

Werk

Titel: Die Übereinstimmung derjenigen beiden Summationsverfahren einer divergenten Reihe...

Autor: Bernstein, Felix

Jahr: 1919

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?37721857X_0028|log9

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Satz 21. Nach Einführung eines ν -dimensionalen $\nu + 1$ -Ecks als Bezugsfigur hat jedes ν -dimensionale $\nu + 1$ -Eck desselben ν -dimensionalen Raumes bestimmten Umlaufsinn.

Ist $01 \dots \nu$ Bezugsfigur, so hat $01 \dots \nu$ und jede durch gerade Permutation der Ecken entstehende Figur positiven, jede durch ungerade Permutation entstehende negativen Umlaufsinn. $0'1 \dots \nu$ hat negativen Umlaufsinn dann und nur dann, wenn zwischen 0 und $0'$ ein Punkt des $\nu - 1$ -dimensionalen Raumes ($1 \dots \nu$) liegt.

Zwei Figuren haben gleichen Umlaufsinn dann und nur dann, wenn die eine auf die andere bezogen positiven Umlaufsinn hat. Bei Änderung der Bezugsfigur bleiben alle Umlaufsinne gleich oder schlagen alle um, je nachdem die neue Bezugsfigur positiven oder negativen Umlaufsinn hatte.

Die Übereinstimmung derjenigen beiden Summationsverfahren einer divergenten Reihe, welche von T. E. Stieltjes und E. Borel herrühren.

Von FELIX BERNSTEIN in Göttingen.

In einer Note, welche in den Mathematischen Annalen¹⁾ erscheint:

Über das Integral „ $\int_0^\infty e^{-x^4} \cos tx \, dx$ “, habe ich gezeigt, daß dasselbe unendlich viele reelle Nullstellen besitzt, indem sich eine Methode, mittelst derer G. H. Hardy kürzlich die Existenz unendlich vieler Nullstellen der Zetafunktion mit der Abszisse $\frac{1}{2}$ bewiesen hat, in sinngemäßer Abwandlung auf den vorliegenden Fall übertragen ließ.

In der Absicht, diese Untersuchung einen Schritt weiter zu führen, ließ es sich nicht umgehen, ein Kriterium auszubilden dafür, daß ein Fourierintegral $\int_0^\infty f(t) \cos xt \, dt$ für alle $0 \leq x \leq \infty$ positiv, bezüglich niemals negativ ist.

Diese Frage ist analog der, durch die bekannten Arbeiten von C. Carathéodory zuerst gelösten, Frage nach den Bedingungen dafür, daß eine periodische Funktion, deren *Fourierkoeffizienten* gegeben sind, *positiv* ist, Bedingungen, die dank einer fundamentalen Bemerkung von Töplitz eine rein algebraische Form erhalten haben.²⁾ Ein gewisser Unterschied

1) Bd. 79, 3. Heft.

2) Den algebraischen Sinn der Bedingungen von Carathéodory hat E. Fischer festgestellt und zugleich rein algebraische Beweise gegeben.

der vorliegenden Frage gegenüber der letzten besteht indessen darin, daß, um den Bedingungen eine *explizite*, d. h. von willkürlich veränderlichen Funktionen freie Form zu geben (was in jeder Anwendung notwendig ist), Voraussetzungen *funktionentheoretischer* Natur über die Funktion $f(t)$, welche an Stelle des Koeffizientenschemas der von Töplitz gebildeten Hermiteschen bzw. quadratischen Form tritt, unbedingt erforderlich sind.

Um die hier notwendig werdenden Einschränkungen auf eine natürliche Weise zu gewinnen, empfiehlt es sich, einen scheinbaren Umweg über die reich ausgestaltete Kettenbruchtheorie von Stieltjes einzuschlagen, die infolge einer bekannten (Cauchy) Beziehung der Potenzmomente eines Fourierintegrals zu den Ableitungen der Kernfunktion $f(t)$ zu dem vorliegenden Problem in direkter Beziehung steht, und erst nachträglich einer von dieser unabhängigen Begründung herzustellen. Dies wird auch dadurch gerechtfertigt, daß in den meisten Fällen der Anwendung der Nachweis des Erfülltseins der algebraischen Bedingungen zwar unabhängig von der Kettenbruchtheorie gestaltet werden kann, aber doch erst durch diese in seinem Sinne voll verständlich wird.

Um die Kettenbruchtheorie von Stieltjes, die in neuerer Zeit durch wichtige Beiträge von Grommer, Markoff, Perron und Szasz vervollständigt worden ist, auf das vorliegende Problem anzuwenden, war es nötig, eine Untersuchung auszuführen, auf deren Wichtigkeit bereits E. Borel in seinem: *Leçons sur les Séries Divergentes* (§ 118) nachdrücklich hingewiesen hat, ohne daß, soweit mir bekannt, eine Bearbeitung erfolgt ist. Es war nötig, festzustellen, daß die Summation einer divergenten Reihe durch die Methoden von Borel und Stieltjes, soweit sie beide möglich, zu demselben Resultat führen. Es erweist sich dabei als wünschenswert, den Nachweis der Übereinstimmung auch auf die Verallgemeinerung der Summationsmethode von E. Borel auszuweiten, welche man Le Roy verdankt, und welche in den Arbeiten von Mittag-Leffler eine so fruchtbare Anwendung gefunden hat. Hierbei möchte ich bemerken, daß die von uns erledigte Frage auch von Le Roy in seiner großen Abhandlung¹⁾ gestreift wird, ohne jedoch der Beantwortung näher geführt zu werden.

Um die Bedeutung der Fragestellung für die Stieltjessche Theorie zu kennzeichnen, sei bemerkt, daß die nachgewiesene Übereinstimmung zur Folge hat, daß es möglich wird, den Gang der Ideen dahin umzukehren, daß der *positive Charakter* der Ausgangsfunktion, welcher bei Stieltjes vorausgesetzt wird, hier bei den der Borelschen Summier-

1) Sur les séries divergentes etc. Annales de la faculté des Sciences de Toulouse 2^e Sér. Bd. 2. 1900.

barkeit entsprechenden Voraussetzungen über die Ausgangsfunktion als das letzte Resultat der Entwicklung erscheint.

Um die folgenden Ausführungen verständlich zu machen, sind die Resultate von Stieltjes kurz zusammengestellt.

Wir gehen aus von einer unendlichen Reihe mit reellen positiven Koeffizienten c_n

$$(1) \quad \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{c_{n-1}}{z^n} + \dots = R(z),$$

welcher Stieltjes einen Kettenbruch

$$(2) \quad \frac{1}{a_1 z} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3 z} + \frac{1}{a_4} + \dots = k(z)$$

zur Seite stellt. Dieser Kettenbruch existiert dann und nur dann, wenn die durch folgende Festsetzungen

$$(3) \quad A_n = \begin{vmatrix} c_0, c_1, & \dots, c_{n-1} \\ c_2, c_3, & \dots, \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1}, c_n, & \dots, c_{2n-2} \end{vmatrix}; \quad B_n = \begin{vmatrix} c_1, c_2, & \dots, c_n \\ c_2, c_3, & \dots, c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n, c_{n+1}, & \dots, c_{2n-1} \end{vmatrix}; \quad A_0 = B_0 = 1$$

definierten Determinanten A_n und B_n von Null verschieden sind, und die Beziehung der formal gegebenen Reihe zum Kettenbruch (2) ist diese, daß

$$(4) \quad a_{2n} = \frac{A_n^2}{B_n B_{n-1}}; \quad a_{2n+1} = \frac{B_n^2}{A_n A_{n+1}}$$

ist. Bei dieser Festsetzung stimmt der n -te Näherungsbruch P von (2)

$$(5) \quad \frac{P_n}{Q_n} = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{c_{n-1}}{z^n} + (-1)^n \frac{d_n^2}{z^{n+1}} + (-1)^{n+1} \frac{d_{n+1}^2}{z^{n+2}} + \dots$$

mit der Reihe (1) bis zur Potenz z^{-n} einschließlich überein.

Unmittelbar erkennt man aus (4), daß

$$(6) \quad A_n > 0; \quad B_n > 0$$

die notwendigen und zureichenden Bedingungen dafür sind, daß

$$(7) \quad a_n > 0$$

ist. Es ist nun ein schon von Stern bewiesenes Theorem, daß der Kettenbruch (1) konvergiert oder oszilliert, je nachdem die unendliche Reihe

$$(8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

divergiert oder konvergiert. Im ersteren Falle läßt sich nach einem überaus sinnreichen Verfahren, welches Stieltjes erfunden hat, eine positiv wachsende Funktion $\psi(u)$ konstruieren, die im einfachsten Falle an jeder Stelle eine positive Ableitung $\varphi(u)$ besitzt, im allgemeinen jedoch stets unendlich viele Wachstumsstellen besitzt, und für welche das Integral

$$(9) \quad J = \int_0^{\infty} \frac{\psi(u) du}{(z+u)^2} = \int_0^{\infty} d\psi(u) \frac{1}{z+u}$$

gleich dem konvergenten Kettenbruch (2) wird.¹⁾

Hierbei kann die zweite Form des Integrals, statt durch die erste auch direkt erklärt werden, und dieser Umstand gestattet, den allgemeinen Fall wie den speziellen zu behandeln, ein Verfahren, das auch in der Theorie der unendlichen quadratischen Formen und in der Wahrscheinlichkeitsrechnung seine Anwendung findet.

Man kann ferner beweisen, daß außer

$$(10a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = K(z) = J(z)$$

auch die Gleichung

$$(10b) \quad c_n = \int_0^{\infty} d\psi(u) u^n \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

besteht, so daß formal aus

$$(11) \quad J(z) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{z} - \frac{u}{z^2} + \frac{u^2}{z^3} - \dots \right) d\psi(u),$$

$$(12) \quad J(z) = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \dots$$

erscheint. Unter den Voraussetzungen (6) und (9) kommt man nun überein, der Reihe (1) den Wert $J(z)$ beizulegen. Das ist das Summationsverfahren, welches Stieltjes in Verallgemeinerung des Beispiels von Laguerre —

$$J = \int_0^{\infty} \frac{e^{-u} du}{z+u} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1 \cdot 2}{z^3} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{z^4} + \dots, \text{ ein Integral,}$$

welches dem konvergenten Kettenbruch

$$F = \cfrac{1}{z+1} - \cfrac{1}{z+3} + \cfrac{4}{z+5} - \cfrac{9}{z+7} + \cfrac{25}{z+9} - \dots$$

korrespondiert —, abgeleitet hat.

1) Das Integral linkerhand ist als Riemannsches Integral aufzufassen (vgl. Perron: Die Lehre von den Kettenbrüchen, Kap. IX, § 66.)

Die Größen a_n haben einen nicht hinreichend einfachen Ausdruck in den Koeffizienten c_n , um die Bedingung (9) als eine leicht handzuhabende erscheinen zu lassen. Daher hat sich schon Stieltjes bemüht, diese durch bequemere (unter Verzicht auf die Allgemeinheit und Notwendigkeit) zu ersetzen. Erreicht ist dies durch eine Arbeit von Perron¹⁾, welcher anknüpfend an eine Arbeit von Markoff, folgendes bewiesen hat: Wenn

$$(13) \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k!} c_{k-1}} = \varrho < \infty$$

ist, so ist unter (6) der in Rede stehende Kettenbruch konvergent und gleich dem Integral J .

Damit ist auch zugleich eine Lösung des Momentenproblems, d. h. der Lösung der unendlich vielen Gleichungen (10b) durch eine Funktion $\psi(u)$ der genannten Eigenschaften erzielt. Unter gleichen bzw. allgemeinen Bedingungen gibt Le Roy in der oben genannten Arbeit eine Lösung des so spezialisierten Problems durch explizite Formeln, deren Übereinstimmung mit der Lösung von Perron aus den Resultaten der folgenden Arbeit zu folgern sein wird.

In diesem Falle ist also eine Summation der Reihe (1) durch den Kettenbruch bezüglich durch das Integral J gegeben, deren Gültigkeit nach Stieltjes auf alle komplexen Werte mit Ausnahme der auf der negativen reellen Achse belegenen ausgedehnt werden kann.

Die Methode der Summation von Borel besteht nun andererseits darin, der Reihe (1), indem wir $1/z = \lambda$ setzen, die zu (14) assoziierte Reihe (15):

$$(14) \quad R(\lambda) = c_0 \lambda - c_1 \lambda^2 + c_2 \lambda^3 + \dots + (-1)^n c_n \lambda^{n+1} + \dots$$

$$(15) \quad F(\lambda) = \frac{c_0 \lambda}{1} - \frac{c_1 \lambda^2}{2!} + \frac{c_2 \lambda^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{c_n \lambda^{n+1}}{(n+2)!} + \dots$$

zuzuordnen, welche, in einer genügenden Umgebung des Nullpunktes als konvergent vorausgesetzt, die assoziierte Funktion $F(\lambda)$ definiert.

Man erhält (14) aus (15) formal, durch gliedweise Integration von

$$(16) \quad \int_0^\infty e^{-t} F(\lambda t) dt \quad \text{vermöge} \quad \int_0^\infty e^{-t} t^n dt = n!$$

Man setzt daher ferner die Konvergenz des Integrals (16) voraus, und bezeichnet unter diesen Annahmen die Reihe (14) als *summabel* und gibt ihr den Wert (16) als Summe. Durch gewisse Schwierigkeiten veranlaßt, sah sich Borel dazu geführt, den Begriff später einzuengen,

1) Math. Ann. Bd. LXXIV, H. 4, S. 546 ff.

und die Reihe (14) als „*absolut summabel*“ zu definieren, wenn das Integral (16) für die assoziierte Funktion $F(\lambda)$ und sogar für eine ausreichende Zahl von Ableitungen derselben *absolut* konvergiert.

Wir halten an dem Begriff *summabel* fest, bemerken aber, daß im vorliegenden Falle die Bedingung der absoluten Summabilität sich zugleich als bis zu jeder Ordnung der Ableitungen erfüllt zeigen wird.

Unsere Voraussetzung lautet also: Die assoziierte Reihe

$$(17) \quad c_0 \lambda - \frac{c_1 \lambda^2}{2!} + \frac{c_2 \lambda^3}{3!} - \dots$$

besitze einen Konvergenzradius ϱ , so daß

$$(18) \quad \frac{1}{\varrho} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{c_k}{k!}} < \infty \quad \text{ist.}$$

Da (13) eine Folge von (18) ist, so würde nach Perron bereits aus (18) die Konvergenz des Kettenbruchs folgen (was sich aus unserm Beweis noch in anderer Art ergeben wird).

Wir behaupten nunmehr das folgende *Theorem*. Unter den Voraussetzungen (6) und (18) ist die Reihe (1) (absolut) summabel, und es ist

$$(19) \quad \int_0^\infty e^{-t} F(t/z) dt = K(z) = J(z).$$

Beweis. Wir folgen zunächst der Analyse von Stieltjes. Aus der bekannten Darstellung des n -ten Näherungsbruchs

$$(20) \quad \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{1}{Q_0 Q_1} - \frac{1}{Q_1 Q_2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1} Q_n},$$

und den leicht folgenden Entwicklungen

$$(21) \quad \begin{aligned} \frac{1}{Q_0 Q_1} &= \frac{\varepsilon^{(1)}}{z} - \dots \\ - \frac{1}{Q_1 Q_2} &= * \varepsilon - \frac{\varepsilon_2^{(2)}}{z^2} + \frac{\varepsilon_3^{(2)}}{z^3} - \frac{\varepsilon_4^{(2)}}{z^4} + \dots \\ + \frac{1}{Q_2 Q_3} &= * - * * + \frac{\varepsilon_3^{(3)}}{z^4} - \frac{\varepsilon_4^{(3)}}{z^4} + \dots \end{aligned}$$

ergibt sich durch Addition die Gesamtdarstellung des n -ten Näherungsbruchs

$$(22) \quad \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \dots + (-1)^n \frac{c_{n-1}}{z^n} + (-1)^n \frac{c_n^{(\alpha_n)}}{z^{n+1}} + \dots,$$

wobei die α bei wachsendem n durch hinzukommende ε zu den c_n werden.

Nunmehr stellen, vermöge bekannter algebraischer Sätze, die Bedingungen (6) die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür dar, daß die Gleichungen $Q_n = 0$ nur reelle ($A_n > 0$) und insbesondere

positive ($B_n > 0$) Wurzeln besitzen. Dies hat unmittelbar zur Folge, daß in den Entwicklungen (21) alle Größen $\varepsilon_k^{(1)}$ (welche symmetrische Funktionen der Wurzeln von $Q_n Q_{n+1} = 0$ mit positiven Koeffizienten sind) die Ungleichung

$$(23) \quad \varepsilon_k^{(i)} > 0$$

erfüllen. Dem oben Gesagten zufolge, ergibt sich daraus sofort

$$(24) \quad \alpha_{n+p}^{(n)} < c_{n+p}.$$

Aus dieser Ungleichung folgt beiläufig in Verbindung mit unserer Voraussetzung (18) die Ungleichung

$$(25) \quad \frac{1}{\varrho_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{\alpha_{k-1}^{(n)}}{k!}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{c_{k-1}}{k!}} \quad \text{d. h.}$$

$$(26) \quad \varrho_n \geq \varrho,$$

wenn wir mit ϱ_n den Konvergenzradius der zu (22) assoziierten Reihe bezeichnen. Das ist jedoch kein wesentlicher Schluß, da wir uns auf die Tatsache berufen können, daß die assoziierte Funktion einer rationalen Funktion eine ganze transzendente ist.

Setzen wir nun jetzt

$$(27) \quad R_i = \sum_{k=i}^{\infty} \frac{\lambda^k c_{k-1}}{k!} (-1)^k, \quad S_i = \sum_{k=i}^{\infty} (\lambda)^k \frac{c_{k-1}}{k!},$$

$$R_i^{(n)} = \sum_{k=i}^{\infty} \lambda^k \frac{\alpha_{k-1}^{(n)}}{k!} (-1)^k,$$

indem wir die Koeffizienten in der für $\frac{P_n}{Q_n}$ gültigen Reihenentwicklung mit $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \dots$ bezeichnen, und wählen i so, daß, unter ε eine vorgegebene Größe verstanden,

$$(28) \quad |R_i| < S_i < \varepsilon \quad \text{für} \quad |\lambda| \leq \varrho' < \varrho$$

wird. Dann ist, vermöge

$$(24) \quad \alpha_{n-1}^{(n)} < c_{n-1},$$

$$(29) \quad |R_i^{(n)}| < S_i < \varepsilon$$

gleichmäßig für $|\lambda| \leq \varrho'$ und für alle $n > i - 1$.

Nun ist für $n > i$ vermöge (21) formal identisch

$$(30) \quad F(\lambda) - R_i \equiv L^{-1} \frac{P_n}{Q_n} - R_i^{(n)}(\lambda),$$

also mit Rücksicht auf (28) und (29)

$$(31) \quad \left| F(\lambda) - L^{-1} \frac{P_n}{Q_n} \right| < 2\varepsilon$$

für alle $n > i$ und alle $|\lambda| \leq \varrho'$.

Damit ist

$$(32) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} L^{-1} \frac{P_n}{Q_n} = F(\lambda)$$

gleichmäßig für $|\lambda| \leq \varrho'$ bewiesen.

Hiermit ist die Beziehung des Kettenbruchs zur Reihe bereits hergestellt. Wir ersetzen nunmehr den Kettenbruch durch das Stieltjessche Integral. Es ist nach den fundamentalen Festsetzungen von Stieltjes zu setzen

$$(33) \quad \frac{P_n}{Q_n} = \sum_{i=1}^n \frac{M_i^{(n)}}{z - z_i^{(n)}} = \int_0^\infty \frac{d\psi_n(u)}{u + z} = \int_0^\infty \frac{d\psi_n(u)}{u + \frac{1}{\lambda}} \quad \text{und}$$

$$(34) \quad \psi_n(u) = M_1^{(n)} + \dots + M_i^{(n)}, \quad \text{wenn } z_i^{(n)} < u < z_{i+1}^{(n)};$$

zu bemerken ist, daß alle M und z positiv, und daß $\sum M_i^{(n)} = 1$ ist. In dieser Schreibweise ist

$$(35) \quad L^{-1} \frac{P_n}{Q_n} = \lambda \int_0^\infty d\psi_n(u) e^{-u\lambda}$$

zu setzen, da

$$(36) \quad \lambda \int_0^\infty e^{-t} e^{-u\lambda t} dt = \frac{\lambda}{1 + u\lambda} = \frac{1}{z + u}$$

ist. Es ergibt sich ferner

$$(37) \quad \eta^{-1} F(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty d\psi_n(u) e^{-u\lambda} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \psi_n(u) du e^{-u\lambda}.$$

Aus $\sum M_i^{(n)} = 1$, folgt, daß die Ungleichungen

$$(38) \quad 0 < \psi_n(u) \leq 1 \quad \text{mit } \psi_n(0) = 0$$

zu schreiben sind.

Wir benutzen nunmehr zunächst das Theorem von O. Perron und schließen aus (18), daß der Kettenbruch (2) konvergiert. Wir folgern mit Stieltjes, daß es eine positiv wachsende Funktion $\psi(u)$ gibt, derart, daß

$$(39) \quad \lim |\psi_n(u) - \psi(u)| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq N$$

existiert, und daß ferner entsprechend (38)

$$(40) \quad 0 < \psi(u) \leq 1 \quad \psi(0) = 0$$

gilt. Demzufolge wird das Integral

$$(41) \quad J^* = \int_0^\infty d\psi(u) e^{-u\lambda} = \int_0^\infty d\psi(u) e^{-u\lambda} \cdot \lambda$$

offenbar für $\Re(\lambda) > 0$ *absolut* konvergent, und es ist stets

$$(42) \quad |J^*| = \int_0^\infty d\psi(u) e^{-u\lambda} < |\lambda| \int_0^\infty e^{-u\lambda} du = \frac{|\lambda|}{\Re(\lambda)}.$$

Ferner ist für $n_0 > N$

$$\int_0^\infty d\psi_n(u) e^{-u\lambda} - \int_0^\infty d\psi(u) e^{-u\lambda} < \varepsilon_1 \quad \text{vermöge}$$

$$\int_0^\infty du |\psi(u) - \psi_n(u)| |\lambda| e^{-u\lambda} < \frac{\varepsilon |\lambda|}{\Re(\lambda)} \quad \text{d. h.}$$

$$(42a) \quad \lambda^{-1} F(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty d\psi_n(u) e^{-u\lambda} = \int_0^\infty d\psi(u) e^{-u\lambda} = J^*.$$

Noch mehr, es ist auch das Integral

$$\int_0^\infty e^{-t} |J^*(\lambda t)| dt$$

sowie, bei jedem m , das Integral

$$(43) \quad \left| \int_0^\infty e^{-t} J^{(m)}(\lambda t) dt \right| = \int_0^\infty e^{-t} \left| \int_0^\infty du \psi(u) (-u)^m e^{u\lambda t u} \right| \\ \leq \int_0^\infty e^{-t} dt \int_0^\infty M(-u)^m |e^{-\lambda t u}| du,$$

also konvergent für $\Re(\lambda) = 0$.

Es existiert vermöge (42)

$$\int_0^\infty e^{-t} F(\lambda t) dt = \int_0^\infty e^{-t} dt \int_0^\infty du \psi(u) e^{-u\lambda} \cdot \lambda.$$

Infolge der Positivität der Integranden ist die Ordnung der Integration vertauschbar, und es ist also

$$(44) \quad \int_0^\infty e^{-t} F(\lambda t) dt = \int_0^\infty du \psi(u) \int_0^\infty e^{-t} \lambda e^{-u\lambda t} dt \quad \text{d. h.}$$

$$(45) \quad \int_0^\infty e^{-t} F(\lambda t) dt = \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{u + t} = J(z) = K(z) \quad \text{q. e. d.}$$

(43) zeigt überdies, daß die Reihe (1) *absolut* summabel ist.

Man kann die Benutzung des Satzes von Perron entbehrlich machen bzw. denselben unter der Voraussetzung (18) mitbeweisen, wenn man das allgemeinere Resultat von Stieltjes benutzt, daß nämlich unter

den Voraussetzungen (6) die Kettenbrüche mit geradem Index sowie die mit ungeradem Index für sich bestimmten Grenzen zustreben.

Diesen entsprechen bestimmte Grenzen $\Psi(u)$ und $X(u)$ der Funktionen $\psi_n(u)$. — Wir können nun die obigen Schlüsse offenbar für jeden der beiden Fälle durchführen und erhalten so die Übereinstimmung

des Borelschen Integrals $\int_0^\infty e^{-t} F(\lambda t) dt$ mit den beiden aus Ψ und X gebildeten Stieltjesschen Integralen einerseits, mit den beiden Grenzwerten der Kettenbruchnäherungsbrüche andererseits. Damit ist die Übereinstimmung der in Rede stehenden Grenzwerte und also die Konvergenz des Kettenbruchs erwiesen.

Wir *verallgemeinern* nunmehr den Nachweis der Übereinstimmung der beiden in Rede stehenden Summationsverfahren und erinnern zu diesem Zweck an einige bekannte Definitionen. Mit le Roy führen wir die assoziierte Reihe κ ter Ordnung

$$(46) \quad F_\kappa(\lambda) = \sum_0^\infty \frac{\lambda^{\kappa n} a_n}{(\kappa n)!} \quad \text{ein. Falls die Reihe}$$

$$(47) \quad R(z) = \sum_1^\infty \frac{a_n}{z^{n+1}}$$

konvergiert, ist vermöge der Formel

$$(48) \quad \frac{(\kappa n)!}{z^{n+1/\kappa}} = \frac{(\kappa n)!}{z^{1/\kappa(\kappa n+1)}} = \int_0^\infty e^{-z^{1/\kappa} \lambda} \lambda^{\kappa n+1} d\lambda,$$

$$(49) \quad \int_0^\infty F_\kappa(\lambda) e^{-z^{1/\kappa} \lambda} d\lambda = \sum_0^\infty \frac{a_n}{z^{n+1/\kappa}} = z^{1-1/\kappa} R(z).$$

Divergiert hingegen (47), konvergiert aber die Reihe (46) und stellt dieselbe überdies eine solche analytische Funktion dar, daß das Integral (49) ein Konvergenzgebiet G besitzt, so definiert das Integral (49) in G die Summe der divergenten Reihe (47). Wir bezeichnen die letztere in diesem Falle als *von dem Index κ summabel*.

Die *absolute Summabilität* werde wie oben dahin verstanden, daß wir das in Rede stehende Integral *absolut* konvergent annehmen und diese Annahme auch auf das mit den Ableitungen von $F_\kappa(\lambda)$ gebildete Integral (bis zu einer passenden Ordnung der Ableitungen) ausdehnen.

Es ist für unsere Zwecke notwendig, uns auf den Fall

$$(50) \quad \kappa \leq 2$$

zu beschränken.¹⁾ Für diesen Fall können wir einen Hilfssatz anwenden, welchen wir dem Werke „le Calcul des Residus“ von E. Lindelöf entnehmen (l. c. Kap. V, S. 120). Führen wir mit Mittag-Leffler die Funktion

$$(51) \quad E(x) = E_z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(zn)!}$$

ein, so gilt der folgende Hilfssatz:

Setzen wir $x = \varrho e^{i\theta}$, so geht in dem Winkelraum

$$(52) \quad \frac{\pi z}{2} + \varepsilon \leq \theta \leq 2\pi - \frac{\pi z}{2} - \varepsilon \quad (z < 2)$$

$E(x)$ (gleichmäßig) mit $1/x$ gegen Null. ε bedeutet eine beliebig kleine Größe.

In dem besonderen Falle $z = 2$ wird $E(x) = \cos \sqrt{-x}$, und wir können noch versichern, daß die Funktion für $\theta = \pi$, d. h. $\sqrt{-x} = \sqrt{\varrho}$ beschränkt bleibt.

Aus diesem Satze folgt, daß das Integral

$$(53) \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-z^{1/z}\lambda}}{z^{1-1/z}} E(\lambda) \cdot (-u)^{1/z} d\lambda,$$

wenn reeller Teil $(z^{1/z}) > 0$, absolut konvergiert. Die gliedweise Integration der im Integranden stehenden ständig konvergenten Reihe liefert aber mit Rücksicht auf (48) das Resultat

$$(54) \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-z^{1/z}\lambda}}{z^{1-1/z}} E(\lambda) \cdot (-u)^{1/z} d\lambda = \frac{1}{u + z},$$

insbesondere für $z = 2$ die bekannte Formel

$$(55) \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{z}\lambda}}{\sqrt{z}} \cos(\lambda\sqrt{u}) d\lambda = \frac{1}{u + z} \quad R(\sqrt{z}) > 0.$$

Wir formulieren nunmehr unser *Theorem II*. Es sei, wie früher

$$(6) \quad A_n > 0; \quad B_n > 0.$$

Ferner sei für

$$(50) \quad 0 < x < 2$$

die Funktion (46) im Nullpunkt regulär, d. h. es sei

$$(56) \quad \limsup \sqrt[n]{\frac{c_{n-1}}{(zn)!}} = \varrho^{-1} < \infty,$$

1) Es findet ein enger Zusammenhang statt zwischen dieser Tatsache und der erlaubten Größenordnung des Verschwindens einer „Fonction de Stieltjes“ im Unendlichen.

dann ist die Reihe (47) „von dem Index α summabel“, der ihr korrespondierende Kettenbruch konvergent, und es ist

$$(57) \quad K(z) = \int_0^{\infty} \frac{d\psi(u)}{z+u} = \int_0^{\infty} F_\alpha(\lambda) \frac{e^{-z^{1/\alpha}\lambda}}{z^{1-1/\alpha}} d\lambda,$$

wo $\psi(u)$ eine wie früher wachsende Funktion bedeutet.

Bezeichnen wir jetzt die assoziierte Reihe des n ten Näherungsbruches $\frac{P_n}{Q_n}$ des Kettenbruches mit $\mathfrak{B}_z^{-1} \frac{P_n}{Q_n}$, so ist, vermöge der Stieltjesschen Integraldarstellung

$$(58) \quad \frac{P_n}{Q_n} = \int_0^{\infty} \frac{d\psi_n(u)}{u+z},$$

wobei das Integral formal eine endliche Summe vertritt.

Aus (54) und (55) geht dann

$$(59) \quad \mathfrak{B}_z^{-1} \frac{P_n}{Q_n} = \int_0^{\infty} d\psi_n(u) E(\lambda(-u)^{1/\alpha})$$

hervor. Der eben zitierte Hilfssatz lehrt dann weiter, daß

$$(60) \quad \mathfrak{B}_z^{-1} \frac{P_n}{Q_n} \leq \int_0^{\infty} d\psi_n(u) E \leq \text{Konstant} \cdot \int_0^{\infty} d\psi_n(u) = \text{Konstant}$$

wird. Genau wie früher, beweisen wir nunmehr, daß

$$(61) \quad F_\alpha(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{B}_z^{-1} \frac{P_n}{Q_n}$$

für alle $\lambda \leq \rho' < \rho$ statt hat.

Infolge eines bekannten Satzes von Stieltjes (Vitali) hat die durch die Ungleichung (60) nachgewiesene Beschränktheit der $\mathfrak{B}_z^{-1} \frac{P_n}{Q_n}$ zur Folge, daß die Gleichung (61) für alle $0 < \lambda < \infty$ stattfindet. Es bleibt nur noch nachzuweisen, daß die Konvergenz der $\mathfrak{B}_z^{-1} \frac{P_n}{Q_n}$ nicht nur für alle $\lambda < \lambda_0$, wo λ_0 irgendeine positive Konstante $< \infty$ ist, sondern auch im unendlichen Intervall $0 < \lambda < \infty$ *gleichmäßig* stattfindet. Wir nehmen dies zunächst an und bemerken

1. das Integral $\int_0^{\infty} \frac{e^{-z^{1/\alpha}\lambda}}{z^{1-1/\alpha}} F_\alpha(\lambda) d\lambda$ konvergiert, da $F_\alpha(\lambda)$ zufolge (60)

und (61) absolut beschränkt bleibt, *absolut*.

2. in dem Integral

$$(62) \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-z^{1/\alpha}\lambda}}{z^{1-1/\alpha}} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{B}_z^{-1} \frac{P_n}{Q_n} d\lambda$$

sind die Grenzübergänge vertauschbar, wenn die gleichmäßige Konvergenz von (61) feststeht, da ja $\int_0^{\infty} \frac{e^{-z^{1/\kappa} \lambda}}{z^{1-1/\kappa}} d\lambda = \frac{1}{z}$ ist.

Damit ist aber die Behauptung bewiesen, denn es ist

$$(64) \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-z^{1/\kappa} \lambda}}{z^{1-1/\kappa}} F'_{\kappa}(\lambda) d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-z^{1/\kappa} \lambda}}{z^{1-1/\kappa}} \mathfrak{B}_{\kappa}^{-1} \frac{P_n}{Q_n}, \quad \text{also}$$

$$(65) \quad = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} \text{ q. e. d.}$$

Um den noch ausstehenden Beweis der gleichmäßigen Konvergenz zu erbringen, scheint es nicht zu vermeiden, die Grenzfunktion $\psi(u) = \lim \psi_n(u)$ einzuführen (wobei jedoch wie früher, wenn man den Satz von Perron (verallgemeinert für $\kappa > 1$) nicht benutzen will, freisteht, statt derselben die Funktion $\psi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(u)$ zu benutzen!)

Schreiben wir also

$$(66) \quad F_{\kappa}(\lambda) = \int_0^{\infty} d\psi(u) E(\lambda(-u)^{1/\kappa}) d\lambda,$$

wo also für ein $n > N$ bei gegebenem ε

$$(67) \quad \psi(u) - \psi_n(u) < \varepsilon$$

ist. Zum Zwecke des Beweises teilen wir das Integral, indem wir einen beliebigen Zwischenwert a annehmen, und zeigen zunächst, daß dieser Integralteil gleichmäßig approximiert wird, durch die folgenden Ungleichungen

$$(68) \quad \int_0^a d\psi E - \int_0^a d\psi_n E = \int_0^a du [\psi(u) - \psi_n(u)] E^1 \\ \leq \varepsilon \int_0^a du |E^1(\lambda(-u)^{1/\kappa})| \leq \varepsilon M a, \quad \text{wo}$$

$$(69) \quad M \text{ das absolute Maximum von } E^1(\lambda(-u)^{1/\kappa}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-n) \lambda^{\kappa n} (-u)^{n-1}}{\kappa n!}$$

für $0 \leq u \leq a$ und $0 \leq \lambda < \infty$ bedeutet. Daß dieses Maximum endlich ist, wird ebenso bewiesen wie der zitierte Hilfssatz.

Andererseits sei λ_0 so gewählt, daß für $\lambda > \lambda_0$

$$|E(-\lambda(-u)^{1/\kappa})| < \eta$$

bei vorgegebenem η sei. Dann ist für jedes n und auch für $n = \infty$

$$(70) \quad \int_0^{\infty} d\psi E < \eta \int_0^{\infty} d\psi < \eta \cdot c_0,$$

wo c_0 die frühere Bedeutung besitzt, so daß also dieses Integral bei hinreichend großem λ_0 zu vernachlässigen ist. Bei solcher Wahl von λ_0 kann man n einerseits so groß wählen, daß (68) erfüllt ist, andererseits so groß, daß für $\lambda \leq \lambda_0$ eine hinreichende Approximation ξ stattfindet, und damit ist die Summe $\varepsilon Ma + 2\eta c_0 + \xi$, welche von λ unabhängig ist, als Schranke der Differenz befunden.

Auf die Frage der Größenordnung des Verschwindens der Funktion $\psi(u)$ im Unendlichen und auf die Gründe, aus denen die Grenze $\kappa = 2$ nicht überschritten werden kann, gehe ich, da sie für die nächsten Zwecke entbehrlich sind, nicht mehr ein.

Die Mengenlehre Georg Cantors und der Finitismus.

Von FELIX BERNSTEIN in Göttingen.

Die natürlichen Schwierigkeiten, welche sich dem Verständnis tieferliegender Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik entgegenstellen, haben eine ganz besondere Folge. Trotz des allgemeinen Interesses, dessen diese Untersuchungen bei allen Mathematikern sicher sind, spielen sich doch die grundlegenden Auseinandersetzungen nur in dem verhältnismäßig kleinen Kreise ab, der sich auf alle Einzelheiten einzuarbeiten in der Lage ist, und es ist außerordentlich schwer, für jeden Nichtbeteiligten, ja, sogar selbst für den zeitweise Nichtbeteiligten den Überblick über den jeweiligen Stand der Frage zu behalten. In vielen Fällen werden auch dieselben Schwierigkeiten und Streitfragen in veränderter Form und Ausdrucksweise von neuem behandelt, ohne daß immer erkennbar ist, daß es sich wieder um dieselben Gegensätze dreht.

Aus diesen Gründen scheint es nicht unangemessen, wenn einmal der Versuch gemacht wird, unter Absehung von allem technischen Detail, dasjenige herauszuheben, was mit Worten und Begriffen gesagt werden kann, die einem jeden Mathematiker geläufig sind. Es wird dies um so mehr zum Bedürfnis, wenn es sich wie hier um Gegensätze handelt, bei denen der eine Teil sozusagen dem anderen die Existenzberechtigung abzusprechen geneigt ist. Dann muß der übrige Teil der Mathematiker sich ein Urteil bilden können, inwieweit eine solche kritische Bestreitung ihre Berechtigung hat. Es könnte allerdings sein, daß dazu ein Eingehen auf schwieriges Detail erforderlich sein würde, aber ich hoffe im folgenden zu zeigen, daß dies nicht der Fall ist. Das Werk Georg Cantors ist auf so klaren und sicheren Grundlagen errichtet, daß es von diesen aus erkannt werden kann, daß wohl eine Umbildung, wie sie in der Geschichte der Wissenschaften hinsichtlich