Funktion für den Ellipsenring. W. Saxer, Über die Picardschen Ausnahmewerte sukzessiver Derivierten. M. Fekete, Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. J. G. van der Corput, Zahlentheoretische Abschätzungen mit Anwendung auf Gitterpunktprobleme. W. Rogosinski, Über Bildschranken bei Potenzreihen und ihren Abschnitten. W. Jänichen, Über einen zahlentheoretischen Satz von Hurwitz. H. Weyl, Zur Charakterisierung der Drehungsgruppe.

Band 18 (1923):

E. Bilz, Beitrag zu den Grundlagen der kombinatorischen Analysis situs. O. Perron, Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$. E. Study, Ein Seitenstück zur Theorie der linearen Transformationen einer komplexen Veränderlichen. I. Fr. Riesz, Über die Randwerte einer analytischen Funktion. G. Pólya, Herleitung des Gaußschen Fehlergesetzes aus einer Funktionalgleichung. A. Khintchine, Über dyadische Brüche. Fr. Riesz, Über eine Verallgemeinerung der Parsevalschen Formel. K. Knopp, Über das Eulersche Summierungsverfahren. (II. Mitteilung.) O. Perron, Über eine Verallgemeinerung der Eulerschen Reihentransformation. R. Remak, Verallgemeinerung eines Minkowskischen Satzes. (Zweiter Teil.) E. Study, Ein Seitenstück zur Theorie der linearen Transformationen einer komplexen Veränderlichen. II. E. Fischer, Modulsysteme und Differentialgleichungen. Ö. Ore, Zur Theorie der Irreduzibilitätskriterien. A. Khintchine, Ein Satz über Kettenbrüche, mit arithmetischen Anwendungen. G. Kowalewski, Integrationslose Berechnung invarianter Bogen- und Flächenelemente ebener Transformationsgruppen. M. Lagally, Die isometrische Verbiegung einer Fläche durch schrittweise Näherung. H. Tietze, Nachträgliche Bemerkung zu dem Aufsatz: „Über die Parallelverschiebung in Riemannschen Räumen".

Band 19 (1924):

K. Popoff, Über einige Entwicklungen nach einem System gegebener Funktionen. St. Bergmann, Über die Bestimmung der Verzweigungspunkte eines hyperelliptischen Integrals aus seinen Periodizitätsmoduln mit Anwendungen auf die Theorie des Transformators. G. Herglotz, Über die Wurzelanzahl algebraischer Gleichungen innerhalb und auf dem Einheitskreis. E. T. Bell, Umbral symmetric functions and algebraic analogues of the Bernoullian and Eulerian numbers and functions. H. Hamburger, Über Kurvennetze mit isolierten Singularitäten auf geschlossenen Flächen. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Solution of the Cesàro summability problem for power-series and Fourier series. K. Knopp, Zur Theorie der C- und H-Summierbarkeit. A. Schur, Über diejenigen Strahlensysteme, deren Brennflächen durch die Systemstrahlen isometrisch aufeinander bezogen werden. K. Grandjot, Über die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung. L. Vietoris, Zur Geometrie ebener Massenanziehungsprobleme. (Aus einem Briefe an E. Strömgren in Kopenhagen.) E. Hilb, Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen. 3. Mitteilung. W. Sternberg, Die charakteristischen Eigenschaften des logarithmischen Potentials. Preisausschreibung. Berichtigung von F. Riesz. Korrektur zu H. Weyl, Zur Charakterisierung der Drehungsgruppe. E. Artin, Quadratische Körper im Gebiete der höheren Kongruenzen. I. (Arithmetischer Teil.) E. Artin, Quadratische Körper im Gebiete der höheren Kongruenzen. II. (Analytischer Teil.) E. Kamke, Zur Arithmetik der Polynome. A. Weinstein, Ein hydrodynamischer Unitätssatz. Ö. Ore, Algebraische Gleichungen mit primitiven Gruppen. O. Haupt, Über Kurven endlicher Ordnung. A. Walfisz, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. M. Bauer, Über die Erweiterung des Körpers der p-adischen Zahlen zu einem algebraisch abgeschlossenen Körper.

Band 20 (1924):

T. Radó, Über eine nicht fortsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit. O. Hölder, Das Volumen in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit und seine Invarianteneigenschaft. L. Lichtenstein, Über die erste Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie. H. Geppert, Entwicklungen willkürlicher Funktionen nach funktionentheoretischen Methoden. M. Bauer, Die Theorie der p-adischen bzw. $\mathfrak{P}$-adischen Zahlen und die gewöhnlichen algebraischen Zahlkörper. II. E. Landau, Über die Wurzeln der Zetafunktion. E. Landau, Über die ζ-Funktion und die L-Funktionen. R. Remak, Über potentialkonvexe Funktionen. H. Weyl, Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik. R. Weitzenböck, Über orthogonale und Bewegungsinvarianten von Linearformen. K. Ananda-Rau, The infinite product for $(s-1)\zeta(s)$. H. Prüfer, Theorie der Abelschen Gruppen. I. Grundeigenschaften. E. Waelsch, Zur Tensoralgebra. R. Weitzenböck, Bemerkungen zur vorstehenden Arbeit des Herrn Waelsch. L. Lichtenstein, Neue Beiträge zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. P. Alexandroff, Über die Äquivalenz des Perronschen und des Denjoyschen Integralbegriffes. H. Brandt, Bilineare Transformation quaternärer quadratischer Formen. M. Pasch, Betrachtungen zur Begründung der Mathematik. E. Salkowski, Zur Theorie der Voßschen und der Guichardschen Flächen. F. und R. Nevanlinna, Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion. T. Kubota, Eine Ungleichheit für die Eilinien. Ö. Ore, Zur Theorie der Eisensteinschen Gleichungen. W. Rogosinski, Zur Theorie der Dirichletschen Reihen.

Band 21 (1924):

F. Pollaczek, Über die irregulären Kreiskörper der l-ten und l^2-ten Einheitswurzeln. G. Kowalewski, Über die neuen Methoden zur Berechnung von Differentialinvarianten. E. Study, Ein Seitenstück zur Theorie der linearen Transformationen einer komplexen Veränderlichen. Teil III. A. Weinstein, Der Kontinuitätsbeweis des Abbildungssatzes für Polygone. J. Horn, Laplacesche Inte-

grale, Binomialkoeffizientenreihen und Gammaquotientenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Ch. H. Müntz, Umkehrung bestimmter Integrale und absolute Approximation. A. Besikowitsch, Über analytische Funktionen mit vorgeschriebenen Werten ihrer Ableitungen. J. Tamarkin und A. Besikowitsch, Über die asymptotischen Ausdrücke für die Integrale eines Systems linearer Differentialgleichungen, die von einem Parameter abhängen. E. Landau, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. P. Urysohn, Ein Beitrag zur Theorie der ebenen Gebiete unendlich hohen Zusammenhanges. M. Pasch, Die natürliche Geometrie. L. Berwald und Ph. Frank, Über eine kovariante Gestalt der Differentialgleichungen der Bahnkurven allgemeiner mechanischer Systeme. O. Hölder, Berichtigung zu der Abhandlung: Das Volumen in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit **20**, S. 7—20. V. Fock, Über eine Klasse von Integralgleichungen. E. Study, Ein Seitenstück zur Theorie der linearen Transformationen einer komplexen Veränderlichen. Teil IV. J. Kirmse, Zur Darstellung total positiver Zahlen als Summen von vier Quadraten. G. Szegö, Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn M. Fekete: Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. W. Blaschke, Eine Kennzeichnung der Kreise auf der Kugel. A. Friedmann und J. A. Schouten, Über die Geometrie der halbsymmetrischen Übertragungen. P. J. Myrberg, Über die automorphen Funktionen bei einer Klasse Jonquièresscher Gruppen zweier Veränderlichen. G. Thomsen, Über eine gemeinsame Behandlungsweise verschiedener Differentialgeometrien. W. Sternberg, Über die lineare elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung mit drei unabhängigen Veränderlichen. L. E. J. Brouwer, Zum natürlichen Dimensionsbegriff. O. Perron, Beweis eines Satzes von Bézout.

Annales de l'école normale supérieure. III. série. Tome 40. (1924.)

P. Montel, Sur les modules des zéros des polynomes. E. Nörlund, Sur les formules d'interpolation de Stirling et de Newton. S. Bays, Sur les systèmes cycliques de triples de Steiner. G. Julia, Sur une classe d'équations fonctionnelles. G. Bertrand, La théorie des marées et les équations intégrales. E. Kogbetliantz, Analogie entre les séries trigonométriques et les séries sphériques. E. Cartan, Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. S. Mandelbrojt, Sur les séries de Taylor qui présentent des lacunes.

Bulletin de la société math. de France. Tome 50. (1924.)

R. Gateaux, Sur diverses questions de calcul fonctionnel. Fatou, Note sur les fonctions invariantes par une substitution rationnelle. M. Weill, Sur les courbes rectifiables. A. Pellet, Fonctions $\theta(x)$ de Jacobi et $P(u)$ de Weierstraß. E. Maillet, Sur quelques propriétés des nombres transcendants de Liouville. A. Bloch, Mémoire d'analyse diophantienne linéaire. A. Angelesco, Sur des polynomes orthogonaux et des extensions d'une formule de Rodrigues. N. Wiener, Limit in terms of continuous transformation. E. Cotton, Sur quelques formules d'Hydrodynamique. V. Myller-Lebedeff, Sur un théorème de Gauß-Arndt relatif aux congruences binomes. B. Gambier, Déformation du paraboloïde de révolution: cubique de M. Lyon et congruences de M. Thybaut. P. Appell, Sur un système particulier de quatre droites concourantes dans l'espace; droites équirésultantes.

Bulletin des sciences math. II. série. t. 48. (1924.)

Valiron, A propos d'un mémoire de M. Pólya. M. Plancherel, Sur la méthode d'intégration de Ritz. P. Montel, Sur la Géométrie finie et les travaux de M. C. Juel. J. Haag, Sur l'intégration des séries. Th. Anghelutza, Une remarque sur l'intégrale de Poisson. N. Nielsen, Note sur la série de Lagrange. G. Bertrand, Une formule d'itération de certains noyaux singuliers. M. Fréchet, Prolongement des fonctionnelles continues sur un ensemble abstrait. G. Bouligand,

Application de la notion du prolongement des fonctionnelles à l'étude de l'existence de la solution du problème de Dirichlet harmonique. E. Picard, Sur le rôle des Sciences mathématiques. B. Hostinský, Sur les transformations des équations de la mécanique. G. Giraud, Sur une méthode pour calculer les intégrales. G. Bouligand, Sur les principes de la théorie du potentiel. G. Valiron, Sur les solutions de l'équation fonctionnelle d'Abel. A. Pellet, Sur la racine de plus petit module des équations. R. Miche, Détermination des fatigues internes d'un corps élastique et isotrope soumis à des effets superficiels donnés. A. Auric, Sur la probabilité de faire fonctionner n éléments par groupes de n éléments. É. Cartan, Les récentes généralisations de la notion d'espace. E. Picard, Une généralisation d'un théorème sur les fonctions entières. J. de Séguier, Sur les diviseurs maxima de certains groupes linéaires galoisiens à invariant bilinéaire ou quadratiques. P. Lévy, Sur une application du calcul fonctionnel. G. Giraud, Sur le calcul numérique des intégrales définies.

Nouvelles annales de mathématiques. V. série. Tome 2. (1924.)

E. Borel, Sur la théorie des formes linéaires. A. Buhl, Sur la géométrie de la formule de Stokes. R. Thiry, Une première leçon sur les nombres complexes. J. Sudria, Sur le mouvement d'une figure plane dans son plan. R. Bricard, Sur une configuration connue de dix droites. J. Paoli, La limite de $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ établie par un procédé de démonstration élémentaire. Ch. Riquier, Sur l'enveloppe d'une famille de lignes à deux paramètres. J. Haag, Sur une certaine loi de force comprenant comme cas particulier la loi de gravitation einsteinienne. Chapel, Quadrature graphique du cercle par le rapport de Métius. E. Goursat, Sur l'intégration des différentielles totales rationnelles. F. Josse, Sur les mouvements relatifs de trois plans qui glissent l'un sur l'autre. J. Pérès, Choc en tenant compte du frottement. M. Janet, Capacités électriques et Géométrie élémentaire. E. Lainé, Sur les transformations de contact. B. Gambier, Concours d'agrégation de 1923. Solution de la question de Calcul différentiel et intégral. M. Rabatel, Sur l'indice des fractions rationnelles. N. Abramesco, Résumé des principales propriétés des polynomes orthogonaux. E. Lainé, Sur les transformations de contact. (Suite.) C. Barré, Sur quelques applications du principe de correspondance généralisé. E. Lainé, Sur les transformations de contact. (Suite.) J. Pérès, Choc de deux solides avec frottement. R. Bricard, Sur les droites moyennes d'un triangle. R. Goormaghtigh, Sur une généralisation des théorèmes de Jamet. Ch. Bioche, Sur les lignes asymptotiques de certaines surfaces gauches. J. Sudria, Sur la dérivée relative d'un vecteur; application au théorème de Coriolis. L. Pomey, Sur une extension des Séries de Bertrand. A. Bloch, Quelques démonstrations de la relation des compléments $\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin \pi a}$. E. Lainé, Sur les transformations de contact. (Fin.) H. Béghin, Sur certains problèmes de frottement. B. Gambier, Asymptotiques non rectilignes d'une surface réglée et équation de Riccati correspondante. A. Buhl, Sur les volumes tournants. R. Thiry, Etude d'un problème sur le pendule à longueur variable. B. Niewenglowski, Démonstration d'une formule de Hamilton. E. Fabry, Sur la définition de la fonction e^x. A. Buhl, Sur les volumes tournants. (Suite et Fin.) G. Métrod, Démonstration de la formule de l'indicateur. Delassus et Pérès, Note sur le choc en tenant compte du frottement.

Acta litterarum ac scientiarum regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae. Sectio scientiarum mathematicarum. Tome I. (1924.)

G. Rados, Ein Satz über Kongruenzen höheren Grades. J. Kürschák, Über das identische Verschwinden der Variation. M. Bauer, Über ein Problem von Dedekind. F. Riesz, Sur le théorème de M. Egoroff et sur les opérations fonc-

tionnelles linéaires. F. Riesz, Sur les valeurs moyennes du module des fonctions harmoniques et des fonctions analytiques. A. Haar, Über eine Verallgemeinerung des Du Bois-Reymondschen Lemmas. E. Egerváry, On a maximum-minimum problem and its connexion with the roots of equations. B. Kerékjártó, Az analysis és a geometria topologiai alapjairól. B. Kerékjártó, Sur les fondements topologiques de l'Analyse et de la Géométrie. T. Radó, Zur Theorie der mehrdeutigen konformen Abbildungen. G. Szegö, Über die Tschebyscheffschen Polynome. M. Bauer, Über die Erweiterung eines algebraischen Zahlkörpers durch Henselsche Grenzwerte. A. Ostrowski, Über die Bedeutung der Jensenschen Formel für einige Fragen der komplexen Funktionentheorie. F. Riesz, Sur les suites de fonctions analytiques. M. Fekete, Über Zwischenwerte bei komplexen Polynomen. T. Radó, Bemerkung zu einem Unitätssatze der konformen Abbildung. M. Riesz, Sur la sommation des séries de Fourier. M. Riesz, Sur un théorème de la moyenne et ses applications. J. Nagy, Über die Lage der Wurzeln von linearen Verknüpfungen algebraischer Gleichungen. J. Nagy, Über die Lage der Wurzeln von linearen Verknüpfungen algebraischer Gleichungen. (Schluß.) J. Kürschák, Eine Verallgemeinerung von Moivres Problem in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. C. Jordan, On the Montmort-Moivre Problem. M. Fekete, Über Faktorenfolgen, welche die „Klasse" einer Fourierschen Reihe unverändert lassen. A. Haar, Über die Konvergenz von Funktionenfolgen. T. Radó, Sur la représentation conforme de domaines variables. L. Klug, Einige Sätze über Kegelschnitte. L. Klug, Einige Sätze über Kegelschnitte. (Schluß.) M. Bauer, Bemerkungen zur Theorie der Differente. J. Neumann, Zur Einführung der transfiniten Zahlen. M. Riesz, Sur le problème des moments et le théorème de Parseval correspondant. J. Pál, Zur Topologie der Ebene. T. Radó, Über die Fundamentalabbildung schlichter Gebiete. Bibliographie.

American Journal of Mathematics.

Vol. XLV (1923):

J. L. Mordell, On the Number of Solutions in Positive Integers of the Equation $yz + zx + xy = n$. J. L. Walsh, A Closed Set of Normal Orthogonal Functions. Cl. Kendall, Congruences Determined by a Given Surface. I. A. Barnett, Linear Partial Differential Equations with a Continuous Infinitude of Variables. L. Isserlis, On the Ordering of the Terms of Polars and Transvectants of Binary Forms. E. T. Bell, A Class of Numbers Connected with Partitions N. Wiener, Note on a New Type of Summability. D. Wrinch, On Mediate Cardinals. H. E. Buchanan, Periodic Oscillations of Three Finite Masses about the Lagrangian Circular Solutions. Fl. D. Sutton, On Certain Chains of Theorems in Reflexive Geometry. L. B. Robinson, A Poristic System of Equations. M. Buchanan, Systems of Two Linear Integral Equations with Two Parameters and Symmetrizable Kernels. F. W. Murray, The Asymptotic Expansion of the Function $W_{k,m}(z)$ of Whittaker. A. Emch, Some Geometric Applications of Symmetric Substitution Groups. S. Dhar, On Elliptic Cylinder Functions of the Second Kind. H. A. Bender, Sylow Subgroups in the Group of Isomorphisms of Prime Power Abelian Groups. J. C. Glashan, The Isodyadic Quintic. E. T. Bell, On Class Number Relations for Bilinear Forms in Four Variables. D. S. Morse, Relative Inclusiveness of Certain Definitions of Summability. C. R. Ballantine, Modular Invariants of a Binary Group with Composite Modulus. W. C. Graustein, Determination of a Surface by its Curvature and Spherical Representation.

Vol. XLVI (1924):

L. E. Dickson, On the Theory of Numbers and Generalized Quaternions. J. O. Osborn, A Study of the Rational Involutorial Transformations in Space which leave a Web of Sextic Surfaces invariant. O. E. Glenn, On the Reduction of Differential Parameters in Terms of Finite Sets, with Remarks concerning

Differential Invariants of Analytic Transformations. J. C. Glashan, On the Isodyadic Septimic Equations. G. Y. Rainich, Two-Dimensional Tensor Analysis without Coördinates. H. T. Davis, Fractional Operations as applied to a Class of Volterra Integral Equations. B. A. Bernstein, Representation of Three-Element Algebras. C. A. Nelson, The Riemann Adjoints of Completely Integrable Systems of Partial Differential Equations. V Snyder, Further Types of Involutorial Transformations which leave each Cubic Surface of a Web invariant. A. B. Coble, Geometrical Aspects of the Abelian Modular Functions of Genus Four. F. Morley, The Curve of Ambience. I. A. Barnett, On a Class of Invariant Subgroups of the Conformal and Projective Groups in Function Space. D. Jackson, A General Class of Problems in Approximation. P. Field, On a Rational Plane Quintic Curve with Four Real Cusps. A. F. Carpenter, Projective Properties of a Ruled Surface in the Neighborhood of a Ruling. L. M. Kells, Complete Characterization of Dynamical Trajectories in N-Space. C. A. Garabedian, Rods of Constant or Variable Circular Cross Section.

Annals of Mathematics. 2nd series. Vol. 25. (1924.)

Fl. Cajori, The history of notations of the calculus. G. A. Miller, New applications of a fundamental theorem of substitution groups. H. Levy and A. Bramley, Geodesic representation between Riemann spaces. O. E. Glenn, On the residues of figurate numbers. A. Dresden, On symmetric forms in N variables. II. W. E. Edington, On an infinite system of non-abelian groups of order nm^{n-1}. A. Arwin, A contribution to the theory of closed chains. H. Blumberg, On the characterization of the set of points of λ-continuity. H. L. Smith, On the Ampère-Cauchy derived functions. L. P. Copeland, Note on certain seminvariants of n-lines. C. A. Fischer, The Fredholm theory of Stieltjes integral equations. M. C. Foster, Rectilinear congruences referred to special surfaces. J. L. Synge, Parallel propagation of a vector around an infinitesimal circuit in an affine-connected manifold. D. Jackson, On the method of least m^{th} powers for a set of simultaneons equations. P. J. Daniell, The derivative of the general integral. I. A. Barnett, On a class of transformations in function space. J. M. Thomas, Congruences of circles studied with reference to the surface of centers. W. E. Osgood, On Neumann's existence proof. H. H. Dalaker, On the automorphic functions of the group (0, 3; 2, 4, 6). E. Hille, Note on Dirichlet's series with complex exponents. V. Snyder, On the types of monoidal involutions. J. L. Walsh, An inequality for the roots of an algebraic equation. L. E. Dickson, Differential equations from the group standpoint.

Quarterly Journal of mathematics. Vol. 49. (1924.)

P. A. MacMahon, An American tournament treated by the calculus of symmetric functions. H. B. C. Darling, An approximation to $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^a e^{-t^2}\,dt$.

P. A. MacMahon, On the partitions into unequal and into uneven parts. E. T. Bell, On class number relations and certain remarkable sums relating to 5 and 7 squares. Th. Muir, A seventh list of writings on determinants. S. Pollard, The Stieltjes' integral and its generalizations. S. Pollard, The Stieltjes' integral and its generalizations. (Continued.) A. R. Forsyth, Developable surfaces through a couple of guiding curves in different planes. E. T. Bell, On recurrences for sums of divisors. E. H. Neville, Developable surfaces through given pairs of guiding curves. H. Hilton and G. D. Sadd, On plane unicursal quintic curves with a triple point. R. D. Carmichael, Abstract definitions of the symmetric and alternating groups and certain other permutation groups. L. V. Meadowcroft, On the elementary treatment of the theory of least squares. H. B. C. Darling, On Le-

gendre's coefficients and associated functions with non-integral subscripts, and their connection with the elliptic integrals. A. Berry, On certain Riccati differential equations with algebraic integrals. E. G. C. Poole, Some notes on spheroidal wave-functions. E. T. Bell, Singly infinite class number relations. E. H. Neville, The genesis of Lamé's equation. P. A. MacMahon, Chess tournaments and the like treated by the calculus of symmetric functions.

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. XXI. (1924.)

G. A. Hardy and J. E. Littlewood, Some problems of Diophantine approximation: A further note on the trigonometrical series associated with the elliptic theta-functions. S Wigert, On a problem concerning the Riemann's ζ-function. E. H. Neville, The definition of an envelope. A. E. Western, Note on the number of primes of the form $n^2 + 1$. E. L. Ince, A proof of the impossibility of the coexistence of two Mathieu functions. H. Lamb, Waves of permanent type on the interface of two liquids. B. M. Wilson, An asymptotic relation between the arithmetic sums $\sum_{n \leq x} \sigma_r(n)$ and $x^r \sum_{n \leq x} \sigma_{-r}(n)$. C. G. F. James, On the analytical representation of congruences of conics. L. J. Mordell, On the rational solutions of the indeterminate equations of the third and fourth degrees. P. A. MacMahon, Prime lattice permutations. P. A. MacMahon, The theory of modular partitions. J. E. Littlewood, with a Note by E. A. Milne, On an integral equation. F. P. White, The projective generation of curves and surfaces in space of four dimensions. H. G. Telling, On the geometrical theory of apolar quadrics. W. M. H. Greaves, On a system of differential equations which appear in the theory of Saturn's rings. J. P. Gabbatt, On the generalization of the theory of circles associated with a triangle by means of the theory of plane cubic curves. P. A. MacMahon, The algebra of symmetric functions. J. Larmor, Can gravitation really be absorbed into the frame of space and time? C. G. F. James, On the intersection of constructs in space of three or four dimensions, with special reference to the matrix representation of curves and surfaces. E. C. Titchmarsh, Hankel transforms. J. M. Hill, On the fifth book of Euclid's elements (addendum to fifth paper). W. Burnside, On errors of observation. W. Burnside, The solution of a partial difference equation. G. H. Hardy, A chapter from Ramanujan's note-book. G. D. Liveing, The recuperation of energy in the universe. L. Godeaux, Sur la représentation analytique des congruences de coniques. C. T. Preece, Dougall's theorem on hypergeometric functions. W. L. Marr, On a quintic locus defined by five points in a plane. C. G. F. James, On complexes of cubic curves in ordinary space. P. A. MacMahon, The partitions of infinity with some arithmetic and algebraic consequences. P. A. MacMahon, The prime numbers of measurement on a scale. R. A. Fisher, Note on Dr. Burnside's recent paper on errors of observation. J. C. Burkill, The fundamental theorem of Denjoy integration. C. G. F. James, Extensions of a theorem of Segre's, and their natural position in space of seven dimensions. W. P. Milne, Note on the twelve points of intersection of a quadri-quadric curve with a cubic surface. T. M. Cherry, On the solution of difference equations. J. Brill, On the problem of three bodies. W. Burnside, On the formulae of one-dimensional kinematics. J. P. Gabbatt, On the pedal locus in non-Euclidean hyperspace. G. F. C. Searle, A focal line method of determining the elastic constants of glass.

Transactions of the Cambridge Philosophical Society.

Vol. XXI:

G. H. Hardy, Further researches in the theory of divergent series and integrals. R. Hargreaves, Integral forms and their connexion with physical equations. H. Bateman, On the application of integral equations to the determination of

upper and lower limits to the value of a double integral. J. C. Mercer, Plemelj's canonical form. P. A. Mac Mahon, The operator reciprocants of Sylvester's theory of reciprocants. H. Bateman, The solution of linear differential equations by means of definite integrals. H. W. Turnbull, The irreducible concomitants of two quadratics in n variables. W. H. Young, On uniform oscillation. H. Bateman, The determination of solutions of the equation of wave motion involving an arbitrary function of three variables which satisfies a partial differential equation. G. N. Watson, The continuations of functions defined by generalized hypergeometric series. J. E. Littlewood, On a class of integral functions. W. H. Young, On a change of order of integration in an improper repeated integral. L. B. Turner, The stresses in a thick hollow cylinder subjected to internal pressure. W. H. Young, On the differentiation of functions defined by integrals. G. H. Hardy, Fourier's double integral and the theory of divergent integrals. R. Hargreaves, Cyclic paths for rays reflected at an elliptical boundary. P. A. Mac Mahon, The problem of 'derangement' in the theory of permutations.

Vol. XXII:

P. A. Mac Mahon, On compound denumeration. G. N. Watson, A class of integral functions defined by Taylor's series. W. J. Harrison, The hydrodynamical theory of lubrication with special reference to air as a lubricant. P. A. Mac Mahon, The superior and inferior indices of permutations. R. Hargreaves, The domains of steady motion for a liquid ellipsoid, and the oscillations of the Jacobian figure. J. M. Hill, On the fifth book of Euclid's elements. (Third Paper.) P. A. Mac Mahon, The invariants of the halphenian homographic substitution — to which is appended some investigations concerning the transformation of differential operators which present themselves in invariant theories. C. E. Weatherburn, Vector integral equations and Gibbs' dyadics. S. Ramanujan, On certain arithmetical functions. J. M. Hill, On the fifth book of Euclid's elements. (Fourth Paper.) R. Hargreaves, The character of the kinetic potential in electromagnetics. E. H. Neville, The field and the cordon of a plane set of points. S. Ramanujan, On certain trigonometrical sums and their applications in the theory of numbers. G. N. Watson, Asymptotic expansions of hypergeometric functions. D. Buchanan, Asymptotic satellites near the equilateral triangle equilibrium points in the problem of three bodies. L. J. Mordell, On the representations of a number as a sum of an odd number of squares. W. J. Harrison, The hydrodynamical theory of the lubrication of a cylindrical bearing under variable load, and of a pivot bearing. H. W. Richmond, On integers which satisfy the equation $t^3 \pm x^3 \pm y^3 \pm z^3 = 0$. W. Burnside, On cyclical octosection. P. A. Mac Mahon, Congruences with respect to composite moduli. K. Tamaki and W. J. Harrison, On the stability of the steady motion of viscous liquid contained between two rotating coaxal circular cylinders. W. Wirtinger, On a general infinitesimal geometry, in reference to the theory of relativity. J. M. Hill, On the fifth book of Euclid's elements. (Fifth Paper.) G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some problems of diophantine approximation: The analytic properties of certain Dirichlet's series associated with the distribution of numbers to modulus unity.

Tôhoku Mathematical Journal.

Vol. 22 (1923):

K. Ôishi, On a Diophantine equation. K. Ogura, Sur le champ de gravitation dans l'espace vide. P. Ed. Strässle, Untersuchungen über das Poissonsche Integral auf der Kugel und seine Ableitungen. Y. Sawayama, An extension of a theorem of Salmon. G. Pólya, Über eine arithmetische Eigenschaft gewisser Reihenentwicklungen. P. Sibirani, Sur certains systèmes d'équations différentielles. G. Szegö, Über die Mittelwerte analytischer Funktionen. K. Yoneyama, Axiomatic investigation on number-systems. I. E. D. Pepper, On multiplicative

and enumerative properties of numerical functions. M. Shibayama, On geometrical construction by a ruler of finite length and compasses of finite aperture. P. O. Upadhyaya, On a sextic. P. O. Upadhyaya, Cyclotomic sexe-section for the prime 61. P. O. Upadhyaya, Second paper on tautochronous motion. T. Hayashi, On the integral $\int_0^\infty \frac{\sin^n x}{x^m}\,dx$ with an appendix on its application to the theory of approximation of a function. T. Takasu, Projective and correlative applicabilities of two surfaces. S. Takenaka, On a general theory of summability. II. R. E. Moritz, Über gewisse Infinitesimaloperationen der höheren Operationsstufen. III. K. Yoneyama, Axiomatic investigation on number-systems. II. G. Tiercy, Note sur quelques identités vectorielles et algébriques; et sur les formules de la trigonométrie sphérique. Nripendranath Sen, On liquid motion inside a rotating elliptic quadrant. T. Iwatsuki, Motion under a central force with infinitesimal transformations. Y. Okada, On a certain expansion of analytic function. T. Kubota, Eine Verallgemeinerung des Taylor-Cauchyschen Satzes. L. Hanni, Grundlagen einer allgemeinen Theorie der zeitlich veränderlichen Vektorfelder und ihrer Relativitätstheorie. P. O. Upadhyaya, On the maximum and minimum values of shortest distance between two screws. P. O. Upadhyaya, On a geometrical property of the Cassinian. P. O. Upadhyaya, Cyclotomic sexe-section for the primes 37, 43, 67 and 73. P. O. Upadhyaya, Cyclotomic quinqui-section for the primes 1621, 1721 and 1741. P. O. Upadhyaya, Some general formulae in symmetric functions which depend upon cyclotomic tri-section. T. Hayashi, The extremal chords of an oval.

Vol. 23 (1924):

H. P. Pettit, A general cyclide with special reference to the quintic cyclide. Y. Okada, On approximate polynomials with integral coefficients only. Y. Okada, On the convergency of interpolating functions. Y. Shimizu, On a ring-shaped body (in Japanese). T. Hayashi, On a ring-shaped body (in Japanese). Y. Ikeda, Relation of functions defined by the linear differential equations of the second order. M. Fujiwara, Zur Theorie der binären indefiniten quadratischen Formen. T. Hayashi, An inequality in polygon-geometry. T. Takasu, Bemerkungen zu den Frenetschen Formeln. T. Nakahara, A covariant of three circles. A. F. Carpenter, Flecnodal properties of a ruled surface. S. Takenaka, Note on my paper "A general view of the theory of summability. II". W. Süß, Endlichgleichheiten bei mehrdimensionalen Polytopen. A. Guldberg, Application of the calculus of probabilities to statistics. M. Lecat, Contribution à la théorie de la multiplication des déterminants généraux. H. Katō, Note on Bertrand curves and Mannheim curves. L. L. Smail, Some theorems on triple limits. S. Takenaka, On linear integral equations in infinite number of unknown functions. T. Kameda, A method for solving some integral equations. T. Kogiso, On the mean centre of the points on algebraic curves. T. Takasu, Natural theory of simply oriented circles and cones in non-euclidean space. T. Iwatsuki, Some geometrical properties of motions of a particle. T. Hayashi, On the extremal area of the osculating ellipse of an oval. J. H. Walsh, On the location of the roots of Lamé's polynomials. L. L. Smail, Some theorems on uniform convergence of infinite products. K. Shibata, On some special curves. K. Shibata, On the approximation of irrational numbers by rational numbers. P. O. Upadhyaya, On a problem considered by Legendre, A. Cayley and W. Burnside. Berichtigung zu der Arbeit "Untersuchungen über das Poissonsche Integral ..." von P. Edw. Strässle (Bd. 22, S. 38—76). Errata von P. Edw. Strässle: "Untersuchungen ..." (Bd. 22, S. 38—76). Errata à la Note par M. Lecat (t. 23, pp. 137—156).

Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

[Titel, Preis usw. der eingesandten Schriften, mit Ausnahme der Sonderabdrucke, werden hier regelmäßig veröffentlicht. Besprechungen geeigneter Bücher bleiben vorbehalten. Schulbücher werden nicht besprochen. Eine Rücksendung der eingegangenen Schriften kann nicht erfolgen.]

E. Anding, Peter Andreas Hansen, Zur Feier der fünfzigsten Wiederkehr seines Todestages. Gotha 1924.

Werner Bloch und **J. Fuhlberg-Horst,** Ein Taschenbuch für Freunde der Mathematik. Band I (Mathematikbüchlein). 80 S. Stuttgart 1925, Franckhsche Verlagshandlung.

Friedrich Boehm, Versicherungsmathematik. I. Elemente der Versicherungsrechnung. [Sammlung Göschen], 144 S. Verlag Walter de Gruyter & Co. Berlin u. Leipzig, 1925.

Julian Lowell Coolidge, An Introduction to Mathematical Probability. 215 S. Oxford Clarendon Press 1925. Geb. sh. 15.—.

Felix Eberty, Die Gestirne und die Weltgeschichte Gedanken über Raum, Zeit und Ewigkeit, mit einer Einleitung von Albert Einstein. Neu herausgegeben von Gregorius Itelson. 48 S. Berlin 1925, J. M. Spaeth.

Kuno Fladt, Unendliche Reihen. (Mathematisch-Physikalische Bibliothek Band 61.) 52 S. Leipzig und Berlin 1925, B. G. Teubner. Kart. ℳ 1.—.

D. Gawronsky, Der physikalische Gehalt der speziellen Relativitätstheorie. 64 S. Stuttgart 1925, J. Engelhorns Nachf.

Robert Henseling, Sternbüchlein 1925. 97 S. Stuttgart 1925, Franckhsche Verlagshandlung.

Wilhelm Hort, Die Differentialgleichungen des Ingenieurs. Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage unter Mitwirkung von W. Birnbaum und K. Lachmann. Mit 308 Abbildungen im Text und 2 Tafeln. Berlin 1925, Julius Springer. Geb. ℳ 25.50.

Gerhard Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der Fredholmschen Determinanten. Zweite, verkürzte Auflage. Berlin und Leipzig 1925, Walter de Gruyter & Co. Geh. ℳ 14.—; geb. ℳ 15.50.

Tullio Levi-Civita, Lezioni di calcolo differenziale assoluto. 314 S. Roma 1925, Alberto Stock.

G. Pólya und **G. Szegö,** Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. I. (Grundlehren der math. Wissenschaften Band XIX.) 338 S. Berlin, Julius Springer. Geh. ℳ 15.—; geb. ℳ 16.50.

G. Pólya und **G. Szegö,** Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. II. 407 S. Berlin 1925, Julius Springer. Geh. ℳ 18.—; geb. ℳ 19.50.

Gottfried Rückle, Praxis des Zahlenrechnens. Charlottenburg 1925, R. Otto Mittelbach.

I. J. Schwatt, An Introduction to the Operations with Series. 287 S. Philadelphia 1924, The Press of the University of Pennsylvania.

K. Schweißguth, Über partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit vollständigen Lösungen von besonderer Art. (Mitteilungen des Math. Seminars d. U. Gießen. XII. Heft.) 60 S. Gießen 1924, Verlag des Math. Seminars Gießen. ℳ 0.80, für das Ausland 1 Schweizer Franken.

A. V. Vasiliev, Space Time Motion, an Historical Introduction to the general Theory of Relativity. Translated from the Russian by H. M. Lucas und C. P. Sanger, with an Introduction by Bertrand Russell, F. R. S. London 1924, Chatto & Windus. £ —.7.

Heinrich Wieleitner, Die Geburt der modernen Mathematik. I u. II. Karlsruhe 1925, G. Braun.