

## Werk

**Titel:** Über die Entwicklung der Affingeometrie.

**Autor:** Blaschke, W.; Reidemeister, K.

**Jahr:** 1922

**PURL:** [https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?37721857X\\_0031|log13](https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?37721857X_0031|log13)

## Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)  
SUB Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

sondern *kinematisch* oder *dynamisch* dreht es sich bei der Analyse des Bewegungsbegriffs. —

In einer zweiten Sitzung am andern Tage demonstrierte F. P. Liesegang (Düsseldorf) einige treffliche Schaubilder zur Darstellung der Zeitraumverhältnisse in der speziellen Relativitätstheorie, und es verlas H. Dingler (München), wie es schien nur zu formalem Protest gegen die Relativitätstheorie, ohne sich um das Publikum zu kümmern, seine kritischen Bemerkungen zu den Grundlagen der Theorie; es ist sonderbar, daß sich bei Dingler mit seinem an Poincaré orientierten konventionalistischen Standpunkt die dogmatische Halsstarrigkeit des geborenen Apriorikers verbindet. Daß der Tragödie am Schluß das Satyrspiel nicht fehle, entwickelte Hr. Rudolph eine phantastische Äthertheorie mit „Lücken“ zwischen fließenden Ätherwänden, Sternfäden usw., mit Hilfe deren er aus Nichts die Sonnenmasse auf eine beliebige Anzahl von Dezimalen genau bestimmte . . .

Ich habe hier in freier Weise die Fragen kennzeichnen wollen, die in der Nauheimer Diskussion zur Sprache kamen, nicht aber einen objektiven Bericht über den Verlauf der Sitzung erstatten wollen; für eine gekürzte, aber sinngetreue Wiedergabe der Vorträge und der Diskussion sei der Leser auf das Dezemberheft 1920 der Physikalischen Zeitschrift verwiesen.

(Eingegangen am 29. 8. 21.)

## Über die Entwicklung der Affingeometrie.

Von W. BLASCHKE und K. REIDEMEISTER.

Es seien  $x_k$  und  $x_k^*$  die Koordinaten zweier Punkte  $\mathfrak{x}$  und  $\mathfrak{x}^*$  in bezug auf dasselbe, etwa schiefwinklige Achsenkreuz. Dann nennt man nach L. Euler (1748) die Zuordnung

$$x_i^* = a_{i0} + a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3; \quad i = 1, 2, 3.$$

$$(1) \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

„*affin*“. Beschreibt  $\mathfrak{x}$  eine Gerade, so durchläuft auch der zugeordnete Punkt  $\mathfrak{x}^*$  ebenfalls eine Gerade, und der Parallelismus bleibt erhalten. Als *Affingeometrie* werden wir im Sinn von F. Kleins „Erlanger Programm“ (1872) das Studium aller der geometrischen Eigenschaften zu bezeichnen haben, die bei affinen Abbildungen erhalten bleiben. Solche Affingeometrie haben in algebraischer Richtung A. F. Möbius in seinem baryzentrischen Kalkül (1827) und H. Grassmann in seiner „Aus-

dehnungslehre“ (1844) getrieben. Bis vor kurzem hat man kaum systematisch die *affine Differentialgeometrie* erforscht, obwohl dazu von verschiedenen Seiten aussichtsreiche Ansätze vorlagen. E. J. Wilczynski und G. Fubini haben sich, die Affingeometrie überspringend, gleich der viel spröderen projektiven Differentialgeometrie zugewandt und sich dort durch ein Gestrüpp von Formeln den Weg zu geometrischen Erkenntnissen zu bahnen gesucht.

Seit 1916 ist zuerst in den Leipziger Berichten und dann in der mathematischen Zeitschrift von mehreren Geometern eine lange Reihe von Abhandlungen herausgegeben worden unter dem gemeinsamen Obertitel „Über affine Geometrie“.<sup>1)</sup> Es handelt sich dabei im wesentlichen

1) Die unter dem Obertitel „Über affine Geometrie“ („AG“) erschienenen Arbeiten sind die folgenden:

In den Berichten der math.-phys. Klasse der Kgl. Sächs. Akademie Leipzig:  
 Blaschke: AG I „Isoperimetrische Eigenschaften von Ellipse und Ellipsoid“ 68 (1916), S. 217—239. — Blaschke: AG II „Von der Mindestzahl der sextaktischen Punkte einer Eilinie“ 68 (1916), S. 240—243. — Blaschke: AG III „Eine Minimumeigenschaft der Ellipse“ 69 (1917), S. 3—12. — Pick: AG IV „Differentialinvarianten der Flächen gegenüber affinen Transformationen“ 69 (1917), S. 107 bis 136. — Blaschke: AG V „Kennzeichnende Eigenschaften des Ellipsoids“ 69 (1917), S. 166—206. — Blaschke: AG VI „Existenzbeweis zur isoperimetrischen Eigenschaft des Ellipsoids“ 69 (1917), S. 207—225. — Blaschke: AG VII „Neue Extremeigenschaften von Ellipse und Ellipsoid“ 69 (1917), S. 306—318. — Blaschke AG VIII „Die Mindestzahl der sextaktischen Punkte einer Eilinie“ 69 (1917), S. 321 bis 324. — Blaschke: AG IX „Verschiedene Bemerkungen und Aufgaben“ 69 (1917), S. 412—420. — Blaschke: AG X „Eine Minimumeigenschaft des Ellipsoids“ 69 (1917), S. 421—435. — Blaschke: AG XI „Lösung des Vierpunktproblems von Sylvester aus der Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten“ 69 (1917), S. 436—453. — Blaschke: AG XII „Von den Eiflächen“ 70 (1918), S. 18—37. — Groß: AG XIII „Eine Minimumeigenschaft der Ellipse und des Ellipsoids“ 70 (1918), S. 38—54. — Blaschke: AG XIV „Eine Minimumaufgabe für Legendres Trägheitsellipsoid“ 70 (1918), S. 72—75. — Pick: AG XV „Affingeometrie der Kurven höherer Räume“ 70 (1918), S. 76—90. — Radon: AG XVI „Die Grundgleichungen der affinen Flächentheorie“ 70 (1918), S. 91—107. — Radon: AG XVII „Zur Affingeometrie der Regelflächen.“ 70 (1918) S. 147—155. — Salkowski: AG XVIII „Zur Differentialgeometrie der Raumkurven“ 70 (1918), S. 160—176. — Blaschke: AG XIX „Extremeigenschaften und Integralgleichungen für die Ellipse“ 70 (1918), S. 177—184. — Liebmann: AG XX „Eine charakteristische Eigenschaft gewisser Kegelschnittspaare“ 70 (1918), S. 325—329. — Blaschke: AG XXI „Ein Beweis des Satzes von Liebmann über Kegelschnittspaare“ 70 (1918) S. 330—335. — Blaschke: AG XXII „Bestimmung der Flächen mit zentrischen ebenen Schnitten“ 70 (1918), S. 336—340. — Liebmann: AG XXIII „Anwendung der Differentialinvarianten der ebenen Kurven“ 70 (1918), S. 341—351. — König: AG XXIV „Ein Beitrag zur Grundlegung der affinen Geometrie“ 71 (1919), S. 3—19. — Blaschke: AG XXV „Raumkurven und Schiebflächen“ 71 (1919), S. 20—34.

um affine Differentialgeometrie. Im folgenden wollen wir es unternehmen, einen Überblick über die Ergebnisse dieser Untersuchungen zu geben durch eine erweiterte Wiedergabe des Vortrages, den einer von uns bei der Mathematikertagung im September 1921 in Jena gehalten hat.

Ein systematisches Studium der affinen Differentialgeometrie rechtfertigt sich schon durch zwei Erfolge. Einmal gelingt es auf diesem Wege, altbekannte Tatsachen unter einem neuen und natürlichen Gesichtspunkt verstehen zu lernen, so erscheinen beispielsweise die flächentheoretischen Formeln von Lelievre erst hier an ihrem rechten Platz. Andererseits aber — und das erscheint uns wesentlicher — gelingt es in überraschend weitgehender und nicht trivialer Analogie zur gewöhnlichen Flächentheorie eine affine Flächentheorie aufzubauen, die in der Schönheit und durchsichtigen Einfachheit ihrer Ergebnisse sich neben der klassischen Flächentheorie sehen lassen kann. So haben — um wieder ein Beispiel herauszugreifen — die wichtigsten Sätze über Minimalflächen in der Affingeometrie ihr Gegenstück. Hervorzuheben wäre ferner die innige Beziehung der Affingeometrie zur Theorie der Eikörper, und schließlich bieten die affininvarianten Variationsprobleme merkwürdige Beispiele zur Variationsrechnung.

Es soll nun im folgenden versucht werden, über die bisherigen Methoden und Ergebnisse der affinen Differentialgeometrie einen Überblick zu geben. Dabei wird auf Vollständigkeit und auf durchgeführte Beweise verzichtet, dagegen auf Anschaulichkeit und Verständlichkeit Wert gelegt.

Ferner in der Mathematischen Zeitschrift:

Blaschke: AG XXVI „Wackelige Achteckfläche“ 6 (1920), S. 85—93. — Berwald: AG XXVII „Liesche  $F_2$ , Affinnormale und mittlere Affinkrümmung“. 8 (1920), S. 63—78. — Blaschke: AG XXVIII „Bestimmung aller Flächen, die von den umschriebenen Zylindern längs ebener Kurven berührt werden“. 8 (1920), S. 115—122. — Blaschke: AG XXIX „Die Starrheit der Eiflächen“. 9 (1921), S. 142—146. — Berwald: AG XXX „Die oskulierenden Flächen zweiter Ordnung in der affinen Flächentheorie“ 10 (1921), S. 160—172. — Reidemeister: AG XXXI „Beständig elliptisch oder hyperbolisch gekrümmte Eiliniien“. 10 (1921), S. 318—320. — P. Frank: AG XXXII „Die Asymptotenebenen eines Flächenpunkts und seine Liesche  $F_2$ “. — Blaschke: AG XXXIII „Affinminimalflächen“. 12 (1922), S. 262 bis 273.

Schließlich in den Hamburger Abhandlungen:

Winternitz: AG XXXIV „Neuer Beweis für Blaschkes isoperimetrische Sätze zur Affingeometrie“. 1 (1922), S. 99—101. — Reidemeister: AG XXXV „Die Differentialgleichung der Schiebflächen“. 1 (1922), S. 127—137. — Blaschke: AG XXXVI „Ein affines Gegenstück zur Unverbiegbarkeit der Kugel“. 1 (1922), S. 149—154.

## § 1. Ebene Kurven, Affinlänge, Affinkrümmung.

Wenden wir uns zunächst der ebenen Geometrie zu und stellen wir uns die Koordinaten  $x_1, x_2$  eines Punktes  $\mathfrak{x}$  als Funktionen eines Parameters  $t$  dar. Beschränken wir unser Augenmerk auf sogenannte „flächentreue“ Affinitäten:

$$(2) \quad \begin{aligned} x_1^* &= a_{10} + a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x_2^* &= a_{20} + a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \\ a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} &= 1, \end{aligned}$$

so bleiben die Determinanten

$$(3) \quad \left( \frac{d^n \mathfrak{x}}{dt^n}, \frac{d^m \mathfrak{x}}{dt^m} \right) = \frac{d^n x_1}{dt^n} \frac{d^m x_2}{dt^m} - \frac{d^n x_2}{dt^n} \frac{d^m x_1}{dt^m}$$

bei solchen Affinitäten ungeändert („invariant“). Wenn wir daher Wendepunkte ausschließen, können wir unsern Kurvenparameter  $t$  durch die invariante Forderung normieren, daß

$$(4) \quad \left( \frac{d\mathfrak{x}}{dt}, \frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} \right) = 1$$

sein soll. Wofür wir kürzer

$$(5) \quad (\mathfrak{x}' \mathfrak{x}'') = 1$$

schreiben. Diesen normierten Parameter nennen wir die *Affinlänge*  $s$  und finden

$$(6) \quad s = \int \sqrt{\left( \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2} \right)} dt.$$

Aus (5) folgt durch Ableitung nach  $s$  das Verschwinden der Determinante

$$(7) \quad (\mathfrak{x}' \mathfrak{x}''') = 0$$

und daraus

$$(8) \quad \mathfrak{x}''' + k\mathfrak{x}' = 0,$$

d. h. ausführlich

$$(8)^* \quad x_i''' + kx_i' = 0; \quad i = 1, 2.$$

Die Affinlänge  $s$  und die „Affinkrümmung“  $k$  spielen nun eine ganz entsprechende Rolle wie Bogenlänge und Krümmung in der gewöhnlichen (Bewegungs-)Geometrie. Durch die *natürliche Gleichung*

$$(9) \quad k = k(s)$$

ist eine ebene Kurve bis auf inhaltstreue Affinitäten bestimmt. Beispielsweise sind durch  $k = \text{konst.}$  die *Kegelschnitte* gekennzeichnet, und zwar durch  $k > 0$  die Ellipsen, durch  $k = 0$  die Parabeln und durch  $k < 0$  die Hyperbeln.<sup>2)</sup>

<sup>2)</sup>  $s$  und  $k$  sind zuerst in der von G. Pick veranlaßten Prager Dissertation von E. Nohel eingeführt worden, Wiener Berichte 123 (1914), S. 2085—2115. Deutungen der Affinlänge bei Pick, Blaschke in AG I und Winternitz.

### § 2. Die Mindestzahl der sextakischen Punkte einer Eilinie.

Um ein einfaches Beispiel der Verwendbarkeit der vorgetragenen Begriffe zu erbringen, soll der Satz bewiesen werden:

*Auf jeder Eilinie (geschlossenen konvexen Linie) gibt es mindestens sechs Punkte mit stationärem Schmiegekegelschnitt.*

Ein solcher ausgezeichnete Punkt, in dem sich die Kurve nahezu wie ein Kegelschnitt verhält, ist dadurch gekennzeichnet, daß  $k$  „nahezu konstant“, d. h. daß  $dk : ds = 0$  ist.  $k$  hat auf der geschlossenen Eilinie sicher zwei Extreme, also Punkte mit  $k' = dk : ds = 0$ .

Nun kann man durch Integration nach Teilen sofort zeigen, daß auf jeder Eilinie das Integral

$$(10) \quad \oint k' \cdot Q(x_1(s), x_2(s)) ds = 0$$

ist, wenn

$$(11) \quad Q = a_{00} + 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

mit beliebigen Konstanten  $a_{ik}$  bedeutet. Gäbe es nun nur zwei Zeichenwechsel von  $k'$  auf unsrer Eilinie, so könnte man für  $Q = 0$  die Gleichung der Verbindungsgerade der zugehörigen Punkte wählen, so daß  $k' \cdot Q$  keinen Zeichenwechsel hätte und das Integral (10) nicht verschwinden könnte. Gäbe es ferner vier Zeichenwechsel auf unsrer Eilinie, so wählte man  $Q$  so, daß  $Q = 0$  ein Paar von Geraden darstellt, auf dem alle zugehörigen Punkte liegen. Wieder hätte  $k' \cdot Q$  keinen Zeichenwechsel im Widerspruch mit (10). Da es nun wirklich Eilinien mit genau sechs Nullstellen von  $k'$  gibt, so ist damit die Mindestzahl sechs gesichert.

Nach einem Versuch von Blaschke (AG II) ist dieser Nachweis unabhängig von Herglotz (AG VIII), Radon und Winternitz gefunden worden.

### § 3. Elliptisch gekrümmte Eilinien.

Ein anderer hübscher auf Minkowski zurückgehender Satz über Eilinien, der von Böhmer (1905) und Mohrmann (1912) bewiesen wurde, läßt sich mit unsern Hilfsmitteln leicht bestätigen:

*Eine Eilinie, deren Schmiegekegelschnitte alle Ellipsen sind, hat die Eigenschaft, daß fünf beliebige ihrer Punkte einer Ellipse angehören.*

Der Schmiegekegelschnitt ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel — oder, wie man auch sagt, die Kurve ist elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch gekrümmt — je nachdem  $k > 0$ ,  $k = c$  oder  $k < 0$  ist. Man führt den behaupteten Satz auf den folgenden zurück:

Von allen doppelpunktfreien Kurven innerhalb eines Dreiecks, die in zwei Ecken zwei Seiten zu Tangenten haben (Fig. 1), werden die elliptisch gekrümmten von den hyperbolisch gekrümmten durch die Parabel getrennt.

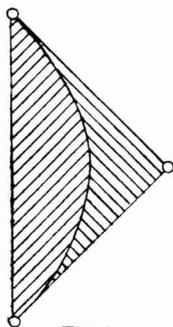


Fig. 1.

Dies wiederum läßt sich, wenn man den Kurvenparameter zu  $s$  proportional wählt, auf eine Randbedingung bei linearen Differentialgleichungen zurückführen (Reidemeister, AG XXXI).

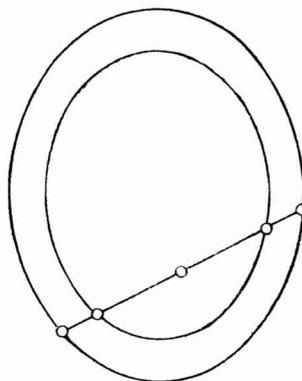


Fig. 2.

Aus der Fülle weiterer Sätze der ebenen Affingeometrie sei der folgende genannt (Fig. 2): Werden zwei Linien derselben Ebene von allen Geraden in konzentrischen Sehnen geschnitten, so sind die beiden Linien ähnliche und bezüglich des gemeinsamen Mittelpunkts ähnlich liegende Kegelschnitte (Liebmann AG XX und Blaschke AG XXI).

#### § 4. Die Parabeln als längste.

Hat man in einer Maßbestimmung eine Integralinvariante, so kann man durch Aufstellung der ersten Variation sofort zu Differentialinvarianten kommen: Setzen wir das an dem Beispiel der Affinlänge auseinander!

Gehen wir von einer ebenen Kurve  $\zeta(s)$  zu einer benachbarten  $\zeta(s) + \delta n \cdot \zeta''(s)$  über, so finden wir für die Variation der Affinlänge den einfachen Ausdruck

$$(12) \quad \delta s = -\frac{2}{3} \int \delta n \cdot k \cdot ds,$$

wenn wir die Randelemente festhalten. Darin bedeutet  $k$  die in § 1 auf anderem Wege eingeführte „Affinkrümmung“, auf die man also durch unser Variationsproblem ganz von selbst geführt wird. Die Extremalen des Variationsproblems  $\delta s = 0$  sind also die Linien mit der natürlichen Gleichung  $k = 0$ , d. h. die Parabeln.

Es fragt sich nun, inwiefern die Parabeln ein Extrem der Affinlänge ergeben. Man kann nun etwa mit den Hilfsmitteln der Variationsrechnung leicht einsehen: Von allen doppelpunktfreien innerhalb eines Dreiecks verlaufenden Kurven, die zwei Ecken verbinden und dort zwei Ecken berühren (Fig. 1), liefert die Parabel den größten Wert der Affinlänge.

Ähnlich wie man die Eigenschaft der Geraden als kürzeste auf die Ungleichheit zwischen den Seiten eines Dreiecks zurückführen kann, so

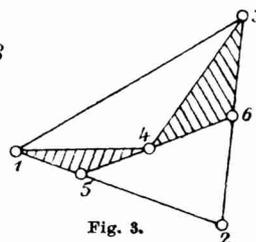
kann man auch nach Winternitz die Extremeigenschaft der Parabel elementar begründen. Es kommt dabei nur darauf an, den folgenden Hilfssatz zu beweisen:

Zwischen den Dreiecksflächen in der Figur 3

$$\begin{aligned} |1\ 2\ 3| &= f, \\ |1\ 5\ 4| &= f_1, \quad |4\ 6\ 3| = f_2 \end{aligned}$$

besteht die Beziehung

$$(13) \quad f^{\frac{1}{3}} \geq f_1^{\frac{1}{3}} + f_2^{\frac{1}{3}}.$$



Dabei gilt dann und nur dann die Gleichheit, wenn 4 auf der Parabel liegt, die in 1 und 3 die Seiten 1 2 und 2 3 berührt und die Gerade 5 6 diese Parabel berührt.

Dieses einfache Verfahren von Winternitz hat vielleicht den Vorteil, daß es sich auf das entsprechende räumliche Variationsproblem übertragen läßt:

$$(14) \quad \delta \int \left| \begin{array}{c} x'_1 x''_1 x'''_1 \\ x'_2 x''_2 x'''_2 \\ x'_3 x''_3 x'''_3 \end{array} \right|^{\frac{1}{6}} dt = 0.$$

Das Maximum dieses Integrals tritt bei den kubischen Parabeln auf. Diese Extremalen hängen von weniger Parametern ab, als man zunächst erwarten sollte, da sich die Ordnung der Differentialgleichungen von Euler-Lagrange erniedrigt. Die Behandlung dieses Variationsproblems mit den von Weierstraß in die Variationsrechnung eingeführten Hilfsmitteln führt im Gegensatz zu der einfachen Behandlung, die wir angedeutet haben, zu ziemlich verwickelten Rechnungen.

Wir wollen hier das einfachste affinvariante isoperimetrische Problem der ebenen Geometrie, das die Kegelschnitte zu Extremalen hat, übergehen, da wir später (§ 10) auf die entsprechende räumliche Aufgabe zurückkommen.

### § 5. Die Grundformeln der affinen Flächentheorie.

Wir sind im vorigen Abschnitt schon aus der ebenen in die räumliche Geometrie hineingeraten und wollen uns nun gleich dem Hauptgegenstand der affinen Raumgeometrie zuwenden, der die anziehendsten Fragestellungen darbietet, nämlich der affinen Flächentheorie, die in der Hauptsache von Pick (AG IV), Blaschke (AG XII) und Radon (AG XVI) entwickelt worden ist.

Die Grundlage der affinen wie der gewöhnlichen Flächentheorie bildet eine quadratische Differentialform, und zwar verwendet man in

der Affingeometrie die mit einem geeigneten Faktor multiplizierte sogenannte „zweite Grundform“ der gewöhnlichen Gaußischen Flächentheorie, deren Nulllinien die Asymptotenlinien der Fläche sind. Sind nämlich die Koordinaten des Flächenpunkts als Funktionen zweier Parameter  $u, v$  gegeben  $x_k = x_k(u, v)$ ;  $k = 1, 2, 3$ , was wir vektoriell so abkürzen

$$(15) \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v),$$

so sollen die dreireihigen Determinanten aus den ersten und zweiten Ableitungen

$$(16) \quad (\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_{uu}) = L, \quad (\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_{uv}) = M, \quad (\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_{vv}) = N$$

genannt werden, wo also ausführlich z. B.

$$L = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial v} & \frac{\partial^2 x_3}{\partial u^2} \end{vmatrix}$$

zu schreiben wäre. Mit diesen Abkürzungen nimmt die quadratische Grundform der affinen Flächentheorie die Gestalt an

$$(17) \quad \varphi = \frac{Ldu^2 + 2Mdu\,dv + Ndv^2}{|LN - M^2|^{\frac{1}{4}}} = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2.$$

Daneben hat Pick (AG IV) eine kubische Grundform eingeführt, deren Nulllinien schon Darboux und Segre betrachtet hatten, nämlich

$$(18) \quad \psi = \frac{(d^3 \mathfrak{x}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v)}{|LN - M^2|^{\frac{1}{4}}} - \frac{3}{2} d\varphi = \\ = Adu^3 + 3Bdu^2\,dv + 3Cdu\,dv^2 + Ddv^3.$$

Nun führen wir (Blaschke AG V) einen zur Fläche kovarianten Vektor ein, den Vektor der Affinnormalen durch die Formel

$$(19) \quad \tilde{\mathfrak{x}} = \frac{1}{2} \mathcal{A} \mathfrak{x}$$

oder ausführlich

$$(19)^* \quad \tilde{x}_k = \frac{1}{2} \mathcal{A} x_k; \quad k = 1, 2, 3.$$

Darin bedeutet  $\mathcal{A}$  den zweiten Differentiator (Differentialparameter) Beltramis bezüglich der quadratischen Grundform  $\varphi$ . Auf die Deutung der Affinnormalen kommen wir in § 7 zu sprechen.

## § 6. Asymptotenlinien als Parameterkurven.

Wir wollen im folgenden, um den Formelapparat nicht allzusehr anwachsen zu lassen, die Asymptotenlinien als Parameterlinien einführen und zunächst annehmen, daß es sich um hyperbolisch gekrümmte Flächen handle. Dann sei etwa

$$(20) \quad L = 0, \quad N = 0; \quad M = F^2, \quad F > 0.$$

Ferner wird

$$(21) \quad \begin{aligned} \frac{(\xi_u \xi_v \xi_{uuu})}{F} &= \frac{(\xi_u \xi_{uu} \xi_{uv})}{F} = A, \\ \frac{(\xi_u \xi_v \xi_{vvv})}{F} &= \frac{(\xi_v \xi_{uv} \xi_{vv})}{F} = D \end{aligned}$$

und die beiden *Grundformen* vereinfachen sich zu

$$(22) \quad \begin{aligned} \varphi &= 2 F du dv, \\ \psi &= A du^3 + D dv^3. \end{aligned}$$

Die einfachste von Pick (AG IV) eingeführte Invariante lautet

$$(23) \quad J = \frac{AD}{F^3},$$

und es gelten die *Ableitungsgleichungen*

$$(24) \quad \begin{aligned} \xi_{uu} &= \frac{F_u}{F} \xi_u + \frac{A}{F} \xi_v, \\ \xi_{uv} &= F \tilde{\xi}, \\ \xi_{vv} &= \frac{D}{F} \xi_u + \frac{F_v}{F} \xi_v. \end{aligned}$$

Wir setzen weiter

$$(25) \quad H = S - J,$$

worin  $S$  das Gaußsche *Krümmungsmaß* der quadratischen Grundform  $\varphi$  bedeutet:

$$(26) \quad S = -\frac{1}{F} \frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v}.$$

Dann folgen aus den Ableitungsgleichungen (24) die Integrabilitätsbedingungen

$$(27) \quad \begin{aligned} H_u &= \frac{AD_u}{F^3} - \frac{1}{F} \left( \frac{A_v}{F} \right)_v, \\ H_v &= \frac{DA_v}{F^3} - \frac{1}{F} \left( \frac{D_u}{F} \right)_u \end{aligned}$$

und für den Vektor  $\tilde{\xi}$  der Affinnormalen ergeben sich die *Ableitungsgleichungen*:

$$(28) \quad \begin{aligned} \tilde{\xi}_u &= -H \xi_u + \frac{A_v}{F^2} \xi_v, \\ \tilde{\xi}_v &= +\frac{D_u}{F^2} \xi_u - H \xi_v. \end{aligned}$$

Damit ist das erschöpft, was wir hier an flächentheoretischen Formeln brauchen. Den allgemeinen Formelapparat für beliebige Parameter hat Radon in AG XVI hergeleitet. Durchsichtiger und übersichtlicher lassen sich diese allgemeinen Formeln mittels des „absoluten Differenzialkalküls“ von Ricci und Levi-Civita gestalten, wie dies Berwald in einer nächstens erscheinenden Arbeit gleich für den  $n$ -dimensionalen Raum durchgeführt hat.

### § 7. Affine Krümmungstheorie.<sup>3)</sup>

Hat man den Vektor der Affinnormalen  $\tilde{\xi}$  eingeführt, so kann man ganz entsprechend zur gewöhnlichen Flächentheorie „Affinkrümmungslinien“ einführen als Flächenkurven, deren Affinnormalen eine Torse (abwickelbare Fläche) umhüllen. Dann kann man, indem man den Vektor  $\tilde{\xi}$  zur Maßbestimmung auf der Affinnormalen verwendet, die beiden Hauptkrümmungen  $1: \rho_1, 1: \rho_2$  erklären und die *mittlere Affinkrümmung*

$$(29) \quad H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$$

und das *Affinkrümmungsmaß*

$$(30) \quad K = \frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{1}{\rho_2} = (S - J)^2 - \frac{A_v D_u}{F^4}.$$

Damit ist, wenn wir erst  $\tilde{\xi}$  gedeutet haben, für einen Teil unserer Invarianten eine geometrische Deutung gefunden. Solcher *Deutungen*, wenigstens *der Richtung von  $\tilde{\xi}$*  seien zwei angegeben.

Bei einer hyperbolisch gekrümmten Fläche legen wir um den Flächenpunkt  $\mathfrak{x}$  herum ein unendlich kleines windschiefes Viereck aus Asymptotenlinien. Dann liegt die Affinnormale in den beiden Ebenen durch  $\mathfrak{x}$ , die einem Paar von Gegenseiten dieses Vierseits parallel sind (Demoulin).

Für elliptisch gekrümmte Flächen denken wir uns zur Tangentenebene in  $\mathfrak{x}$  parallele ebene Schnitte an die Fläche gelegt, den von der

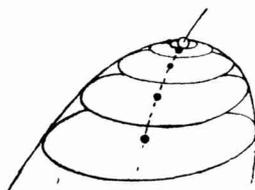


Fig. 4.

Schnittlinie in der Umgebung von  $\mathfrak{x}$  begrenzten Eibereich homogen mit Masse belegt und von ihm den Schwerpunkt ermittelt. Bei Parallelverschiebung der Schnittebene beschreibt dieser Schwerpunkt eine „*Schwerlinie*“ der Fläche, die in  $\mathfrak{x}$  endigt (Fig. 4). Die Tangente in  $\mathfrak{x}$  an diese Schwerlinie fällt mit der Affinnormalen zusammen (Blaschke, AG V).

Trägt man den Vektor  $\tilde{\xi}$  der Affinnormalen von einem festen Aufpunkt  $o$  aus ab, so beschreibt sein Endpunkt, wenn  $\mathfrak{x}$  die Ausgangsfläche ( $\mathfrak{x}$ ) durchläuft, im allgemeinen wieder eine Fläche ( $\tilde{\mathfrak{x}}$ ), die man

<sup>3)</sup> Blaschke, AG V.

das *Krümmungsbild* von  $(\mathfrak{x})$  nennt.  $(\mathfrak{x})$  und  $(\bar{\mathfrak{x}})$  sind nach (28) durch parallele Tangentenebenen aufeinander bezogen. In der Bewegungsgeometrie kann man  $(\mathfrak{x})$  dadurch aus  $(\bar{\mathfrak{x}})$  ermitteln, daß die Entfernung der Tangentenebene in  $\bar{\mathfrak{x}}$  vom Aufpunkt  $\mathfrak{o}$  gleich ist der vierten Wurzel aus dem gewöhnlichen Gaußischen Krümmungsmaß von  $(\mathfrak{x})$  in  $\mathfrak{x}$ .

### § 8. Formeln von Lelievre.

Es liegt nahe, das Krümmungsbild in Ebenenkoordinaten darzustellen. Wir wollen das skalare (= innere) Produkt zweier Vektoren  $\mathfrak{X}, \bar{\mathfrak{x}}$  durch  $\mathfrak{X}\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{X} \cdot \bar{\mathfrak{x}}$  abkürzen. Dann schreiben wir die Tangentenebene in  $\bar{\mathfrak{x}}$  an  $(\bar{\mathfrak{x}})$  in die Form

$$(31) \quad \mathfrak{X}\bar{\mathfrak{x}} = 1,$$

wo die  $\mathfrak{X}$  fest und die  $\bar{\mathfrak{x}}$  für den Augenblick laufende Koordinaten sind. Für den kontravarianten Vektor  $\mathfrak{X}$  findet man leicht

$$(32) \quad \mathfrak{X} = \frac{\mathfrak{r}_u \times \mathfrak{r}_v}{F},$$

wenn  $\times$  das vektorielle (= äußere) Produkt andeutet.

Durch Ableitung folgt

$$(33) \quad \mathfrak{X}_u = \mathfrak{r}_u \times \bar{\mathfrak{x}}, \quad \mathfrak{X}_v = \bar{\mathfrak{x}} \times \mathfrak{r}_v$$

und weiter

$$(34) \quad \begin{aligned} \mathfrak{X}_{uu} &= + \frac{F_u}{F} \mathfrak{X}_u - \frac{A}{F} \mathfrak{X}_v + \frac{A_v}{F} \mathfrak{X}, \\ \mathfrak{X}_{uv} &= \quad * \quad * \quad - FH\mathfrak{X}, \\ \mathfrak{X}_{vv} &= - \frac{D}{F} \mathfrak{X}_u + \frac{F_v}{F} \mathfrak{X}_v + \frac{D_u}{F} \mathfrak{X}. \end{aligned}$$

Aus (33) und wegen (vgl. (20), (24))

$$(35) \quad (\mathfrak{r}_u \mathfrak{r}_v \bar{\mathfrak{x}}) = F$$

folgen die inneren Produkte

$$(36) \quad \begin{aligned} \mathfrak{r}_u \mathfrak{X} &= 0, & \mathfrak{r}_u \mathfrak{X}_u &= 0, & \mathfrak{r}_u \mathfrak{X}_v &= -F, \\ \mathfrak{r}_v \mathfrak{X} &= 0, & \mathfrak{r}_v \mathfrak{X}_u &= -F, & \mathfrak{r}_v \mathfrak{X}_v &= 0, \\ \bar{\mathfrak{x}} \mathfrak{X} &= 1, & \bar{\mathfrak{x}} \mathfrak{X}_u &= 0, & \bar{\mathfrak{x}} \mathfrak{X}_v &= 0. \end{aligned}$$

Ferner ergibt sich

$$(37) \quad (\mathfrak{X} \mathfrak{X}_u \mathfrak{X}_v) = -F.$$

Damit erhalten wir weiter

$$(38) \quad \mathfrak{r}_u = \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}_u, \quad \mathfrak{r}_v = \mathfrak{X}_v \times \mathfrak{X}$$

und

$$(39) \quad \bar{\mathfrak{x}} = - \frac{\mathfrak{X}_u \times \mathfrak{X}_v}{F}.$$

Nach (38) ist

$$(40) \quad \mathfrak{r} = \int (\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}_u du + \mathfrak{X}_v \times \mathfrak{X} dv)$$

und die Integrabilitätsbedingung

$$(41) \quad (\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}_u)_v = (\mathfrak{X}_v \times \mathfrak{X})_u$$

oder

$$(42) \quad \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}_{uv} = 0$$

ist nach (34) erfüllt.

Gehen wir nun umgekehrt von einem Vektor  $\mathfrak{X}(u, v)$  aus, für den (42) gilt und  $(\mathfrak{X}\mathfrak{X}_u\mathfrak{X}_v) \neq 0$  ist, so erhält man durch die Integration (40) die zugehörige Fläche  $\mathfrak{r}(u, v)$ , auf der die  $u, v$ -Linien Asymptotenlinien sind.

Das sind die von Lelievre 1888 entdeckten Formeln, die hier ihren richtigen Platz bekommen.

### § 9. Affinminimalflächen.<sup>4)</sup>

Das einfachste gegenüber inhaltstreuen Affinitäten invariante Oberflächenintegral ist

$$(43) \quad \Omega = \int |LN - M^2|^{\frac{1}{4}} du dv = \int M^{\frac{1}{2}} du dv,$$

wobei der mittlere Ausdruck allgemein, der letzte nur für Asymptotenparameter auf hyperbolisch gekrümmten Flächen gilt.  $\Omega$  nennen wir die *Affinoberfläche* und führen als *Affinminimalflächen* die Extremalen des Variationsproblems  $\delta\Omega = 0$  ein.

Variiert man unsere Ausgangsfläche  $\mathfrak{r}(u, v)$  in der Form

$$(44) \quad \mathfrak{r}(u, v) + \delta n \cdot \tilde{\mathfrak{r}}(u, v),$$

so findet sich für die erste Variation von  $\Omega$  bei in geeigneter Weise festgehaltenem Rand

$$(45) \quad \delta\Omega = -\frac{3}{2} \int \delta n \cdot H \cdot d\Omega.$$

Die gesuchten Affinminimalflächen sind also durch das Verschwinden der mittleren Affinkrümmung ( $H = 0$ ) gekennzeichnet, genau wie die gewöhnlichen Minimalflächen durch verschwindende mittlere Krümmung.

Wenn  $H = 0$  ist, ergibt sich aus der mittleren Formel (43)  $\mathfrak{X}_{uv} = 0$  oder

$$(46) \quad \mathfrak{X} = \mathfrak{U}(u) + \mathfrak{B}(v).$$

<sup>4)</sup> Blaschke, AG XXXIII.

Dann ist die Bedingung (42) erfüllt, und aus (40) folgt für die Affinminimalflächen die Integraldarstellung

$$(47) \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{u} + \int \mathfrak{u} \times d\mathfrak{u} - \int \mathfrak{B} \times d\mathfrak{B}.$$

Damit ist eine Darstellung der Affinminimalflächen gefunden, die sich auch leicht integrallos schreiben läßt, das Gegenstück zur Integrations-theorie von Monge und Weierstraß für Minimalflächen. Die Flächen (47) sind unter anderm Gesichtspunkt von Darboux und P. Franck studiert worden.

Als Seitenstück zu gewissen Formeln von H. A. Schwarz für Minimalflächen (1874) lassen sich hier leicht die Formeln herleiten:

$$(48) \quad \begin{aligned} 2\mathfrak{u} &= \mathfrak{x} - \int \mathfrak{x} \times d\mathfrak{x}, \\ 2\mathfrak{B} &= \mathfrak{x} + \int \mathfrak{x} \times d\mathfrak{x}. \end{aligned}$$

Darin ist aber die Lösung des Randwertproblems enthalten: *Eine Affinminimalfläche durch eine Kurve zu legen, wenn längs der Kurve der Affinminimalvektor vorgeschrieben ist.* Es erscheint uns recht auffallend, daß sich das Randproblem für unsre Differentialgleichung  $H = 0$ , die von vierter Ordnung und nicht linear ist, ebenso einfach lösen läßt wie Schwarz die Aufgabe von Björling erledigt hat, eine Minimalfläche durch einen gegebenen „Streifen“ zu legen. Mittels (48) gelingt auch leicht die Lösung der Aufgabe: Die Affinminimalflächen zu ermitteln, die gleichzeitig Drehflächen sind.

#### § 10. Ein isoperimetrisches Problem.<sup>5)</sup>

In gewissem Sinn das einfachste isoperimetrische Problem der affinen Raumgeometrie ist das folgende:

*Alle Eiflächen (= geschlossene konvexe Flächen) zu bestimmen, die bei vorgeschriebenem Rauminhalt  $V$  möglichst große Affinoberfläche  $\Omega$  (§ 9) besitzen.*

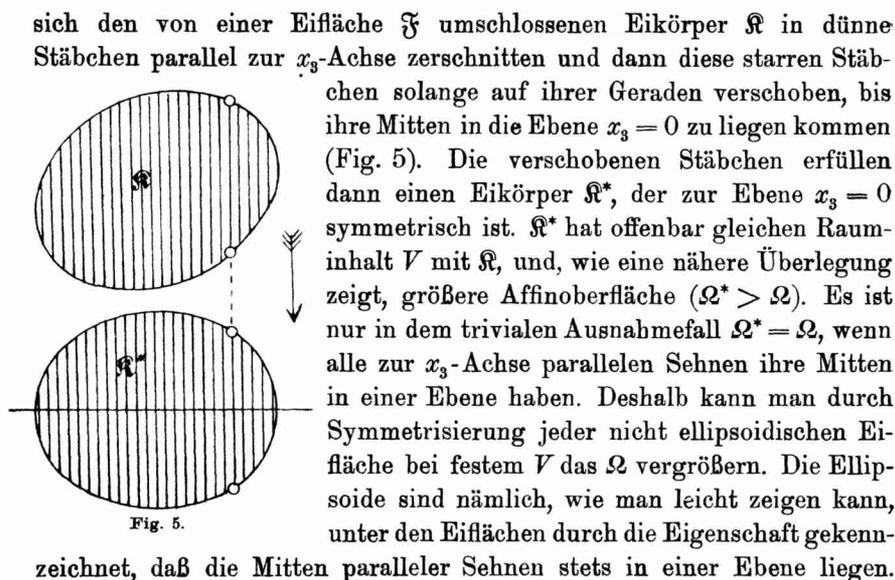
Es handelt sich hier um das affine Gegenstück zur Aufgabe, einen Körper gegebenen Rauminhalts mit kleinster Oberfläche zu ermitteln. Wir wollen zeigen: *Zwischen  $V$  und  $\Omega$  besteht die Beziehung:*

$$(49) \quad 12\pi V - \Omega^2 \geq 0$$

*und nur dann =, wenn die Eifläche ein Ellipsoid ist.*

Der *Einzigkeitsbeweis* kann am einfachsten mittels Steiners *Symmetrisierung* geführt werden. Darunter versteht man folgendes. Man denkt

5) Blaschke, AG I, V und VI; Winternitz AG XXXIV.



sich den von einer Eifläche  $\mathfrak{F}$  umschlossenen Eikörper  $\mathfrak{R}$  in dünne Stäbchen parallel zur  $x_3$ -Achse zerschnitten und dann diese starren Stäbchen solange auf ihrer Geraden verschoben, bis ihre Mitten in die Ebene  $x_3 = 0$  zu liegen kommen (Fig. 5). Die verschobenen Stäbchen erfüllen dann einen Eikörper  $\mathfrak{R}^*$ , der zur Ebene  $x_3 = 0$  symmetrisch ist.  $\mathfrak{R}^*$  hat offenbar gleichen Rauminhalt  $V$  mit  $\mathfrak{R}$ , und, wie eine nähere Überlegung zeigt, größere Affinoberfläche ( $\Omega^* > \Omega$ ). Es ist nur in dem trivialen Ausnahmefall  $\Omega^* = \Omega$ , wenn alle zur  $x_3$ -Achse parallelen Sehnen ihre Mitten in einer Ebene haben. Deshalb kann man durch Symmetrisierung jeder nicht ellipsoidischen Eifläche bei festem  $V$  das  $\Omega$  vergrößern. Die Ellipsoide sind nämlich, wie man leicht zeigen kann, unter den Eiflächen durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß die Mitten paralleler Sehnen stets in einer Ebene liegen.

Schwieriger ist der *Existenzbeweis*. Da läßt sich der Beweis von Schwarz (1884) für die isoperimetrische Haupteigenschaft der Kugel auf die Affingeometrie übertragen (Blaschke, AG VI). Schöner und einfacher führt aber ein Verfahren von Winternitz (AG XXXIV) zum Ziel. Zunächst benutzt Winternitz den von Blaschke und W. Groß gefundenen Satz, daß man einen Eikörper durch wiederholtes Symmetrisieren in einen neuen überführen kann, der innerhalb eines Ellipsoids liegt, das einen nur beliebig wenig größeren Rauminhalt hat als der Ausgangseikörper. Dann zeigt Winternitz mittels einer einfachen Ungleichheit von Jensen: *Liegt ein Eikörper ganz innerhalb eines Ellipsoids, so ist seine Affinoberfläche kleiner als die des Ellipsoids*. In diesen beiden Sätzen ist das gewünschte Ergebnis enthalten.

### § 11. Affinsphären.

Nach Radon nennt man Affinsphären alle die Flächen, deren Affinormalen durch einen festen Punkt gehen. Unter andern Gesichtspunkten ist diese Flächenfamilie von Demoulin, Titzéica und neuerdings von Jonas behandelt worden. Das Hauptproblem über Affinsphären ist das folgende (Blaschke AG V, XII; Radon AG XVI): *Alle affinsphärischen Eiflächen zu ermitteln*. Wegen der in § 7 gegebenen Deutung der Affinormalen als Tangenten an die Schwerlinien läßt sich die Antwort auf unsre Frage in sehr anschaulicher Weise fassen:

*Die einzigen affinsphärischen Eiflächen sind die mit lauter geraden Schwerlinien, die Ellipsoide.*

Sind nämlich die Schwerlinien grad, so gehen sie alle durch den Schwerpunkt, und durch den gehen dann auch alle Affinnormalen der den Eikörper begrenzenden Eifläche; aber auch die Umkehrung ist richtig.

Bei einer Affinsphäre sind nämlich, wie man etwa mittels der Formeln von § 6 zeigen kann, die affinen Hauptkrümmungen gleich und konstant. Also ist auch die mittlere Affinkrümmung  $H = \text{konst.}$   $H = \text{konst.}$  ist aber die Differentialgleichung der Extremalen des isoperimetrischen Problems von § 10 und mittels Steiners Symmetrisierung läßt sich zeigen (Blaschke AG V):

*Die einzigen Eiflächen mit festem  $H$  sind die Ellipsoide.*

Es ist das ein affines Gegenstück zum Satz von Liebmann, daß die Kugeln die einzigen geschlossenen Flächen mit fester mittlerer Krümmung sind.<sup>6)</sup>

## § 12. Andere besondere Flächen.

Unter den Affinsphären spielen eine besondere Rolle die „*uneigentlichen Affinsphären*“, bei denen alle Affinnormalen parallel laufen. Sie sind gleichzeitig besondere Affinminimalflächen (§ 9), und ihre Differentialgleichung läßt sich auf die einfache Gestalt bringen.

$$(50) \quad \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_2^2} - \left( \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 = \text{konst.}$$

Die Darstellung der Lösungen dieser Differentialgleichung, die sich durch Spezialisierung aus (47) ergibt, ist längst bekannt.

Die projektiven Verallgemeinerungen sind von Wilczynski als „*Flächen mit unbestimmten Direktrixkurven*“ untersucht worden, und H. Behnke hat kürzlich gezeigt, daß sie spezielle Extremalen des projektivinvarianten Variationsproblems

$$(51) \quad \delta \int J \cdot d\Omega = 0$$

sind, daß man sie also mit unter die „*Projektivminimalflächen*“ zu zählen hat.

Bei *windschiefen Flächen* lassen sich leicht die mit festem  $H$  angeben und, wie Radon (AG XVII) gefunden hat, die Affinsphären.

Eine andere affininvariante Flächenklasse sind die *Translations-* oder *Schiebflächen*, die entstehen, wenn eine Kurve  $C_1$  längs einer zweiten Kurve  $C_2$  parallel zu ihrer Ausgangslage verschoben wird. Es liegt

<sup>6)</sup> Vgl. etwa Blaschke, Differentialgeometrie I, § 76, S. 130, Berlin bei J. Springer, 1921.

offenbar nahe, nach solchen Schiebflächen zu fragen, deren affine Differentialinvarianten besondere Eigenschaften haben, etwa nach allen Affinsphären unter ihnen usw. Die Beantwortung dieser Frage hatte ihre eigenen Schwierigkeiten, weil eine affininvariante Charakterisierung der Schiebflächen im Kleinen, eine Differentialgleichung für sie nicht bekannt war. Aber es gelingt in der Tat, ein allerdings recht kompliziertes System von zwei simultanen Differentialgleichungen 5. Ordnung für sie aufzustellen, und mit diesem Hilfsmittel lassen sich alle windschiefen und alle affinsphärischen Schiebflächen ermitteln (Reidemeister AG XXXV). Es ergibt sich nämlich:

Die windschiefen Schiebflächen sind: das elliptische und das hyperbolische Paraboloid und die Sehnenmittenflächen der Raumkurven mit konstanter Affinkrümmung und verschwindender Affintorsion, der kubischen Parabel

$$x_1 = s, \quad x_2 = \frac{1}{2}s^2, \quad x_3 = \frac{1}{6}s^3,$$

der gemeinen Schraubenlinien ( $x_1 = s, \quad x_2 = \sin s, \quad x_3 = \cos s$ ) und der Kurve ( $x_1 = s, \quad x_2 = \sin \text{hyp } s, \quad x_3 = \cos \text{hyp } s$ ). — Die affinsphärischen Schiebflächen sind das elliptische und das hyperbolische Paraboloid und die Sehnenmittenfläche der kubischen Parabel.

Aus dem zweiten Satz läßt sich eine merkwürdige neue Kennzeichnung der eigentlichen Affinsphären gewinnen: es sind die einzigen Flächen mit konstanten endlichen affinen Hauptkrümmungsradien.

Einige Ergebnisse wurden ferner erzielt über die Flächen verschwindenden Affinkrümmungsmaßes ( $K = 0$ ) und über die Flächen, deren Affinnormalen ein  $W$ -Strahlensystem bilden. Kennzeichnende Eigenschaften der Strahlensysteme, die Affinnormalen einer Fläche bilden, sind bisher noch nicht gefunden. Es ist das ein Problem, das durch den großen Umfang der dabei auftretenden Rechnungen nicht leicht zugänglich zu sein scheint.

### § 13. Weitere Eigenschaften von Ellipse und Ellipsoid.

Zunächst seien zwei kennzeichnende Eigenschaften der Ellipse erwähnt (Blaschke AG III, W. Groß AG XIII):

*Zwischen dem Flächeninhalt  $F$  und dem Inhalt  $\Delta$  des größten eingeschriebenen Dreiecks besteht bei jedem Eibereich die Beziehung*

$$(52) \quad 4\pi \Delta - \sqrt{3} F \geq 0,$$

*und zwar nur dann = 0, wenn der Eibereich von einer Ellipse begrenzt wird.*

Es seien ferner  $p_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) drei Punkte in einem Eibereich  $\mathfrak{B}$ ,  $|p_1 p_2 p_3|$  die absolut genommene Dreiecksfläche mit den Ecken  $p_i$  und  $dF_i$  das Flächenelement in  $p_i$ , endlich  $G$  das Integral

$$(53) \quad G = \int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}} |p_1 p_2 p_3| \cdot dF_1 \cdot dF_2 \cdot dF_3.$$

Dann gilt (Blaschke AG XI): *Zwischen dem Flächeninhalt  $F$  eines Eibereichs und dem zugehörigen Integral  $G$  bestehen die Beziehungen*

$$(54) \quad \frac{3}{1} \frac{5}{2\pi^2} \leq \frac{4G}{F^4} \leq \frac{1}{3},$$

und zwar gilt links das Gleichheitszeichen nur für die Ellipsen, rechts nur für die Dreiecke.

Das wesentliche Hilfsmittel zum Nachweis der Beziehungen (52) und (54) ist Steiners Symmetrisierung (§ 10). In Zusammenhang mit dem Integral  $G$  und dessen erster Variation sei folgende Integralgleichung für die Ellipsen erwähnt (Blaschke AG XIX):

*Hat für alle Randpunkte  $p$  eines Eibereiches  $\mathfrak{B}$  das Integral*

$$(55) \quad \int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}} |p p_1 p_2| \cdot dF_1 \cdot dF_2$$

den gleichen Wert, so ist  $\mathfrak{B}$  eine Ellipse.

Dann eine kennzeichnende Eigenschaft der Flächen zweiter Ordnung, von der schon Brunn einen Sonderfall bewiesen hatte (Blaschke AG XXII):

*Haben alle ebenen Schnitte einer elliptisch gekrümmten Fläche einen Mittelpunkt, so ist die Fläche von zweiter Ordnung.*

Schließlich noch den folgenden Satz (Blaschke AG XXVIII): *Berühren alle einer nicht parabolisch gekrümmten Fläche umschriebenen Zylinder die Fläche längs ebener Kurven, so ist die Fläche von zweiter Ordnung.*

Es hängt das damit zusammen, daß die einzigen Variationsprobleme, bei denen die Transversalitätsbedingung symmetrisch ist, die Gestalt haben

$$(56) \quad \delta \int V \Sigma a_{ik}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i dx_k = 0.$$

#### § 14. Zur Statik.

Damit wollen wir die Flächentheorie und überhaupt die Betrachtungen über Differentialgeometrie im engern Sinn schließen und noch eine Bemerkung anfügen, die mit dem Vorhergehenden nur scheinbar

wenig zu tun hat. Ein großer Teil der Statik (insbesondere der graphischen Statik) und der damit in Zusammenhang stehenden infinitesimalen Kinematik gehört nämlich in die Affingeometrie, manches sogar in die projektive Geometrie.

Wir wollen das an einem einfachen Beispiel erläutern. Denken wir uns ein „Stabwerk“ hergestellt, das aus starren Stäben gebildet ist, die in den Enden durch Kugelgelenke verbunden sind. Und zwar besteht unser Stabwerk aus acht (vielleicht ungleichen) Stäben, die zu je vier in sechs Gelenken zusammenstoßen, so wie die Kanten eines regelmäßigen Achtecks in den sechs Ecken des Achtecks.

Wir fragen: Wann läßt unser Stabwerk Selbstspannungen zu? Wann können also in dem Stabwerk Spannungen herrschen, ohne daß auf das System äußere Kräfte einwirken? Gleichwertig ist damit die andere Frage: *Wann ist das Stabwerk wackelig?* D. h.: Wann läßt es infinitesimale Verrückungen zu, die keine Bewegungen sind.

Man muß dann zu unserm Stabwerk einen reziproken Kräfteplan herstellen können, der aus einem geschlossenen Kantensystem besteht, der dem Stabwerk durch Parallelismus entsprechender Kanten entspricht und so, daß jedem Knoten (Gelenk) des einen Kantensystems ein geschlossener Kantenzug in dem anderen entspricht.

Bei unserm Beispiel läßt sich die Bedingung für die Wackeligkeit leicht geometrisch formulieren. Denken wir uns die acht Dreiecke unsres Stabwerks „abwechselnd“ blau und rot bemalt, so müssen die vier blauen Dreiecksebenen (oder ihre Verlängerungen) durch einen Punkt gehen und (daher) auch die vier roten (Blaschke AG XXVI).

Wegen des angedeuteten Zusammenhangs zwischen Kinematik und Statik ist in dem Satz von Cauchy (1813) über die Starrheit der konvexen Vielfache der folgende Satz enthalten:

*Ein Stabwerk bestehe aus den Kanten eines konvexen Vielfachs, dessen Seitenflächen etwa nur Dreiecke sein mögen. Dann können in diesem Stabwerk niemals Spannungen herrschen.*

Macht man von den Vielfachen den Grenzübergang zu krummen Flächen, so kommt man von hier aus zu der von Liebmann, Minkowski, Hilbert, Blaschke und Weyl behandelten Frage der Starrheit der Eiflächen, also wiederum zur Flächentheorie zurück.

Ein anderer, verwandter Fragenkreis betrifft die infinitesimale Formänderung von Flächen unter Invarianz der quadratischen Grundform  $\varphi$  (17). Da zeigt sich z. B., daß ein Ellipsoid außer den trivialen keine andern derartigen Formänderungen gestattet (Blaschke, AG XXXVI).

## § 15. Eine Frage.

Die Affingeometrie, insbesondere die affine Flächentheorie ist noch jung und noch nicht so gründlich abgegrast wie viele andere Zweige der Mathematik; es gibt da noch manche anziehende Aufgaben, die des sauren Schweißes der Geometer würdig zu sein scheinen. Auf eine solche Fragestellung sei hier zuguterletzt noch hingewiesen.

Brunn und Minkowski haben die Linearkombination der Eikörper eingeführt. Es seien  $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$  zwei Eikörper, dann erklärt man den Eikörper

$$(57) \quad \mathfrak{R} = \lambda_1 \mathfrak{R}_1 + \lambda_2 \mathfrak{R}_2 \quad (\lambda_i > 0)$$

so: Es sei  $\mathfrak{r}_i$  der Vektor, der von einem Ursprung  $\mathfrak{o}$  nach einem Punkt  $\mathfrak{z}_i$  von  $\mathfrak{R}_i$  führt, dann durchläuft der Endpunkt des Vektors

$$(58) \quad \mathfrak{z} = \lambda_1 \mathfrak{z}_1 + \lambda_2 \mathfrak{z}_2$$

den Eikörper  $\mathfrak{R}$ , wenn die  $\mathfrak{z}_i$  die  $\mathfrak{R}_i$  durchlaufen. Bei Änderung des Ursprungs  $\mathfrak{o}$  verschiebt sich im allgemeinen  $\mathfrak{R}$  parallel.

Die einfachsten Eikörper sind die Strecken. Es fragt sich nun: Welche Eikörper kann man aus endlich vielen Strecken linear kombinieren? Es zeigt sich, daß es die konvexen Vielfache sind, deren Seitenflächen alle einen Mittelpunkt haben. In der beigegebenen Figur 6 ist ein Eikörper dargestellt, der sich aus vier Strecken kombinieren läßt.

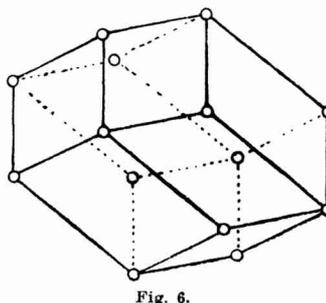


Fig. 6.

Nicht so einfach scheint die Frage zu sein: *Welche Eikörper kann man aus unendlich vielen Strecken durch (positive!) Linearkombinationen herleiten? Kann man die begrenzenden Eiflächen infinitesimal-geometrisch, also durch Eigenschaften im unendlich kleinen kennzeichnen?*

Vielleicht wird das, worum es sich handelt, deutlicher, wenn wir Formeln hinschreiben. Einen Eikörper oder eine begrenzende Eifläche kann man durch Angabe einer Funktion  $H(\xi)$  auf der Einheitskugel  $\xi^2 = 1$  kennzeichnen, indem man die Entfernung  $H$  der Stützebene (Tangentenebene) als Funktion des Einheitsvektors der (äußeren) Flächennormalen  $\xi$  angibt. Die Linearkombination der Eikörper entspricht dann einfach der der zugehörigen „Stützfunktionen“

$$(59) \quad H(\xi) = \lambda_1 H_1(\xi) + \lambda_2 H_2(\xi).$$

Die Stützfunktion einer geeignet gewählten Strecke mit der Richtung  $\eta$  ist  $H(\xi) = |\xi \cdot \eta|$ , wenn  $\xi \cdot \eta$  wieder das skalare Produkt andeutet. Wir

können also einen Eikörper aus unendlich vielen Strecken so kombinieren, indem wir seine Stützfunktion  $H$  mittels des „Kernes“  $|\xi \cdot \eta|$  und einer *positiven* Funktion  $G(\eta)$  auf der Einheitskugel  $\eta^2 = 1$  darstellen:

$$(60) \quad H(\xi) = \int |\xi \cdot \eta| \cdot G(\eta) \cdot d\omega_\eta.$$

Dabei bedeutet  $d\omega_\eta$  das Flächenelement der Kugel an der Stelle  $\eta$ , und die Integration ist über die ganze Kugel  $\eta^2 = 1$  zu erstrecken.

Bei vorgeschriebenem geradem  $H$  ( $H(-\xi) = H(+\xi)$ ) läßt sich die Integralgleichung (60) leicht nach  $G$  auflösen, z. B. mittels Kugelfunktionen.<sup>7)</sup> Aber im allgemeinen wird  $G$  nicht durchweg  $\geq 0$  ausfallen. Unsre Frage kommt nun darauf hinaus, ob sich die Funktion  $H$  im unendlich kleinen so festlegen läßt, daß sicher  $G \geq 0$  wird. Allerdings ist bei der jetzigen Fassung die Tatsache verdunkelt, daß es sich um eine Frage der affinen Flächentheorie handelt.

Eine schwierige, ebenfalls mit der Linearkombination der Eikörper zusammenhängende Frage ist die nach einer *Basis für alle Eikörper*, so daß die Eikörper der Basis untereinander nicht linear abhängen und sich jeder Eikörper aus den Körpern der Basis durch positive Linearkombination herleiten läßt. Über verwandte algebraische Fragen hat A. Ostrowski in Jena 1921 vorgetragen.

Zum Schluß sei erwähnt, daß 1922 bei J. Springer eine zusammenfassende Darstellung der Affingeometrie erscheinen soll, als zweiter Band zu dem eben erschienenen ersten Bändchen der Differentialgeometrie.<sup>8)</sup>

Hamburg, Mathematisches Seminar.

(Eingegangen am 28. 9. 21.)

### Auszug aus einem Briefe von A. Ostrowski an L. Bieberbach.

. . . Bei der algebraischen Untersuchung, von der ich Ihnen kürzlich schrieb, handelt es sich um folgendes Problem: Es sei ein System von  $t$  linearen homogenen Gleichungen vorgelegt:

$$(a) \quad \sum_{\lambda=1}^i F_\lambda^{(\tau)}(x_1, \dots, x_k) X_\lambda(x_1, \dots, x_k) = 0 \quad (\tau=1, \dots, t),$$

wo  $F_\lambda^{(\tau)}$  Polynome in  $x_1, \dots, x_k$  sind,  $X_\lambda$  als Polynome in  $x_1, \dots, x_k$  gesucht werden. Dann folgt aus den fundamentalen Hilbertschen Ergebnissen, daß alle Lösungen des Gleichungssystems (a), sofern es über-

7) Vgl. Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig 1916, S. 154, 155.