Über die Iteration rationaler Funktionen.[1]

Ein Bericht von Hubert Cremer in Berlin.

Im folgenden soll versucht werden, den Leser mit den fundamentalsten und interessantesten Ergebnissen der Theorie der Iteration rationaler Funktionen vertraut zu machen, wie sie vor allem von G. Julia[2]) in seiner preisgekrönten Arbeit und etwas später unabhängig hiervon von P. Fatou[3]) entwickelt worden ist. Julia und Fatou untersuchen mit funktionentheoretischen Mitteln die Folge der Iterierten einer nicht linearen, rationalen Funktion $R(z)$ mit komplexem Argument z, d. h. die Funktionen $R(z)$, $R(R(z))$, $R(R(R(z)))$ usw.

$R(z)$ bedeutet also im folgenden eine rationale Funktion von mindestens zweitem Grade der komplexen Veränderlichen z. Wir setzen

$$R_1(z) = R(z), \quad R_2(z) = R(R(z)), \quad R_n(z) = R(R_{n-1}(z)) \\ = R_{n-1}(R(z)).$$

$R_n(z)$ nennen wir die n-te Iterierte von $R(z)$. Sie ordnet jedem Punkt z_0 seinen *Nachfolger* n-ter Ordnung $z_n = R_n(z_0)$ zu. Umgekehrt heißt z_0 *Vorgänger* n-ter Ordnung von z_n. Ein Punkt hat zwar nur einen Nachfolger, aber im allgemeinen k^n verschiedene Vorgänger n-ter Ordnung, wobei k den Grad von $R(z)$ bezeichnet.

Ist $\zeta = R_n(\zeta)$, so ist der Punkt ζ ein *Fixpunkt*, und zwar wollen wir ihn einen Fixpunkt n-ter Ordnung nennen, wenn seine Nachfolger

1) Die vorliegende Arbeit ist aus einem Seminar hervorgegangen, das E. Schmidt und L. Bieberbach unter wesentlicher Mithilfe von K. Löwner an der Berliner Universität abhielten. Sie faßt zusammen, was sich aus den Vorträgen des Verf. und der Arbeit anderer Vortragender als einfachste Darstellung des Gegenstandes ergab. Vorträge hielten außer dem Verf. R. Brauer, M. Zickermann, M. Reidemeister, E. Josephy, H. Hopf. Der Verfasser hat darüber hinaus noch einige Vereinfachungen der Beweisführung anbringen können. So glaube ich, daß nun eine bequem lesbare Darstellung der schönen Ergebnisse und Methoden von Julia und Fatou vorliegt, die auch weitere Kreise interessieren dürfte. Bieberbach.

2) G. Julia, Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles, Journal de Mathématiques pures et appliquées (1918) ser. 8, tome 1, p. 47—245.

3) P. Fatou, Sur les équations fonctionnelles, Bulletin de la soc. math. de France, tome 47 (1919) u. 48 (1920).

niedrigerer Ordnung mit ihm nicht zusammenfallen, d. h. wenn für $\nu < n$ $R_\nu(\zeta) \neq \zeta$ ist.

Ist $R_n(\zeta) = \zeta$, so ist $R(R_n(\zeta)) = R(\zeta)$, also $R_n(R(\zeta)) = R(\zeta)$, d. h. der Nachfolger eines Fixpunktes ist wieder ein Fixpunkt. Ein Fixpunkt ζ n-ter Ordnung bildet mit seinen $n-1$ Nachfolgern $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}$ einen n-fachen *Zyklus*, oder, wie wir auch sagen wollen, einen Zyklus n-ter Ordnung, weil ja $\zeta_n = \zeta$ wird.

Die Ableitung $R_n'(\zeta)$ heißt der *Multiplikator* des Fixpunktes. Ist $|R_n'(\zeta)| < 1$, so ist in einer hinreichend kleinen Umgebung von ζ auch der Differenzenquotient $\left|\frac{R_n(z) - R_n(\zeta)}{z - \zeta}\right|$ kleiner als eine unterhalb 1 liegende Zahl $\varkappa$, und es ist somit, da $R_n(\zeta) = \zeta$,

$$|R_n(z) - \zeta| < \varkappa \cdot |z - \zeta| \qquad \varkappa < 1,$$

d. h. also $R_n(z)$ liegt näher an ζ als z; ζ heißt daher *anziehender* Fixpunkt.

Ist $|R_n'(\zeta)| > 1$, so gilt für ein hinreichend nahes z und passendes $l > 1$

$$|R_n(z) - \zeta| > l\,|z - \zeta| \qquad l > 1,$$

und der Fixpunkt heißt daher *abstoßender* Fixpunkt.

Ist $|R_n'(\zeta)| = 1$, so wollen wir den Fixpunkt *indifferent* nennen, und zwar *rational indifferent*, wenn $R_n'(\zeta)$ eine Einheitswurzel ist.

Wir legen unseren Untersuchungen die funktionentheoretische Ebene (die Riemannsche Kugel) zugrunde; daher genießt der unendlich ferne Punkt völlige Gleichberechtigung. Da uns insbesondere nur Eigenschaften interessieren werden, die durch lineare Transformationen nicht geändert werden, so setzen wir wie üblich fest, daß dem unendlich fernen Punkt eine solche Eigenschaft immer dann zukommen soll, wenn sie nach Ausführung der Transformation $z' = \frac{1}{z}$ dem Nullpunkt zukommt. Solche Eigenschaften sind, wie man leicht beweisen kann, insbesondere die Art der Konvergenz einer Folge von Funktionen oder Punkten, ferner die Eigenschaft eines Punktes, anziehender, indifferenter oder abstoßender Fixpunkt zu sein. Ebenso wollen wir sinngemäß eine Funktion in einem Punkte a stetig heißen, wenn sie durch eine lineare Transformation in eine (im gewöhnlichen Sinne) stetige Funktion übergeht. Unter „Stetigkeit" ist also immer „Stetigkeit auf der Riemannschen Kugel" zu verstehen. (In diesem Sinne ist z. B. $\frac{1}{z^2}$ im Punkte $z = 0$ stetig.)

Ich will gleich mit dem ganz einfachen *Beispiel* $R(z) = z^2$ beginnen. Die n-te Iterierte ist $R_n(z) = z^{2^n}$, und man sieht sofort, daß die Nachfolger eines Punktes z_0 im Innern des Einheitskreises K, das sind die Punkte $z_0^{2^n}$, gegen den Nullpunkt streben. Dieser ist anziehender Fixpunkt; sein Anziehungsbereich ist das Innere von K, das wir im folgenden K_i nennen wollen. Das Äußere heiße K_a. Der andere anziehende Fixpunkt ist der unendlich ferne Punkt; in ihm häufen sich die Nachfolger aller Punkte von K_a. Die Fixpunkte n-ter Ordnung sind Wurzeln der Gleichung $\zeta^{2^n} = \zeta$, oder, wenn wir von 0 und ∞ absehen, von $\zeta^{2^n - 1} = 1$, also Einheitswurzeln. Sie sind sämtlich abstoßend, da $R_n'(\zeta) = 2^n \cdot \zeta^{2^n - 1} = 2^n > 1$ ist und liegen ferner auf K überall dicht. K, zugleich (im mengentheoretischen Sinne) die Ableitung (d. i. die Menge der Häufungspunkte) der Menge aller abstoßenden Fixpunkte, trennt die beiden Anziehungsbereiche von 0 und ∞. Während die Nachfolger eines Punktes $z_0 (\neq 0, \infty)$ eines Anziehungsbereiches gegen den anziehenden Fixpunkt konvergieren, häufen sich seine Vorgänger in K, und zwar in jedem Punkte von K. Auch die Vorgänger eines Punktes η von K häufen sich in jedem Punkte von K. Ein Punkt von K hat also die Eigenschaft, daß sich die Vorgänger jedes Punktes mit Ausnahme von 0 und ∞ in ihm häufen.

Dies Beispiel veranlaßt uns zur folgenden Problemstellung. Wir fragen nach den Häufungspunkten der Menge $e(z_0)$ der Nachfolger eines vorgegebenen Punktes z_0, d. h. also der Folge $z_0, R_1(z_0), R_2(z_0), \ldots$. Die Gesamtheit der Häufungspunkte, die Ableitung von e, nennen wir e'. e hat mindestens einen Häufungspunkt (ein Fixpunkt ist in diesem Sinn ein Häufungspunkt seiner Nachfolger), kann aber auch jede endliche Anzahl sowie unendlich viele Häufungspunkte besitzen. Im Beispiel $R(z) = z^2$ besteht $e'(z_0)$ aus einem Element, wenn z_0 nicht auf K liegt, aus endlich vielen, wenn z_0 eine Einheitswurzel ist, aus unendlich vielen, wenn z_0 auf K liegt, ohne eine Einheitswurzel zu sein, und für gewisse Punkte auf K sogar aus dem ganzen Einheitskreis.

Ist nun ζ Häufungspunkt von Nachfolgern irgendwelcher Punkte z, so können wir fragen, in welchen Bereichen ζ eine analytische Funktion des Ausgangselementes z bleibt. Damit soll genauer folgendes gemeint sein: Es sei ζ_0 ein Punkt von $e'(z_0)$. Wir fragen nach der Menge $\mathfrak{G}$ der Punkte, in deren Umgebung mindestens eine (z_0, ζ_0)-Folge (darunter verstehe ich eine Teilfolge $R_{n_i}(z)$ der $R_n(z)$, die im Punkte z_0 gegen ζ_0 strebt) gegen eine analytische Funktion konvergiert? Welche Eigenschaften hat diese Menge $\mathfrak{G}$? Das ist die Frage, die sich **Julia** in erster Linie gestellt hat.

Betrachten wir unser Beispiel $R(z) = z^2$. Ist nun z. B. z_0 ein Punkt in K_i, so ist 0 der einzige Punkt von $e'(z_0)$. Jede Teilfolge der z^{2^n} strebt (bei diesem Beispiel) im Punkte z_0 gegen 0, ist also eine $(z_0, 0)$-Folge. Sie strebt in K_i gegen die Konstante 0, in K_a gegen die Konstante ∞. In der Umgebung eines Punktes η der „trennenden Menge“ K konvergiert dagegen weder die Folge z^{2^n} noch irgendeine ihrer Teilfolgen gegen eine analytische Funktion. $\mathfrak{G}$ besteht also hier aus allen Punkten von K_i und K_a. Wir sehen weiter, daß $\mathfrak{G}$ hier von der Wahl von z_0 und ζ nicht abhängt, vorausgesetzt, daß ζ in $e'(z_0)$ enthalten ist.

Ein weiteres Beispiel, dessen Betrachtung dem Leser hier empfohlen sei, ist $R(z) = \frac{1}{z^2}$.

Auch bei allgemeineren, insbesondere von Fatou[1]) behandelten Beispielen hatten sich ähnliche Verhältnisse ergeben. Die Ebene zerfiel immer in einzelne Bereiche, deren Nachfolger gegen gewisse (anziehende oder indifferente) Fixpunkte konvergierten, und die Menge, die diese Bereiche trennte, bestand immer aus den abstoßenden Fixpunkten und ihren Häufungspunkten.

Wie ist es nun aber, wenn eine beliebige rationale Funktion $R(z)$ zu untersuchen ist?

Das entscheidende Mittel, dies zu ergründen, bieten, wie sich zeigen wird, die Ergebnisse Montels bei seinen Untersuchungen über die Normalscharen von Funktionen.[2]) Wir wollen daher zunächst hierüber kurz berichten.

Eine Gesamtheit von in einem Bereich D meromorphen Funktionen nennen wir nach Montel[3]) *normal* in diesem Bereich D, wenn sich aus *jeder* in ihr enthaltenen unendlichen Teilfolge $f_n(z)$ eine unendliche Teilfolge $f_{n_i}(z)$ auswählen läßt, die in jedem abgeschlossenen Teilbereich D' von D gleichmäßig (und daher also gegen eine meromorphe Grenzfunktion oder gegen unendlich) konvergiert.

Z. B. ist die Folge z^{2^n} im Innern des Einheitskreises normal; es konvergiert ja sogar jede Teilfolge in jedem abgeschlossenen Teilbereich des Einheitskreises gleichmäßig. Die Folge $\frac{1}{z^2}, z^4, \frac{1}{z^8}, z^{16} \ldots$ ist ferner in K_i normal, denn aus jeder unendlichen Teilfolge, etwa

$$\frac{1}{z^2}, z^{2^2}, z^{2^4}, \frac{1}{z^{2^5}}, z^{2^6}, z^{2^8}, \frac{1}{z^{2^9}} \cdots$$

1) Vgl. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, séance du 15 octobre 1906 (t. 143, p. 546—548) und séance du 21 mai 1917 (t. 164, p. 806—808).

2) Annales scientifiques de l'école normale supérieure, III. série t. 29 (1912) p. 487 etc. und t. 33 (1916) p. 223 etc.

3) Ann. de l'école norm. sup. t. 33 (1916) p. 283.

läßt sich gewiß eine unendliche Teilfolge, z. B.

$$\frac{1}{z^2}, \frac{1}{z^{2^5}}, \frac{1}{z^{2^9}} \ldots$$

auswählen, die in jedem abgeschlossenen Teilbereich von K_i gleichmäßig konvergiert (hier gegen ∞).

Dagegen ist z. B. die Folge

$$\tfrac{1}{2}z, z^2, \tfrac{1}{4}z, z^4, \tfrac{1}{8}z, z^8 \ldots$$

in keiner Umgebung des Punktes $z_0 = 1$ normal; sie enthält aber normale Teilfolgen, z. B. $\frac{1}{2}z, \frac{1}{4}z, \frac{1}{8}z \ldots$

Insbesondere soll eine Folge von Funktionen in einem Punkt P normal heißen, wenn sie in einer Umgebung dieses Punktes normal ist. Dann gilt der folgende Hilfssatz, der sich unschwer beweisen läßt[1]):

I. *Ist eine Folge von Funktionen in allen Punkten eines Bereiches D normal, so ist sie in D normal.*

Der wichtige Montelsche Satz, der für unsere Untersuchungen eine fundamentale Rolle spielt, lautet nun[2]):

II. *Wenn eine Folge $f_i(z)$ von analytischen Funktionen, die in D meromorph sind, in diesem Bereiche D mindestens drei Punkte ausläßt, d. h. wenn es drei Werte a, b, c gibt, die in D von keiner Funktion der Folge angenommen werden, so ist die Folge $f_i(z)$ normal in D.*

II. beruht im wesentlichen auf dem Schottkyschen Satze[3]), gehört also dem Picardschen Ideenkreis an.

Wir betrachten die *Gesamtheit aller Punkte, in denen die Folge $R_n(z)$ nicht normal ist.* Wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{F}$. Die Komplementärmenge von $\mathfrak{F}$, d. h. die Menge aller Punkte, in deren Umgebung die Folge $R_n(z)$ normal ist, heiße $\overline{\mathfrak{F}}$. Sie besteht offenbar nur aus inneren Punkten, ist also eine offene Punktmenge.

Wir werden sogleich erkennen, daß die Menge $\mathfrak{G}(z_0, \zeta_0)$ (wenn nur ζ_0 in $e'(z_0)$ enthalten ist) stets existiert und mit $\overline{\mathfrak{F}}$ identisch ist.

Zunächst wissen wir, daß die Folge $R_n(z)$ wegen I. in jedem keinen Punkt von $\mathfrak{F}$ enthaltenden Bereich D normal ist. Wenn also z_0 ein beliebiger Punkt, ζ ein Punkt von $e'(z_0)$ und D ein ganz in $\overline{\mathfrak{F}}$ liegender Bereich ist, so läßt sich aus der Folge $R_n(z)$ eine Teilfolge $R_{n_i}(z)$ auswählen, die in z_0 gegen ζ und in jedem abgeschlossenen Teil-

1) loc. cit. p. 227. 2) loc. cit. p. 284 (31).

3) Nach diesem Satze gibt es eine Schranke $S(\varkappa, \vartheta)$, so daß $|f(z)| < S$ in $|z| < \vartheta R$, wenn $|f(0)| < \varkappa$, $f(z)$ in $|z| < R$ regulär und $\neq 0$ und $\neq 1$ bleibt.

bereich von D gleichmäßig konvergiert. Ihr Grenzwert ist dann eine in D meromorphe Funktion $f(z)$. Wenn insbesondere z_0 in D liegt, ist $f(z_0) = \zeta$. Solange z nur Werte in $\overline{\mathfrak{F}}$ annimmt, bleibt ζ also — in dem oben genau erläuterten Sinne — jedenfalls analytische Funktion des Ausgangselementes z.

Da $\overline{\mathfrak{F}}$ nur aus inneren Punkten besteht und daher in eine endliche oder abzählbar unendliche Anzahl von Gebieten zerfällt, kann ich sogar eine Teilfolge $R_{n_2}(z)$ auswählen, die in *jedem* in $\overline{\mathfrak{F}}$ enthaltenen Gebiet gegen eine analytische Funktion konvergiert.[1])

Umgekehrt läßt sich mit Hilfe von II. zeigen, daß eine Teilfolge der $R_n(z)$ in der Umgebung $\mathfrak{U}$ eines Punktes η von $\mathfrak{F}$ niemals gegen eine analytische, ja nicht einmal gegen eine stetige Funktion konvergieren kann.[2]) Es sei $\lim R_{n_i}(z) = f(z)$. Wäre $f(z)$ in η stetig, so könnte ich nach Wahl von ε eine Umgebung $\mathfrak{U}_\varepsilon$ von η so angeben, daß für je zwei Punkte z_1 und z_2 in $\mathfrak{U}_\varepsilon$ $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ wäre. Ich betrachte nun zwei Zyklen irgendwelcher Fixpunkte: $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_l$ und $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_k$. Der kleinste Abstand zweier ihrer Punkte sei ε. Da $R_n(z)$ in $\mathfrak{U}_\varepsilon$ nicht normal ist, so läßt $R_n(z)$ nach II. in $\mathfrak{U}_\varepsilon$ höchstens zwei Werte aus, und da es stets mehr als vier (sogar unendlich viele) Fixpunkte gibt, kann ich annehmen, daß α_1 und β_1 nicht ausgelassen werden. Dann gibt es in $\mathfrak{U}_\varepsilon$ zwei Punkte z_α und z_β, so daß $R_p(z_\alpha) = \alpha_1$, $R_q(z_\beta) = \beta_1$. Für alle $n \geqq p$ gehört dann offenbar $R_n(z_\alpha)$ zum Zyklus α und ebenso gehört $R_n(z_\beta)$ zum Zyklus β für alle $n \geqq q$. Insbesondere gehört für hinreichend großes n_i $R_{n_i}(z_\alpha)$ und damit $f(z_\alpha)$ zu α, $R_{n_i}(z_\beta)$ und damit $f(z_\beta)$ zu β. Dann wäre aber $|f(z_\alpha) - f(z_\beta)| \geqq \varepsilon$, was nicht geht.

Ich will die wichtigsten Resultate der obigen Untersuchung hier noch einmal zusammenfassen:

Wenn z_0 ein beliebiger Punkt und ζ ein Punkt von $e'(z_0)$ ist, so läßt sich aus der Folge $R_n(z)$ eine Teilfolge $R_{n_i}(z)$ auswählen, welche in z_0 gegen ζ und in $\overline{\mathfrak{F}}$ gegen eine dort überall erklärte und stetige Funktion $g(z)$ konvergiert. In der Umgebung eines Punktes der „trennenden Menge" $\mathfrak{F}$ ist $g(z)$ dagegen unstetig.

Es sei hier gleich bemerkt, daß die analytischen Funktionen, gegen die eine passend ausgewählte Teilfolge $R_{n_\beta}(z)$ in einem ganz in $\overline{\mathfrak{F}}$ enthaltenen Gebiet konvergiert, in allen bisher bekannten Beispielen Konstanten sind; die Folge $R_n(z)$ zerfällt in Teilfolgen, die gegen Konstanten konvergieren.

1) Im Beispiel $R(z) = z^2$ konvergiert z^{2^n} in K_i gegen 0, in K_a gegen ∞.

2) Diese für Julias Fragestellung wichtige Tatsache wird übrigens bei Julia und Fatou erst als Folgerung aus dem tiefer liegenden, bei uns mit (17) bezeichneten Satz formuliert. Vgl. Fatou, Bull. de la soc. math., t. 48, p. 40.

Es drängt sich hier die Frage auf, ob es andere als „stückweise" (d. h. in jedem zusammenhängenden Teilbereich von $\mathfrak{F}$) konstante Grenzfunktionen gibt. Sie ist wahrscheinlich zu verneinen. Da aber eine endgültig klärende Untersuchung hierüber bis jetzt noch von keiner Seite veröffentlicht worden ist[1]), soll auf diese Frage hier nicht eingegangen werden.

Nachdem wir nun die Bedeutung der Menge $\mathfrak{F}$ erkannt haben, wollen wir ihre Eigenschaften näher untersuchen. Ich wiederhole zunächst die Definition:

(1) *$\mathfrak{F}$ ist die Gesamtheit aller Punkte, in denen die Folge $R_n(z)$ nicht normal ist.*

Nach dem, was wir oben gesehen haben, können wir diese Definition ersetzen durch die folgenden:

(2) *$\mathfrak{F}$ ist die Gesamtheit aller Punkte, in denen keine Teilfolge[2]) der $R_n(z)$ normal ist.*

(3) *$\mathfrak{F}$ ist die Gesamtheit aller Punkte, in deren Umgebung keine Teilfolge der $R_n(z)$ gegen eine analytische Funktion konvergiert.*

(4) *$\mathfrak{F}$ ist die Gesamtheit aller Punkte, in deren Umgebung keine Teilfolge der $R_n(z)$ gegen eine stetige Funktion konvergiert.*

Aus (1) folgt mit Hilfe von II:

(5) *Die Folge der Iterierten jeder Umgebung eines Punktes von $\mathfrak{F}$ überdeckt alle Punkte mit höchstens zwei Ausnahmen.*[3])

Wir wollen uns sogleich mit diesen Ausnahmepunkten beschäftigen. Beginnen wir mit dem Fall eines einzigen Ausnahmepunktes P. Dieser darf dann keinen von sich verschiedenen Vorgänger besitzen, da ein Vorgänger eines Ausnahmepunktes offenbar wieder ein Ausnahmepunkt sein muß. Bringen wir den Punkt P durch eine lineare Transformation ins Unendliche, so gibt es keinen endlichen Wert z, für den $R(z) = \infty$ ist, d. h. $R(z)$ hat keinen Pol im Endlichen, ist also ein Polynom.

Eine rationale Funktion, die nur einen Ausnahmepunkt besitzt, ist also wesentlich ein Polynom, d. h. sie läßt sich durch eine lineare Transformation auf eine solche Form bringen.

Ganz ähnlich zeigt man, daß eine rationale Funktion mit 2 Ausnahmepunkten wesentlich von der Form $z^{\pm k}$ ist. (Die beiden Ausnahmepunkte von $z^{\pm k}$ sind 0 und ∞.)

1) Vgl. die Note von G. Julia in den Comptes rendus, t. 168 (1919 I), p. 147—149; P. Fatou, Bull. de la soc. math., t. 48, p. 52—58 (§ 28).

2) Unter einer Teilfolge ist natürlich immer eine unendliche Teilfolge zu verstehen, die auch mit der ursprünglichen Folge identisch sein kann.

3) In unserem Beispiel $R(z) = z^2$ sind 0 und ∞ die beiden Ausnahmepunkte.

Ich bemerke noch, daß die Ausnahmepunkte anziehende Fixpunkte mit dem Multiplikator Null sind und daher zu $\overline{\mathfrak{F}}$ gehören.[1])

Im allgemeinen Falle, d. h. also, wenn $R(z)$ weder auf die Form z^{-k} noch auf die polynomiale Form gebracht werden kann, existieren keine Ausnahmepunkte.

Wir wollen nunmehr beweisen, daß $\mathfrak{F}$ immer existiert.[2])

Wenn $\mathfrak{F}$ nicht existiert, ist $R(z)$ (vom Grade k) überall normal und ich kann insbesondere eine Teilfolge $R_{n_i}(z)$ auswählen, die gegen eine auf der ganzen Riemannschen Kugel meromorphe und damit rationale Funktion $S(z)$ (vom Grade s) konvergiert. Da es mindestens zwei von einander verschiedene Zyklen (irgendwelcher Art) gibt, kann $S(z)$ keine Konstante sein. Ich wähle $p > s$ und betrachte die Folge $R_{n_i-p}(z)$. Eine passende Teilfolge dieser Folge konvergiert gegen eine rationale Funktion $T(z)$ (vom Grade $t > 0$). Dann wäre $R_p(T(z)) = S(z)$. Das geht aber nicht, da der Grad von $R_p(T(z))$ gewiß größer als s ist.

Also:

(6) $\mathfrak{F}$ *existiert immer.*

Es sei hier gleich bemerkt, daß $\mathfrak{F}$ alle abstoßenden und alle rational indifferenten Fixpunkte enthält. Ist $\zeta = R(\zeta)$ ein solcher Punkt, den wir uns der Bequemlichkeit halber in den Nullpunkt transformiert denken, so lautet die Entwicklung von $R(z)$ in der Umgebung von $\zeta = 0$

$$R(z) = a_1 z + a_p z^p + \cdots. \qquad a_p \neq 0$$

Ist nun $|a_1| > 1$, so ist die Folge

$$R_n(z) = a_1^n z^n + \cdots$$

gewiß nicht normal, da $\lim\limits_{n\to\infty} a_1^n = \infty$.

Ist aber $a_1 = 1$, so ist

$$R_n(z) = z + n \cdot a_p z^p + \cdots$$

nicht normal, da nun der zweite Koeffizient mit wachsendem n gegen ∞ strebt. Ebenso schließt man, wenn $a_1^r = 1$ ist.

Als Frucht der soeben gemachten Betrachtungen merken wir also an:

(7) *In einem abstoßenden oder rational indifferenten Fixpunkt ζ ist die Folge $f_n(z)$ einer in der Umgebung von ζ meromorphen Funktion $f(z)$ nicht normal.*

1) Dies gilt nur, wenn, wie vorausgesetzt, $R(z)$ von mindestens zweitem Grade ist. Diese Voraussetzung ist auch weiterhin zu beachten.

2) Fatou benutzt zum Beweis den im vorliegenden Bericht S. 198 abgedruckten algebraischen Hilfssatz.

Man sieht sofort, daß jeder Vorgänger und jeder Nachfolger eines Punktes von $\mathfrak{F}$ wieder zu $\mathfrak{F}$ gehört, also:

(8) $\Big\{$ *$\mathfrak{F}$ ist invariant gegenüber $R(z)$ und gegenüber der Umkehrfunktion $R_{-1}(z)$.*

Daraus folgt sofort auch die Invarianz der Komplementärmenge $\overline{\mathfrak{F}}$, d. h.:

(9) $\Big\{$ *Gehört ein Punkt nicht zu $\mathfrak{F}$, so gehört auch keiner seiner Vorgänger oder Nachfolger zu $\mathfrak{F}$.*

$\overline{\mathfrak{F}}$, die Menge aller Punkte, in denen $R_n(z)$ normal ist, besteht nur aus inneren Punkten; die Menge $\mathfrak{F}$ enthält daher alle ihre Häufungspunkte, d. h.:

(10) *$\mathfrak{F}$ ist abgeschlossen.*

Wir wollen nun beweisen, daß $\mathfrak{F}$ in sich dicht ist, d. h. daß jeder Punkt η von $\mathfrak{F}$ Häufungspunkt von Punkten von $\mathfrak{F}$ ist. Das folgt leicht mit Hilfe von (5) und (8), sobald wir wissen, daß η einen in $e(\eta)$ nicht enthaltenen Vorgänger besitzt.

Wenn η kein Fixpunkt ist, so ist keiner seiner Vorgänger in $e(\eta)$ enthalten.

Ein zu $\mathfrak{F}$ gehöriger Fixpunkt n-ter Ordnung ζ hat mindestens einen, von sich verschiedenen Vorgänger n-ter Ordnung ζ'_{-n}. Andernfalls hätte nämlich $R_n(z) - \zeta = 0$ die Doppelwurzel ζ, und es wäre $R'_n(\zeta) = 0$. Dann wäre aber ζ anziehender Fixpunkt und könnte nicht zu $\mathfrak{F}$ gehören. ζ'_{-n} ist von allen Punkten des zu ζ gehörigen Zyklus verschieden; denn aus

$$\zeta'_{-n} = \zeta_\nu \neq \zeta$$

würde sofort durch n-fache Iteration

$$R_n(\zeta'_{-n}) = R_n(\zeta_\nu),$$

also

$$\zeta = \zeta_\nu \quad \text{folgen.}$$

η hat also einen, nicht in $e(\eta)$ enthaltenen Vorgänger η^*. Da η^* wegen (8) Punkt von $\mathfrak{F}$ und daher kein Ausnahmepunkt ist, häufen sich nach (5) seine (sämtlich von η verschiedenen) Vorgänger in η. Diese Vorgänger sind aber (wegen (8)) Punkte von $\mathfrak{F}$. Also:

(11) *$\mathfrak{F}$ ist in sich dicht.*

Eine Menge heißt bekanntlich perfekt, wenn sie abgeschlossen und zugleich in sich dicht ist. Wir können also, (10) und (11) zusammenfassend, sagen:

(12) *$\mathfrak{F}$ ist perfekt.*

Daraus folgt insbesondere, wie man aus der Mengenlehre weiß, daß $\mathfrak{F}$ von der Mächtigkeit des Kontinuums ist.

Wenn sich die Vorgänger aller Punkte mit höchstens zwei Ausnahmen in einem Punkt P häufen, so gibt es insbesondere Punkte von $\mathfrak{F}$, deren Vorgänger sich in P häufen, und P gehört daher (wegen (8) und (10)) selbst zu $\mathfrak{F}$. Die Umkehrung (vgl. (5)) ist schon bewiesen; wir können also sagen:

(13) *Ein Punkt gehört dann und nur dann zu $\mathfrak{F}$, wenn es höchstens zwei Ausnahmepunkte gibt, deren Vorgänger sich nicht in ihm häufen.*

Oder auch:

(14) *Notwendig und hinreichend dafür, daß ein Punkt zu $\mathfrak{F}$ gehört, ist, daß die Folge der Iterierten einer beliebig kleinen Umgebung des Punktes alle Punkte mit höchstens zwei Ausnahmen überdeckt.*

Oder auch:

(15) *$\mathfrak{F}$ besteht aus allen Punkten, in deren Umgebung die Folge der $R_n(z)$ höchstens zwei Werte ausläßt.*

Wir wollen uns nun, ehe wir die Untersuchung von $\mathfrak{F}$ fortsetzen, etwas mit den Punkten beschäftigen, die nicht zu $\mathfrak{F}$ gehören.

Wir betrachten zunächst einen anziehenden Fixpunkt erster Ordnung ζ. Es ist, wie wir schon wissen, in einem hinreichend kleinen Kreise Γ um ζ

$$|R(z) - \zeta| < \varkappa \cdot |z - \zeta| \qquad \varkappa < 1$$

und daher auch

$$|R_\nu(z) - \zeta| < \varkappa^\nu \cdot |z - \zeta|,$$

d. h. die Folge $R_n(z)$ konvergiert in Γ gleichmäßig gegen die konstante Grenzfunktion ζ. ζ gehört also zu $\overline{\mathfrak{F}}$.

Alle Punkte, die mit ζ durch einen polygonalen Zug verbindbar sind, der keine Punkte von $\mathfrak{F}$ enthält, bilden den Bereich $\mathfrak{A}^*$. Ich behaupte nun, daß sich die Nachfolger aller Punkte von $\mathfrak{A}^*$ in ζ und nur in ζ häufen. Sei z_0 irgendein Punkt in $\mathfrak{A}^*$, ζ_1 ein Punkt, in dem sich die Nachfolger von z_0 häufen. Ich behaupte, daß $\zeta_1 = \zeta$ ist. Das ist aber klar. Da die Folge $R_n(z)$ in $\mathfrak{A}^*$ normal ist, kann ich aus ihr eine Teilfolge $R_{n_i}(z)$ auswählen, die in z_0 gegen ζ_1 und in ganz $\mathfrak{A}^*$ gegen eine meromorphe Funktion $f(z)$ konvergiert. $f(z)$ ist aber in einer hinreichend kleinen Umgebung von ζ gewiß identisch gleich ζ und daher als meromorphe Funktion in ganz $\mathfrak{A}^*$ identisch gleich ζ. Also ist $\zeta_1 = \zeta$.

$\mathfrak{A}^*$ heißt der *unmittelbare Anziehungsbereich* des Fixpunktes ζ. Wir wollen den Tatbestand, daß die Nachfolger aller Punkte von $\mathfrak{A}^*$ gegen ζ konvergieren, auch so ausdrücken:

Alle Punkte des unmittelbaren Anziehungsbereiches $\mathfrak{A}^*$ eines Fixpunktes werden von diesem angezogen.

Wenn ζ ein Fixpunkt n-ter Ordnung ist, gilt für seine $\mu \cdot n$-ten Nachfolger genau dasselbe, was wir soeben für alle Nachfolger eines Fixpunktes erster Ordnung bewiesen haben. Denn ζ ist ja Fixpunkt erster Ordnung der Funktion $R_n(z)$. Was tun aber die andern Nachfolger von ζ? Diese Frage wollen wir jetzt beantworten.

Wir wissen schon, daß der Nachfolger eines Fixpunktes wieder ein Fixpunkt ist.

Wir haben ferner, da $R_n'(z) = [R_{n-1}(R(z))]' = R_{n-1}'(R(z)) \cdot R'(z)$ usw.

$$R_n'(\zeta) \;= R'(\zeta) \cdot R'(\zeta_1) \ldots R'(\zeta_{n-1})$$
$$R_n'(\zeta_1) = R'(\zeta_1) \cdot \ldots\ldots\ldots R'(\zeta_n).$$

Beide Ausdrücke unterscheiden sich nur durch die Reihenfolge ihrer Faktoren, da $\zeta = \zeta_n$ ist. Also:

(16) *Alle Nachfolger eines Fixpunktes sind Fixpunkte und besitzen denselben Multiplikator wie dieser.*

Streben die n_i-ten Nachfolger eines beliebigen Punktes gegen ζ, so streben offenbar seine $(n_i + \nu)$-ten Nachfolger gegen $R_\nu(\zeta)$.

Haben wir nun einen Zyklus n-ter Ordnung von $R(z)$, und ist ζ ein Fixpunkt desselben, so ist ζ Fixpunkt erster Ordnung von $R_n(z)$ und wir können auf ihn alle Sätze anwenden, die für Fixpunkte erster Ordnung gelten. Ist $\mathfrak{A}^*$ z. B. sein unmittelbarer Anziehungsbereich, so besteht der unmittelbare Anziehungsbereich des Zyklus aus $\mathfrak{A}^*$ und seinen $n - 1$ Nachfolgern.[1]) Die Punkte im unmittelbaren Anziehungsbereich $\mathfrak{A}_n^*$ eines anziehenden Zyklus n-ter Ordnung häufen sich in allen n Punkten des Zyklus und nur in diesen. Die Folge $R_n(z)$ läßt sich in n Teilfolgen zerlegen, die in $\mathfrak{A}_n^*$ gleichmäßig gegen je einen Punkt des Zyklus konvergieren; wir wollen sagen, $R_n(z)$ konvergiere in $\mathfrak{A}_n^*$ gleichmäßig gegen den Zyklus.

Ein einfaches Beispiel bietet die Funktion $R(z) = \frac{1}{z^2}$. Die anziehenden Fixpunkte 2. Ordnung 0 und ∞ bilden zusammen einen anziehenden Zyklus 2. Ordnung. Sein unmittelbarer Anziehungsbereich besteht aus allen Punkten im Innern und Äußern des Einheitskreises. Die Nachfolger eines Punktes z, der nicht auf dem Einheitskreis liegt ($z \neq 1$), streben gegen die beiden Punkte des Zyklus, 0 und ∞, und nur gegen diese. Die Menge $\mathfrak{F}$ besteht, wie beim Beispiel $R(z) = z^2$, aus allen Punkten, deren absoluter Betrag gleich 1 ist.

---

1) Ein „Anziehungsbereich" ist also im allgemeinen kein Gebiet, sondern eine Menge von Gebieten. Der unmittelbare Anziehungsbereich eines Zyklus n-ter Ordnung besteht aus n, der totale im allgemeinen aus abzählbar unendlich vielen von einander getrennten Gebieten.

Der unmittelbare Anziehungsbereich $\mathfrak{A}^*$ eines Zyklus ist übrigens nicht notwendig identisch mit dem (totalen) Anziehungsbereich $\mathfrak{A}$.[1]) Dieser enthält alle Punkte, deren Nachfolger sich in den Punkten des Zyklus häufen; er ist die Gesamtheit der Vorgänger aller Punkte von $\mathfrak{A}^*$ oder auch die Gesamtheit der Vorgänger von $\mathfrak{A}^*$. Das gilt, wie alle Sätze über Zyklen, auch für einen einfachen Zyklus, d. h. für einen Fixpunkt 1. Ordnung. Wir werden solche Beispiele kennen lernen.

Bevor wir in der Untersuchung von $\mathfrak{F}$ fortfahren, will ich noch einiges über die indifferenten Fixpunkte berichten. Während bei den anziehenden Fixpunkten alle Punkte einer gewissen Umgebung angezogen und ebenso bei den abstoßenden Fixpunkten abgestoßen werden, gibt es bei den rational indifferenten Fixpunkten in jeder Umgebung sowohl Punkte, die angezogen, als auch solche, die abgestoßen werden.

Sei $R(\alpha) = \alpha$, $R'(\alpha) = 1$. (Für $R(z) = z + z^2$ ist z. B. der Nullpunkt ein solcher Punkt.) Punkte dieser Art hat zuerst Leau[2]) näher untersucht. Wir wollen die wichtigsten Resultate hier anführen.

I. In jeder Umgebung eines Punktes α gibt es Gebiete (Anziehungsbereiche) $\mathfrak{B}$ von folgender Art:
   1. α ist Randpunkt von $\mathfrak{B}$.
   2. Ist z_0 ein Punkt von $\mathfrak{B}$, so liegt $R(z_0)$ ebenfalls in $\mathfrak{B}$, und zwar strebt die Folge $R_n(z_0)$ gegen α.

II. In jeder Umgebung eines Punktes α gibt es Gebiete (Abstoßungsbereiche) $\mathfrak{B}^*$ von folgender Art:
   1. α ist Randpunkt von $\mathfrak{B}^*$.
   2. Ist z_0 ein Punkt von $\mathfrak{B}^*$ und bedeutet $\widetilde{R}_{-n}(z)$ denjenigen Zweig von $R_{-n}(z)$ (der Umkehrfunktion von $R_n(z)$), für den $\widetilde{R}_{-n}(\alpha) = \alpha$ ist, so liegt $\widetilde{R}_{-n}(z_0)$ ebenfalls in $\mathfrak{B}^*$, und zwar strebt die Folge $\widetilde{R}_{-n}(z_0)$ gegen α.

III. Es lassen sich immer endlich viele Gebiete $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^*$ finden, deren Punkte mit α eine Umgebung $\mathfrak{L}_{\mathfrak{U}}$ von α bilden, die ganz in einer vorgegebenen Umgebung $\mathfrak{U}$ von α liegt, d. h. in jeder Umgebung $\mathfrak{U}$ von α läßt sich eine passend geformte Umgebung $\mathfrak{L}_{\mathfrak{U}}$ so angeben, daß für jeden Punkt z_0 dieser Umgebung entweder die $R_n(z_0)$ oder die $\widetilde{R}_{-n}(z_0)$ gegen α konvergieren, ohne $\mathfrak{L}_{\mathfrak{U}}$ zu verlassen.

Satz I und III gilt auch für anziehende, II und III für abstoßende Fixpunkte $\zeta = R(\zeta)$.

1) Siehe die Fußnote [1]) der vorhergehenden Seite.

2) L. Leau, Étude sur les équations fonctionnelles, Annales de la faculté des Sciences de Toulouse, t. XI (1897).

Das Entsprechende gilt für indifferente Zyklen beliebiger Ordnung, deren Multiplikator eine Einheitswurzel ist.

Auf die Beweise der vorstehenden Resultate will ich hier nicht eingehen, ebensowenig auf die indifferenten Fixpunkte, deren Multiplikator keine Einheitswurzel ist.

Wir wollen uns nun wieder der Betrachtung von $\mathfrak{F}$ zuwenden. Zunächst werde ich folgenden wichtigen Satz beweisen, der uns bei der Untersuchung der Struktur von $\mathfrak{F}$ entscheidende Dienste leisten wird:

(17) *Es sei D eine Umgebung eines Punktes η von $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{Q}$ eine beliebige, abgeschlossene Punktmenge, die keinen Ausnahmepunkt enthält. Es gibt eine Iterierte D_m von D, die $\mathfrak{Q}$ völlig überdeckt.*

η sei zunächst ein abstoßender Fixpunkt n-ter Ordnung. Jedes hinreichend kleine D ist sicher ganz in seinem Nachfolger D_n enthalten. Dann ist aber auch D_n ganz in D_{2n} enthalten, weil alle Bildpunkte von D erst recht Bildpunkte von D_n sind. Wir haben also

$$D < D_n < D_{2n} < D_{3n} < \cdots.$$

Außerdem wissen wir, daß jeder Punkt von $\mathfrak{Q}$ in einem $D_{\nu n}$ enthalten ist. Nach dem Heine-Borelschen Theorem überdecken dann bereits endlich viele $D_{\nu n}$ die ganze Menge $\mathfrak{Q}$. Ich betrachte eine solche endliche Menge von $D_{\nu n}$ und wähle darunter dasjenige mit dem höchsten Index. Dieses überdeckt dann allein bereits die Menge $\mathfrak{Q}$. Damit ist (17) für einen abstoßenden Fixpunkt bewiesen.

Etwas mühsamer ist der Beweis, wenn α ein rational indifferenter Fixpunkt erster Ordnung ist. Dann müssen wir die Leauschen Ergebnisse benutzen. Sei $\beta \neq \alpha$ ein Punkt von $\mathfrak{F}$, der nicht in D enthalten ist. Die Vorgänger von β häufen sich in α, d. h. in $\mathfrak{L}_D$ liegen Vorgänger von β. Da diese aber unmöglich in einem Anziehungsbereich $\mathfrak{B}$ liegen können (denn die Nachfolger eines Punktes von $\mathfrak{B}$ verlassen ja D nicht), so müssen sie in einem Abstoßungsbereich $\mathfrak{B}^*$ liegen. $\mathfrak{B}^*$ ist aber in seinem Nachfolger enthalten. Es ist also

$$\mathfrak{B}^* < \mathfrak{B}_1^* < \mathfrak{B}_2^* < \cdots\cdots$$

Die Folge $\mathfrak{B}_n^*$ enthält von einem genügend hohen Index an eine Umgebung von β, sie überdeckt also ganz $\mathfrak{Q}$, und ich kann wieder ebenso wie oben schließen, daß es bereits ein $\mathfrak{B}_p^*$ gibt, das $\mathfrak{Q}$ überdeckt. Da $\mathfrak{B}^* < D$, wird $\mathfrak{Q}$ für genügend große p von D_p erst recht überdeckt, was zu beweisen war.

Elementare Betrachtungen algebraischer Art, die ich hier, um Platz zu sparen, übergehe, zeigen, daß $R(z)$ (vom Grade $k \geqq 2$) mindestens einen Fixpunkt $\zeta = R(\zeta)$ besitzt, der entweder der Bedingung $|R'(\zeta)| > 1$

oder aber der Bedingung $R'(\zeta) = 1$ genügt.[1]) Ist nun η ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{F}$ und D eine beliebige Umgebung, so überdeckt eine passend gewählte Iterierte D_n gewiß entweder einen abstoßenden oder einen Leauschen Fixpunkt erster Ordnung und eine hinreichend kleine Umgebung $\mathfrak{U}$ desselben, und da $\mathfrak{U}_l$ bereits $\mathfrak{D}$ überdeckt, so tut es D_{n+l} erst recht.

(17) ist damit vollständig bewiesen.[2])

Aus Satz (17) folgern wir weiter unmittelbar eine interessante Eigenschaft von $\mathfrak{F}$. Es sei G ein Gebiet, das mindestens einen Punkt von $\mathfrak{F}$ enthält, $\mathfrak{F}^*$ sein Durchschnitt mit $\mathfrak{F}$. Es existiert (nach 17) eine Iterierte G_m von G, die $\mathfrak{F}$ ganz enthält. $R_m(z)$ bildet also $\mathfrak{F}^*$ auf $\mathfrak{F}$ ab. Die Bildmenge $\mathfrak{F}$ besitzt also alle diejenigen Eigenschaften von $\mathfrak{F}^*$, die eine Abbildung durch eine rationale Funktion bewahrt, sie hat, wie wir sagen wollen, die gleiche Struktur wie $\mathfrak{F}^*$. In diesem Sinne gilt:

(18) *$\mathfrak{F}$ hat in allen Teilen gleiche Struktur.*

Sind z. B. alle Punkte von $\mathfrak{F}^*$ „verkettet"[3]), so gilt das auch für $\mathfrak{F}$. Für die Struktur von $\mathfrak{F}$ gibt es also folgende Möglichkeiten:

a) $\mathfrak{F}$ enthält keinen inneren Punkt.

1. alle Punkte von $\mathfrak{F}$ sind verkettet, d. h. $\mathfrak{F}$ ist „kontinuierlich". Beispiel: $R(z) = z^2$.

2. Verkettete Punkte existieren in $\mathfrak{F}$ nicht, d. h. $\mathfrak{F}$ ist „völlig diskontinuierlich". Es ist aus der Mengenlehre bekannt, daß eine Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums, insbesondere eine perfekte Menge, sehr wohl „völlig diskontinuierlich" sein kann. Beispiel: $R(z) = \frac{z}{2 + z + z^3}$.[4])

3. $\mathfrak{F}$ enthält in jeder Umgebung jedes ihrer Punkte verkettete und unverkettete Punkte.

Auch dieser Fall kommt wirklich vor.[5])

---

1) Den ausführlichen Beweis findet man bei Julia, Journ. de math. (1918), p. 84 u. 85. Da sich die Existenz abstoßender Fixpunkte später aus einem von (17) unabhängigen Satz (25) ergeben wird, kann der Beweis der obigen Behauptung hier um so leichter unterdrückt werden.

2) Es ergibt sich sogar, daß $\mathfrak{D}$ von jeder hinreichend hohen Iterierten D_m $(m > m_0)$ überdeckt wird.

3) Zwei Punkte P und Q einer Menge $\mathfrak{M}$ sind „verkettet", wenn es zu jeder positiven Zahl ε einen P mit Q verbindenden polygonalen Zug $\mathfrak{P}(\varepsilon)$ gibt, dessen Ecken sämtlich zu $\mathfrak{M}$ gehören und dessen Seiten kleiner als ε sind.

4) Fatou, Bull. de la soc. math., t. 48, p. 86.

5) Vgl. z. B. Julia, Journal de Math. (1918), p. 181—186, Fatou, Bull. de la soc. math., t. 48, p. 87.

b) $\mathfrak{F}$ enthält einen inneren Punkt.

In diesem Falle muß $\mathfrak{F}$ die ganze Ebene enthalten. Sei nämlich P ein innerer Punkt von $\mathfrak{F}$, d. h. ein Punkt, dessen Umgebung zu $\mathfrak{F}$ gehört. Die Vorgänger aller Punkte mit höchstens zwei Ausnahmen häufen sich (nach (13)) in P und gehören daher zu $\mathfrak{F}$. Es gehören also fast alle Punkte und damit (nach 10) alle Punkte zu $\mathfrak{F}$.

Dieser Fall kann in der Tat eintreten, wie Lattès[1]) gezeigt hat:

Sei $\wp(u)$ die Weierstraßsche $\wp$-Funktion. Zwischen $\wp(u)$ und $\wp(2u)$ besteht bekanntlich eine rationale Beziehung, nämlich

$$\wp(2u) = R(\wp(u)) = \frac{(\wp^2(u)+1)^2}{4\wp(u)(\wp^2(u)-1)}.$$

Wir setzen $u = 2\omega_1 v_1 + 2\omega_2 v_2$, wobei $2\omega_1$ und $2\omega_2$ die beiden Perioden von $\wp(u)$ sind. v_1 und v_2 sind reelle Zahlen, die ich mir im dyadischen System (Zahlensystem mit der Basis 2) geschrieben denke. Es sei

$$v_1 = a, \overline{a_1 \ldots a_r}$$
$$v_2 = b, \overline{b_1 \ldots b_s},$$

d. h. v_1 habe eine $r$stellige, v_2 eine $s$stellige Periode. Ich wähle nun $n = r \cdot s$. Dann unterscheiden sich u und $2^n u$ hinter dem Komma nicht mehr von einander, also nur noch um ganze Vielfache von $2\omega_1$ und $2\omega_2$. Es ist daher $\wp(u) = \wp(2^n u)$, d. h. $z = \wp(u)$ ist ein Fixpunkt von $R_n(z)$. Die Punkte u dieser Art liegen überall dicht im Periodenparallelogramm. $\wp(u)$ ist stetig und nimmt im Periodenparallelogramm alle Werte an, also liegen auch die zugehörigen Fixpunkte $\wp(u) = z$ in der z-Ebene überall dicht. Sie sind zudem abstoßende Fixpunkte, da

$$\frac{dR_n(z)}{dz} = \frac{d\wp(2^n u)}{d\wp(u)} = 2^n \cdot \wp'(2^n u)\frac{du}{d\wp(u)} = 2^n \cdot \frac{\wp'(2^n u)}{\wp'(u)} = 2^n > 1.$$

$\mathfrak{F}$ ist also (wegen (7) und (10)) die ganze Ebene.

Das vorliegende Beispiel zeigt, daß anziehende Zyklen nicht immer vorhanden sind. Läßt sich nun für ihre Anzahl eine obere Schranke angeben? Diese Frage beantwortet der folgende Satz:

(19) *Im unmittelbaren Anziehungsbereich $\mathfrak{A}^*$ eines anziehenden Zyklus liegt mindestens ein Windungspunkt der Umkehrfunktion $R_{-1}(z)$.*

Beweis: $\mathfrak{U}$ sei eine hinreichend kleine, in $\mathfrak{A}^*$ liegende Umgebung von α, $R^*_{-1}(z)$ der durch die Bedingung $R^*_{-1}(\alpha) = \alpha$ gekennzeichnete Zweig von $R_{-1}(z)$. Wenn $R_{-1}(z)$ in $\mathfrak{A}^*$ keinen Windungspunkt hätte, so wäre $R^*_{-1}(z)$, $R^*_{-1}[R^*_{-1}(z)] = R^*_{-2}(z)$ und allgemein $R^*_{-1}[R^*_{n-1}(z)] = R^*_{-n}(z)$

1) Comptes rendus, séance du 7 janvier 1918, t. 166 p. 28.

in $\mathfrak{U}$ meromorph; die Folge $R^*_{-n}(z)$ wäre also eine Folge in $\mathfrak{U}$ meromorpher Funktionen, und sie wäre dort auch normal, da sie gewiß mehr als drei Punkte ausläßt (z. B. alle Punkte von $\mathfrak{F}$). Das geht aber nicht wegen (7), da die Punkte eines anziehenden Zyklus von $R(z)$ für $R^*_{-1}(z)$ abstoßende Fixpunkte sind.

Wir können also sagen:

(20) *Die Zahl der anziehenden Zyklen, die zu einer rationalen Funktion $R(z)$ gehören, ist endlich und zwar höchstens gleich der Zahl der Windungspunkte der Umkehrfunktion $R_{-1}(z)$.*

Hier sei noch folgender Satz erwähnt[1]):

(21) *Konvergiert eine Folge $R_{n_i}(z)$ in einem Bereich D gegen eine Konstante a, so enthält jede Umgebung des Punktes a Nachfolger eines Windungspunktes von $R_{-1}(z)$.*

Fatou hat bewiesen[2]), daß auch die Zahl der indifferenten Fixpunkte endlich ist. Indem er die rationale Funktion $R(z)$ vom Grade k, die mindestens N indifferente Zyklen besitzt, etwas abändert, erhält er eine rationale Funktion $R^*(z)$, die ebenfalls vom Grade k ist und mindestens $\frac{N}{2}$ anziehende Zyklen hat.

Man betrachte die Funktion $R(z, t) = (1 - t)R(z) + t \cdot z^2$. Es sei α ein indifferenter Fixpunkt n-ter Ordnung, also eine Wurzel der Gleichung $R_n(\alpha) = \alpha$, wobei $|R_n'(\alpha)| = 1$.

Die Funktionalgleichung

$$F(z, t) = R_n(z, t) - z = 0$$

besitzt eine Lösung $\alpha(t)$, die im Punkte $t = 0$ den Wert α annimmt. Wenn insbesondere

$$\left(\frac{\partial F(z, 0)}{\partial z}\right)_{z = \alpha} = R_n'(\alpha) - 1 \neq 0,$$

d. h., wenn der Multiplikator des Fixpunktes nicht genau gleich 1 ist, so ist das zugehörige Funktionselement der Lösung im Punkte $t = 0$ regulär, andernfalls hat es dort einen algebraischen Windungspunkt. $\alpha(t)$ ist algebraisch, da $F(z, t)$ rational ist.

Zu $\alpha(t)$ gehört der Zyklus $\alpha(t), R[\alpha(t), t], \ldots, R_{n-1}[\alpha(t), t]$, der für $t = 0$ in den Zyklus $\alpha, R(\alpha), \ldots, R_{n-1}(\alpha)$ übergeht. Der Multiplikator eines Punktes des Zyklus ist:

$$\left[\frac{\partial R_n(z, t)}{\partial z}\right]_{z = \alpha(t)} = s(t) \qquad |s(0)| = |R_n'(\alpha)| = 1.$$

---

1) Auch dieser Satz läßt sich ohne besondere Mühe beweisen. Fatou, Bull. de la soc. math., t. 48, p. 60, 61.

2) loc. cit. § 30.

$s(t)$ ist gewiß keine Konstante; denn sie ist eine (in der ganzen t-Ebene erklärte) algebraische Funktion von t, die an der Stelle $t = 1$ keinen Wert vom absoluten Betrage 1 annimmt, da $R(z, 1) = z^2$ keine indifferenten Zyklen besitzt.

Zu jedem indifferenten Zyklus α_ν, $R(\alpha_\nu)\ldots$ von $R(z)$ gehört so eine nicht konstante, algebraische Funktion $s_\nu(t)$, der Multiplikator des Zyklus $\alpha_\nu(t)$, $R[\alpha_\nu(t), t]\ldots$ der Funktion $R(z, t)$.

Das Verlangte ist gezeigt, wenn folgender Hilfssatz bewiesen ist:

„*Man habe N (nicht konstante) Funktionselemente algebraischen Charakters*[1] $E_1(t)$, $E_2(t)$, $\ldots$, $E_N(t)$, *deren zum Nullpunkt gehörige Funktionswerte* $E_1(0)$, $E_2(0)$, $\ldots$, $E_N(0)$ *auf dem Einheitskreis liegen. Man kann einen, dem Nullpunkt beliebig nahe liegenden Wert t' finden, so daß mindestens die Hälfte der Punkte* $E_1(t')$, $E_2(t')$, $\ldots$, $E_N(t')$ *im Innern des Einheitskreises liegt.*“

Der Bequemlichkeit halber führe ich zunächst durch eine passende lineare Transformation L, die das Innere des Einheitskreises auf die obere Halbebene abbildet, die Funktionselemente $E_\nu(t)$ in Funktionselemente $L(E_\nu(t))$ vom gleichen Charakter über, wobei ich L so wähle, daß kein $L(E_\nu(t))$ ins Unendliche fällt. Es ist dann zu zeigen, daß sich ein beliebig kleines t' angeben läßt, für das mindestens $\frac{N}{2}$ der $L(E_\nu(t'))$ in der oberen Halbebene liegen, d. h. einen positiven Imaginärteil besitzen.

Die Funktionselemente $L(E_\nu(t))$ $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$ seien gegeben durch die Potenzreihen

$$L(E_\nu(t)) - L(E_\nu(0)) = K_\nu \cdot t^{\frac{p_\nu}{l}} + \cdots, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N)$$

wobei K_ν eine von Null verschiedene Konstante, p_ν und l (der von ν unabhängige, gemeinsame Nenner der $\frac{p_\nu}{l}$) ganze Zahlen bedeuten.

Es genügt zu zeigen, daß für ein passendes $t_0 = \varrho_0 \cdot e^{i\vartheta_0}$ mindestens die Hälfte der $P^{(\nu)}(t_0) = K_\nu \cdot t_0^{\frac{p_\nu}{l}}$ einen positiven Imaginärteil besitzt; dann liegt für hinreichend kleines $t' = \varrho' \cdot e^{i\vartheta_0}$, $\varrho' < \varrho_0$ auch mindestens die Hälfte der $L(E_\nu(t'))$ in der oberen Halbebene.

2^q sei die höchste Potenz von 2, die in einem der p_ν enthalten ist. Zur Abkürzung sollen diejenigen $K_\nu \cdot t^{\frac{p_\nu}{l}}$, deren p_ν durch 2^r, aber nicht durch 2^{r+1} teilbar ist[2]), mit $P_r^{(\nu)}$ bezeichnet werden.

1) d. h. Funktionselemente, die sich nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von t entwickeln lassen.

2) Man hat also $p_\nu = 2^r \cdot u_\nu$, u_ν ungerade.

Wir wählen nun ein hinreichend kleines t^*, das außerdem der Bedingung genügt, daß keiner der Werte $P_r^{(\nu)}(t^{**})$ für $0 \leqq r \leqq q$, $t^{**} = t^* \cdot e^{\frac{i\pi l n}{2^q}}$, wobei n ganz und $0 \leqq n \leqq 2^{q+1}$ ist, auf der reellen Achse liegt. Dann liegt immer entweder von den $P_r^{(\nu)}(t^{**})$ oder von den $-P_r^{(\nu)}(t^{**})$ mindestens die Hälfte in der oberen Halbebene.

Wir betrachten zunächst alle $P_q^{(\nu)}(t^*)$. Liegt bereits mindestens die Hälfte der $P_q^{(\nu)}(t^*)$ in der oberen Halbebene, so setze ich $t_q = t^*$, andernfalls soll $t_q = t^* \cdot e^{\frac{i\pi l}{2^q}}$ sein. Dann wird

$$P_q^{(\nu)}(t_q) = K_\nu \cdot t_q^{\frac{2^q u_\nu}{l}} = K_\nu \cdot t^{*\frac{2^q u_\nu}{l}} \cdot e^{i\pi} = -P_q^{(\nu)}(t^*).$$

Ich kann also t_q so wählen, daß mindestens die Hälfte der $P_q^{(\nu)}(t_q)$ einen positiven Imaginärteil besitzt.

Ich nehme nun an, es gäbe ein passendes t_{r+1}, so daß bereits mindestens die Hälfte der $P_s^{(\nu)}(t_{r+1})$ $q \geqq s \geqq r+1$ in der oberen Halbebene liegt. Wenn dies auch noch für $s = r$ gilt, setze ich $t_r = t_{r+1}$, andernfalls sei $t_r = t_{r+1} \cdot e^{\frac{i\pi l}{2^r}}$. Dann wird

$$P_s^{(\nu)}(t_r) = K_\nu \cdot t_r^{\frac{2^s u_\nu}{l}} = P_s^{(\nu)}(t_{r+1}) \cdot e^{i\pi 2^{s-r}},$$

d. h.
$$P_s^{(\nu)}(t_r) = P_s^{(\nu)}(t_{r+1}) \quad \text{für} \quad q \geqq s \geqq r+1,$$

während
$$P_r^{(\nu)}(t_r) = -P_r^{(\nu)}(t_{r+1}) \quad \text{wird.}$$

Es liegen also mindestens die Hälfte der $P_s^{(\nu)}(t_r)$ $q \geqq s \geqq r$ in der oberen Halbebene.

Hieraus folgt mittels vollständiger Induktion die Existenz eines Wertes t_0, für den mindestens die Hälfte der $P_s^{(\nu)}(t_0)$ $q \geqq s \geqq 0$, d. h. mindestens die Hälfte aller $P^{(\nu)}(t_0)$ in der oberen Halbebene liegt. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Wir können also ein hinreichend kleines t' finden, so daß für mindestens die Hälfte der Funktionen $s_\nu(t)$, deren $s_\nu(0)$ auf dem Einheitskreis liegen, $|s_\nu(t')| < 1$ ist. Die Funktion $R(z, t') = R^*(z)$ ist eine rationale Funktion vom k-ten Grade, die mindestens $\frac{N}{2}$ anziehende Zyklen besitzt. Da sie andererseits höchstens so viel anziehende Zyklen besitzen kann, als ihre Umkehrfunktion Windungspunkte, d. h. höchstens $2(k-1)$, so folgt $N \leqq 4(k-1)$. Da überdies die anziehenden Zyklen von $R(z)$ ebenfalls in anziehende Zyklen von $R^*(z)$ übergehen, kann die Zahl der anziehenden und indifferenten Zyklen zusammen die Schranke $4(k-1)$ nicht übersteigen.

So haben wir also den wichtigen Satz:

(22) *Die Zahl der anziehenden und indifferenten Zyklen ist endlich.*

Wir wollen nun noch eine interessante Eigenschaft von $\mathfrak{F}$ beweisen, nämlich:

(23) *Jeder Punkt von $\mathfrak{F}$ ist Häufungspunkt von Fixpunkten.*

Der Beweis beruht wieder auf dem Montelschen Satze. η sei ein Punkt von $\mathfrak{F}$, und zwar wollen wir der Bequemlichkeit halber annehmen, daß η im Endlichen liegt und weder ein Pol noch ein Windungspunkt von $R_{-2}(z)$ [der Umkehrfunktion von $R_2(z)$] ist. [Wir schließen also zunächst endlich viele Punkte von der Betrachtung aus.] In einer hinreichend kleinen Umgebung $\mathfrak{U}$ von η sind dann die k^2 Zweige der Funktion $R_{-2}(z)$ ($k^2 \geqq 4$) regulär, beschränkt und überall untereinander verschieden. Wir betrachten 3 solche Zweige $R_{-2}^{(1)}(z)$, $R_{-2}^{(2)}(z)$, $R_{-2}^{(3)}(z)$. Wenn nun keine der Gleichungen $R_n(z) - z = 0$ in $\mathfrak{U}$ erfüllt wäre, d. h. wenn es in $\mathfrak{U}$ keine Fixpunkte gäbe, so würden erst recht die drei Ausdrücke

$$R_n(z) - R_{-2}^{(1)}(z), \quad R_n(z) - R_{-2}^{(2)}(z), \quad R_n(z) - R_{-2}^{(3)}(z)$$

in $\mathfrak{U}$ nirgends Null.

Keine Funktion

$$\varphi_n(z) = \frac{R_n(z) - R_{-2}^{(1)}(z)}{R_n(z) - R_{-2}^{(2)}(z)} \cdot \frac{R_{-2}^{(3)}(z) - R_{-2}^{(2)}(z)}{R_{-2}^{(3)}(z) - R_{-2}^{(1)}(z)}$$

nähme dann in $\mathfrak{U}$ die Werte 0, 1 und ∞ an, und die Folge der φ_n wäre daher wegen II in $\mathfrak{U}$ normal. Dann wäre aber auch

$$R_n(z) = R_{-2}^{(2)}(z) + Q(z) \cdot \frac{R_{-2}^{(2)}(z) - R_{-2}^{(1)}(z)}{\varphi_n(z) - Q(z)}, \qquad Q(z) = \frac{R_{-2}^{(3)}(z) - R_{-2}^{(2)}(z)}{R_{-2}^{(3)}(z) - R_{-2}^{(1)}(z)}$$

normal, was nicht geht. Wir haben also bewiesen, daß in jeder Umgebung fast aller Punkte von $\mathfrak{F}$ (d. h. aller bis auf endlich viele) mindestens ein Fixpunkt liegt, und daraus folgt, weil $\mathfrak{F}$ in-sich dicht ist, daß jeder Punkt von $\mathfrak{F}$ Häufungspunkt von Fixpunkten ist.

Umgekehrt ist jeder Häufungspunkt von Fixpunkten wegen (22) Häufungspunkt von abstoßenden Fixpunkten und daher (wegen (7) und (10)) Punkt von $\mathfrak{F}$, also:

(24) *$\mathfrak{F}$ ist die Ableitung der Menge aller Fixpunkte.*

Oder auch (wegen 22):

(25) *$\mathfrak{F}$ ist die Ableitung der Menge aller abstoßenden Fixpunkte.* [1])

1) Daraus folgt wegen (6) insbesondere die Existenz abstoßender Fixpunkte, von der wir beim Beweise von (25) keinen Gebrauch gemacht haben. Auch Satz (17) haben wir nicht benutzt; dieser Satz folgt nunmehr leicht aus (25), da er ja für abstoßende Fixpunkte unschwer zu beweisen ist.

Während nun bei Fatou, dessen Darstellung wir bis jetzt im wesentlichen gefolgt sind, (25) nur als einfache Konsequenz der übrigen Sätze erscheint und zum eigentlichen Aufbau der Theorie nicht benötigt wird, errichtet Julia jene Theorie gerade auf dem Fundament (25): Er geht von der Ableitung E' der Menge E aller abstoßenden Fixpunkte aus und untersucht ihre Eigenschaften. Wir wollen diesen Weg im folgenden kurz skizzieren.

Dann werden wir zunächst die Existenz von E' beweisen. Diese Existenz ist hier sehr wichtig, auf ihr beruhen die fundamentalsten Sätze. Der Existenzbeweis ist nicht einfach (im Gegensatz zum Existenzbeweis von $\mathfrak{F}$); die Mittel dazu liefert uns der Montelsche Satz zusammen mit dem Satze von Leau, dem Fundamentalsatze der konformen Abbildung und dem Schwarzschen Lemma.

Wir benutzen zunächst den bereits beim Beweise von (17) erwähnten Satz, daß für jede rationale Funktion $R(z)$ mindestens ein Fixpunkt 1. Ordnung ζ existiert, der der Bedingung

$$1.\quad |R'(\zeta)| > 1 \quad \text{oder}$$
$$2.\quad R'(\zeta) = 1 \quad \text{genügt.}$$

Es ist alles und sogar noch mehr bewiesen, wenn gezeigt werden kann, daß jeder Fixpunkt 1. Ordnung ζ, der den Bedingungen 1 oder 2 genügt, Häufungspunkt von Punkten von E ist. Ein solcher Punkt ζ hat, wie leicht zu zeigen, unendlich viele von sich verschiedene Vorgänger; für ihn gilt ferner der Satz III auf S. 196.

Es sei $\mathfrak{L}$ eine Umgebung von ζ, die den Bedingungen dieses Satzes genügt und so klein ist, daß mindestens ein Vorgänger ζ_{-n_1} von ζ außerhalb liegt (Fig. 1).

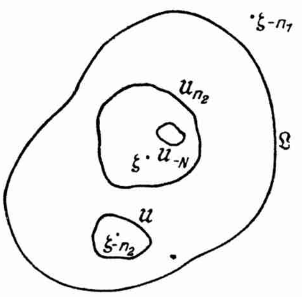

Fig. 1.

Da die $R_n(z)$ in ζ nicht normal sind, liegt nach II. (S. 189) in $\mathfrak{L}$ ein Vorgänger ζ_{-n_2} von ζ_{-n_1}. Da ζ_{-n_2} nicht in einem Anziehungsbereich $\mathfrak{B}$ liegen kann (sein Nachfolger ζ_{-n_1} liegt ja außerhalb $\mathfrak{L}$), muß er in einem Abstoßungsbereich $\mathfrak{B}^*$ liegen. Da er andererseits n_2-ter Vorgänger von ζ ist, d. h. $R_{n_2}(\zeta_{-n_2}) = \zeta$, so kann ich eine ganz in $\mathfrak{B}^*$ befindliche Umgebung $\mathfrak{U}$ so angeben, daß das Riemannsche Flächenstück $R_{n_2}(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U}_{n_2}$ keinen Windungspunkt außer höchstens ζ besitzt. Die durch Iteration von $\widetilde{R}_{-1}(z)$ erzeugten Vorgänger von $\mathfrak{U}$ häufen sich nach III. in ζ; sie sind überdies sämtlich eineindeutige Bilder von $\mathfrak{U}$, da $\widetilde{R}_{-1}(z)$ in $\mathfrak{L}$ keinen Windungspunkt besitzt. Es gibt also einen schlichten, einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{U}_{-N}$

(Vorgänger N-ter Ordnung von $\mathfrak{U}$), der durch $R_{N+n_2}(z)$ eineindeutig auf das Riemannsche Flächenstück $\mathfrak{U}_{n_2}$ abgebildet wird. Die Existenz eines abstoßenden, von ζ verschiedenen Fixpunktes in $\mathfrak{U}_{-N}$ und damit in $\mathfrak{L}$ ist nun gezeigt, sobald folgender Satz bewiesen ist:

Wird ein schlichter, einfach zusammenhängender Bereich D durch eine analytische Funktion $f(z)$ eineindeutig auf ein Riemannsches Flächenstück D_1 abgebildet und liegt D ganz im Innern von D_1, d. h. ganz in einem Blatte von D_1, so hat $f(z)$ in D mindestens einen abstoßenden Fixpunkt.

Dieser Satz ist eine Folge des Fundamentalsatzes der konformen Abbildung in Verbindung mit dem Schwarzschen Lemma. Nach dem Fundamentalsatz der konformen Abbildung läßt sich D_1 durch die analytische Funktion X schlicht und konform auf das Innere des Einheitskreises abbilden. Dabei wird der Durchschnitt D^* von D mit einem Blatt von D_1, das D ganz enthält, in eine Punktmenge K^* übergehen, die ganz im Innern des Einheitskreises liegt. Derjenige Zweig der Funktion $X(z)$, der D in K^* überführt, sei $X^*(z)$. $\varphi(z) = X^* f_{-1} X_{-1}(z)$ bildet dann das Innere des Einheitskreises schlicht auf K^* ab. Eine solche Abbildung besitzt bekanntlich mindestens einen Fixpunkt. Durch eine lineare Transformation kann erreicht werden, daß der Nullpunkt Fixpunkt ist. Für $\varphi(z)$ gilt dann das Schwarzsche Lemma[1]):

Sei $\varphi(z)$ für $|z| < 1$ regulär und sei $|\varphi(z)| < 1$ für $|z| < 1$, dann ist auch $|\varphi(z)| \leqq |z|$ für alle $|z| < 1$. Das Gleichheitszeichen steht nur für $\varphi(z) = e^{i\alpha} z$.

In unserem Falle ist also der Nullpunkt anziehender Fixpunkt. Da die Eigenschaft, anziehender Fixpunkt zu sein, durch konforme Abbildungen nicht verloren geht, so hat auch $f_{-1}(z)$ in D^* einen anziehenden und daher $f(z)$ einen abstoßenden Fixpunkt.

Wir haben also bewiesen, daß E existiert. Der Beweis sagt uns sogar, daß jeder Punkt P von E zugleich Punkt von E' ist. E' ist daher perfekt. Ähnliche Betrachtungen zeigen, daß jeder P hinreichend nahe gelegene Vorgänger P_{-n} zu E' gehört.

Wir wollen nun zeigen, daß jeder Vorgänger und jeder Nachfolger eines Punktes Q von E' wieder zu E' gehört. Da der Nachfolger eines Fixpunktes wieder ein Fixpunkt ist, so ist auch der Nachfolger eines Häufungspunktes von Fixpunkten selbst wieder ein Häufungspunkt von Fixpunkten, d. h. also jeder Nachfolger eines Punktes von E' gehört zu E'. Nun sei P_{-n} Vorgänger eines Punktes P von E. Da die Folge $R_n(z)$ in P nicht normal und P_{-n} kein Ausnahmepunkt ist, so häufen sich die Vor-

1) Siehe z. B. L. Bieberbach, Einführung in die konforme Abbildung Sammlung Göschen) S. 33.

gänger von P_{-n} in P, und es gibt daher insbesondere einen hinreichend nahen P_{-N}, der zu E' gehört. P_{-n} gehört dann als Nachfolger von P_{-N} ebenfalls zu E'. Also gehört auch der Vorgänger eines beliebigen Punktes von E' als Häufungspunkt von Punkten von E' selbst zu E'.

Gehört umgekehrt ein Punkt Q^* nicht zu E', so gehört auch keiner seiner Vorgänger oder Nachfolger zu E'. Die Folge $R_n(z)$ läßt also in einer Umgebung von Q^*, die keinen Punkt von E' enthält (und das ist bei jeder hinreichend kleinen Umgebung der Fall, da E' abgeschlossen ist), alle Punkte von E' aus und ist daher in Q^* normal. E' ist also mit $\mathfrak{F}$ identisch. Damit ist der Anschluß an die hier zuerst gegebene Darstellung erreicht. Die Kenntnis von (25) ermöglicht insbesondere, wie schon erwähnt, einen sehr einfachen Beweis von (17), ist aber auch sonst für gewisse Fragen der Theorie nützlich, doch kann hier nicht weiter darauf eingegangen werden.

Das Studium von $\mathfrak{F}$ liefert uns zugleich die Eigenschaften der Bereiche, in die $\mathfrak{F}$ die Ebene zerteilt. Wir wollen wenigstens die wesentlichsten Resultate hier mitteilen.[1]

(26) *Der unmittelbare Anziehungsbereich $\mathfrak{A}^*$ eines anziehenden Fixpunktes erster Ordnung ist einfach zusammenhängend oder von unendlich hohem Zusammenhang.*

(27) *Wenn es mehr als zwei anziehende Fixpunkte gibt, kann höchstens einer einen zusammenhängenden Anziehungsbereich haben (d. h. einen solchen, der mit dem unmittelbaren Anziehungsbereich identisch ist), während die Anziehungsbereiche der anderen sich aus unendlich vielen, voneinander getrennten, einfach zusammenhängenden Teilbereichen zusammensetzen.*

Die entsprechenden Sätze gelten auch für die Bereiche der indifferenten Fixpunkte, deren Multiplikator eine Einheitswurzel ist.

Die Berandung[2] der Anziehungsbereiche wird durch $\mathfrak{F}$ gebildet, und zwar hat jeder Anziehungsbereich Punkte in jeder Nähe jedes Punktes von $\mathfrak{F}$. Diese Berandung ist meist recht kompliziert. Fatou hat, hauptsächlich mit Hilfe der Theorie der konformen Abbildung, u. a. nachfolgende schöne Sätze bewiesen[3]:

---

1) Vgl. Julias Preisschrift und Fatou, Bull. de la soc. math., t. 48, p. 79.

2) Die „Berandung" oder der „Rand" einer Punktmenge wird von der Gesamtheit der Randpunkte gebildet, d. h. von den Punkten, deren (beliebig kleine) Umgebung sowohl zur Menge gehörige als auch nicht zur Menge gehörige Punkte enthält.

3) Sur les équations fonctionnelles (troisième mémoire), Chap. VI. Bull. de la soc. math. t. 208 usf.

Wenn der unmittelbare Anziehungsbereich $\mathfrak{A}^*$ eines anziehenden oder Leauschen Fixpunktes α ($|R'(\alpha)| < 1$ oder $R'(\alpha) = 1$) einfach zusammenhängt und sein Rand ein isoliertes, analytisches Kurvenstück enthält, so ist sein Rand mit $\mathfrak{F}$ identisch und ein Kreis oder das Stück eines solchen.

Als Beispiel möchte ich kurz $R(z) = z^2 - 2$ behandeln, dessen $\mathfrak{F}$ aus einem Geradenstück besteht. (Die „Gerade" ist für uns ja nur ein besonderer Fall des „Kreises".) Der unendlich ferne Punkt ist, wie bei jedem Polynom, anziehender Fixpunkt. $\zeta = 2$ ist abstoßender Fixpunkt, seine sämtlichen Vorgänger sind reell und liegen im Intervall $<-2, +2>$, das daher (5) alle Punkte von $\mathfrak{F}$ enthält. Da dieses Intervall auch seine Nachfolger enthält, so ist $\mathfrak{F}$ mit ihm identisch. Der Anziehungsbereich $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*$ des anziehenden Fixpunktes besteht aus der ganzen Ebene mit Ausnahme des Intervalls $<-2, +2>$.

Wenn $\mathfrak{F}$ nun weder ein Kreis noch ein Kreisstück ist, so enthält $\mathfrak{F}$ nicht einmal ein isoliertes, einfaches Jordansches Kurvenstück, das in jedem Punkt eine Tangente besitzt. Ja, es gibt sogar Fälle, bei denen in keinem Punkt eine Tangente existiert! Dies ist z. B. immer dann der Fall, wenn die Berandung des unmittelbaren, einfach zusammenhängenden Anziehungsbereiches eines anziehenden Fixpunktes weder ein Kreis noch ein Kreisstück ist und keinen Nachfolger oder Häufungspunkt der Nachfolger eines Windungspunktes von $R_{-1}(z)$ enthält.

Man sieht also, daß die Verhältnisse im allgemeinen recht kompliziert liegen.

Betrachten wir noch das Beispiel $R(z) = \frac{-z^3 + 3z}{2}$.[1]) Es existieren drei anziehende Fixpunkte 1. Ordnung: $\zeta = 1$, $\zeta' = -1$, $\zeta'' = \infty$; diese sind zugleich auch die einzigen Windungspunkte von $R_{-1}(z)$. Es kann also (wegen (20)) weitere anziehende Fixpunkte nicht geben. Die totalen Anziehungsbereiche seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$.[2]) $\mathfrak{A}''$ ist ein zusammenhängender Bereich, da der unendlich ferne Punkt keinen von sich verschiedenen Vorgänger hat. Dann müssen (27) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ aus unendlich vielen getrennten Bereichen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ und $\mathfrak{A}'_1, \mathfrak{A}'_2, \ldots$ bestehen. Weiter müssen (5) in jeder Nähe eines Punktes von $\mathfrak{F}$ Punkte aller drei Bereiche liegen. Es ist recht schwierig, sich davon eine genaue Vorstellung zu machen. Wir wollen versuchen, uns die Zusammenhangsverhältnisse an Hand eines Schemas klarzumachen, das Julia in seiner Preisschrift ausführlich behandelt hat.[3])

1) Julia, Journal de Math. (1918), p. 158—175.

2) Aus der Annahme, daß es andere als stückweise konstante Grenzfunktionen nicht gibt (vgl. S. 191), folgt aus (21), daß $\mathfrak{F} = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}' + \mathfrak{A}''$ ist.

3) loc. cit. p. 170 usf.

Wir gehen von zwei gleichseitigen Dreiecken $\triangle A_1 A_2 A_3$ und $\triangle A_1 A_4 A_5$ mit der Seite a aus, die an der Ecke A_1 aneinanderstoßen (Fig. 2). Sie bilden zusammen den geschlossenen polygonalen Zug $p_1 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$, der die Ebene in 3 Bereiche teilt:

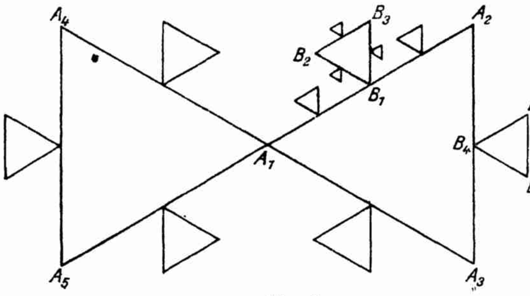

Fig. 2.

1. Das Innere von $\triangle A_1 A_2 A_3$: $\mathfrak{B}_1$.

2. Das Innere von $\triangle A_1 A_4 A_5$: $\mathfrak{B}_1'$.

3. Den Bereich $\mathfrak{B}_1''$, der den unendlich fernen Punkt enthält und vom ganzen polygonalen Zug p_1 begrenzt wird.

In die Mitte jeder der Seiten von p_1 setzen wir die Spitze eines gleichseitigen Dreiecks von der Seitenlänge $1/_3 a$ [1]), dessen Seiten den Seiten von p_1 parallel sind, und das (d. h. dessen Inneres) ganz in $\mathfrak{B}_1''$ liegt. $\triangle B_1 B_2 B_3$, $\triangle B_4 B_5 B_6$ sind zwei dieser Dreiecke. p_1 bildet mit den so konstruierten Dreiecken einen geschlossenen polygonalen Zug p_2, dessen Ecken in der Reihenfolge $A_1 B_1 B_2 B_3 B_1 A_2 B_4 B_5 B_6 B_4 A_3$ aufeinander folgen. p_2 teilt die Ebene in $3 + 6 = 9$ Bereiche, nämlich $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_1'$, das Innere der sechs oben konstruierten Dreiecke und den vom ganzen Zug p_2 begrenzten Bereich $\mathfrak{B}_2''$, der den Punkt ∞ enthält. Die Berandung von $\mathfrak{B}_2''$ hat Doppelpunkte, z. B. A_1, B_1, B_4. In die Mitte jeder Seite von p_2 setzen wir die Spitze eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seitenlänge $1/_3$ der betrachteten Seite von p_2 ist, dessen Seiten den Seiten von p_2 parallel sind, und das ganz in $\mathfrak{B}_2''$ liegt. p_2 bildet dann mit den neuen Dreiecken einen polygonalen Zug p_3, der die Ebene in $9 + 30$ Bereiche teilt. So fahren wir fort. In die Mitte jeder Seite von p_i setzen wir die Spitze eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seitenlänge $1/_3$ der betrachteten Seite von p_i ist, dessen Seiten denen von p_i parallel sind, und das ganz in $\mathfrak{B}_i''$ enthalten ist. Die neuen Dreiecke bilden mit p_i zusammen den polygonalen Zug p_{i+1}. Man kann zeigen, daß sich die so konstruierten Dreiecke gegenseitig nicht „stören", d. h. daß sie keine anderen als die in der Konstruktion angegebenen Punkte miteinander gemein haben. Jedes $\mathfrak{B}_i''$ ist also einfach zusammenhängend.

Wir denken uns diesen Prozeß unendlich oft wiederholt. Der Grenzwert des geschlossenen polygonalen Zuges p_i für $i \longrightarrow \infty$, d. h. die Ab-

1) Der Deutlichkeit halber sind alle Nebendreiecke in der Figur in vergrößertem Maßstabe gezeichnet worden.

leitung der Vereinigungsmenge der p_i, ist eine geschlossene stetige Kurve $\mathfrak{K}$, deren Doppelpunkte auf ihr überall dicht liegen. Es sind die Punkte von der Art A_1, B_1, B_4 usw.

$\mathfrak{K}$ trennt die Ebene in unendlich viele, einfach zusammenhängende Gebiete. Es entspricht der Menge $\mathfrak{F}$ unseres Beispiels. Das Gebiet $\mathfrak{B}''$, das den unendlich fernen Punkt enthält, und dessen Rand aus allen Punkten der Kurve $\mathfrak{K}$ besteht, entspricht dem Bereich $\mathfrak{A}''$ unseres Beispiels. $\mathfrak{B}''$ besteht aus allen Punkten, die in jedem $\mathfrak{B}''_i$ enthalten sind. Um uns nun auch von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ eine anschauliche Vorstellung zu machen, greifen wir aus den unendlich vielen Dreiecken unseres Schemas eine passend gewählte Teilmenge heraus, deren Punkte sich in jedem Punkt von $\mathfrak{K}$ häufen. Das Innere dieser Dreiecke entspricht dann $\mathfrak{A}$, das Innere aller übrigen Dreiecke $\mathfrak{A}'$.

Auch von dem Falle, daß $\mathfrak{F}$ sowohl „verkettete" als „unverkettete" Punkte enthält, können wir uns ein Bild machen, indem wir die Konstruktion von oben nochmals so ausführen, daß die Dreiecke sich nicht mehr berühren, d. h., anschaulich gesprochen, indem wir unser Schema passend „auseinanderziehen", wie dies in nebenstehender Figur 3 angedeutet ist. Dann ist das entsprechende $\mathfrak{B}''$ von unendlich hohem Zusammenhang. Zwei Punkte von $\mathfrak{K}$ sind offenbar dann und nur dann verkettet, wenn sie dem gleichen Dreieck angehören. In jedem noch so kleinen Bereich D, der Punkte von $\mathfrak{K}$ enthält, liegen dann unendlich viele Dreiecke und damit sowohl „verkettete" als „unverkettete" Punkte.

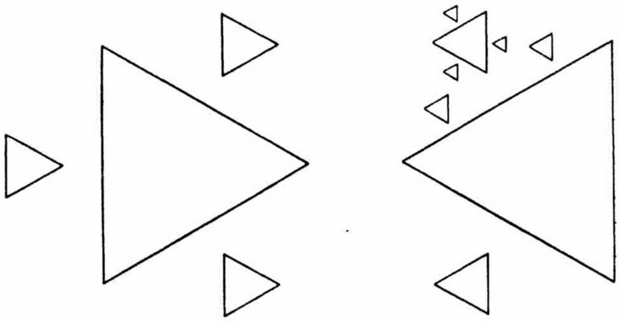
Fig. 3.

Das vorliegende Referat erstrebt keine Vollständigkeit. Manche interessante Problemstellung und mancher schöne Satz wurden absichtlich nicht erwähnt, da der Raum zu einer leichtverständlichen Darstellung fehlte. Es könnte über diesen Problemkreis noch vieles gesagt werden, besonders auch über die Anwendungsmöglichkeit dieser Theorie auf andere Gebiete. So haben sich **Julia** und **Fatou** ihrer auch mit Vorteil bei der Frage der Vertauschbarkeit rationaler Funktionen bedient, d. h. bei der Frage, welche rationalen Funktionen $R(z)$