wo c_0 die frühere Bedeutung besitzt, so daß also dieses Integral bei hinreichend großem λ_0 zu vernachlässigen ist. Bei solcher Wahl von λ_0 kann man n einerseits so groß wählen, daß (68) erfüllt ist, andererseits so groß, daß für $\lambda \leqq \lambda_0$ eine hinreichende Approximation ζ stattfindet, und damit ist die Summe $\varepsilon M a + 2\eta c_0 + \zeta$, welche von λ unabhängig ist, als Schranke der Differenz befunden.

Auf die Frage der Größenordnung des Verschwindens der Funktion $\psi(u)$ im Unendlichen und auf die Gründe, aus denen die Grenze $\varkappa = 2$ nicht überschritten werden kann, gehe ich, da sie für die nächsten Zwecke entbehrlich sind, nicht mehr ein.

Die Mengenlehre Georg Cantors und der Finitismus.

Von FELIX BERNSTEIN in Göttingen.

Die natürlichen Schwierigkeiten, welche sich dem Verständnis tieferliegender Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik entgegenstellen, haben eine ganz besondere Folge. Trotz des allgemeinen Interesses, dessen diese Untersuchungen bei allen Mathematikern sicher sind, spielen sich doch die grundlegenden Auseinandersetzungen nur in dem verhältnismäßig kleinen Kreise ab, der sich auf alle Einzelheiten einzuarbeiten in der Lage ist, und es ist außerordentlich schwer, für jeden Nichtbeteiligten, ja, sogar selbst für den zeitweise Nichtbeteiligten den Überblick über den jeweiligen Stand der Frage zu behalten. In vielen Fällen werden auch dieselben Schwierigkeiten und Streitfragen in veränderter Form und Ausdrucksweise von neuem behandelt, ohne daß immer erkennbar ist, daß es sich wieder um dieselben Gegensätze dreht.

Aus diesen Gründen scheint es nicht unangemessen, wenn einmal der Versuch gemacht wird, unter Absehung von allem technischen Detail, dasjenige herauszuheben, was mit Worten und Begriffen gesagt werden kann, die einem jeden Mathematiker geläufig sind. Es wird dies um so mehr zum Bedürfnis, wenn es sich wie hier um Gegensätze handelt, bei denen der eine Teil sozusagen dem anderen die Existenzberechtigung abzusprechen geneigt ist. Dann muß der übrige Teil der Mathematiker sich ein Urteil bilden können, inwieweit eine solche kritische Bestreitung ihre Berechtigung hat. Es könnte allerdings sein, daß dazu ein Eingehen auf schwieriges Detail erforderlich sein würde, aber ich hoffe im folgenden zu zeigen, daß dies nicht der Fall ist. Das Werk Georg Cantors ist auf so klaren und sicheren Grundlagen errichtet, daß es von diesen aus erkannt werden kann, daß wohl eine Umbildung, wie sie in der Geschichte der Wissenschaften hinsichtlich älterer Theorien nicht selten erfolgt, denkbar ist, daß es aber gänzlich undenkbar ist, daß der wesentliche Inhalt desselben irgendwie zum Verschwinden gebracht werden kann.

Diejenige Richtung, welche am lebhaftesten und ausdauerndsten die Mengenlehre bestreitet, ist der logische und psychologische Finitismus. Diesem gegenüber möchte ich die allgemeinen Argumente geltend machen, welche die von ihm gegen die Mengenlehre gerichtete ablehnende Kritik meines Erachtens zu einer gegenstandslosen und unfruchtbaren gemacht haben.

Zunächst erinnere ich an einige bekannte Dinge. Als die Bildung gewisser paradoxer Mengenbegriffe anfing, Aufsehen zu erregen, trat sie durch ein zufälliges, aber glückliches Zusammentreffen unserer Anschauungen über die Grundlagen der Mathematik in eine Vorwärtsentwicklung, die wohl zu den größten gehört, die sie je erfahren hat.

Bis dahin war die Ansicht, die Kronecker klassisch scharf formulierte, daß eigentlich die ganze Mathematik in Sätzen über ganze Zahlen bestehe, d. h. daß jeder Satz in einen Satz über ganze Zahlen umgewandelt werden könne, zwar niemals durchgedrungen, aber doch die eigentliche Quintessenz der Anschauungen, welchen die meisten Mathematiker huldigten. Denn es ist kein Zweifel, daß die weitaus größte Zahl derselben der Ansicht war und möglicherweise auch heute noch ist, daß die Mathematik keinen Inhalt besitzt außer dem, was durch zahlenmäßige Rechnung *verifiziert* werden kann, worin man mit Hilfe der analytischen Geometrie auch schließlich alles Geometrische einschließen könne.

Daß diese Anschauung erweitert werden muß, um den wichtigsten Begriff der Geometrie, den *Grenzbegriff*, klarzustellen, hatte unter den Mathematikern des Altertums Zeno durch sein Paradoxon von Achilleus und der Schildkröte ad oculus demonstriert, Eudoxus als erster aller Mathematiker klar erkannt. Durch eine Theorie, die mit der Theorie des Schnittes von Dedekind wesentlich identisch ist, hat er den Grenzbegriff in mustergültiger Weise klargelegt. Der Versuch, diese Theorie durch eine lediglich den Begriff der ganzen Zahl und einen die in der Mathematik sonst üblichen Schlußweisen und Begriffe benutzenden Aufbau zu ersetzen, ist von Kronecker nicht einmal ernsthaft versucht worden; dagegen haben Le Roy und neuerdings E. Borel solche Versuche unternommen, sind aber genötigt gewesen, noch weit kompliziertere Begriffe einzuführen als die, welche sie zu vermeiden wünschten (wie z. B. den Begriff der endlich definierbaren Zahlen), und ihre Begriffe gehören unglücklicherweise zur Familie derer, denen man wegen möglicher Widersprüche mit Reserve gegenüberstehen muß.

Diese Versuche werden deshalb mit immer wiederholtem Eifer unternommen und haben den Beifall selbst derjenigen, welche sich entsetzen würden, dieselben auch nur zu studieren, weil sie sich mit einer philosophischen Überzeugung von sehr weitgehender Geltung identifizieren wollen, dem sogenannten *Finitismus*. Diese Anschauung sagt aus, daß sich nichts denken lasse, was nicht diskreten endlichen Charakter trägt und im Rahmen der Mathematik sieht sie diese Forderung allein im Begriff der ganzen Zahl verwirklicht. Daher leugnet sie alle Begriffe, welche eine Erweiterung dieser Begriffsbildung bedeuten wie den des Grenzbegriffs der unendlichen oder transfiniten Reihe *aus Prinzip*.

Die genaue Meinung ist, daß es eine Täuschung sei, zu glauben, daß derartige Begriffe überhaupt gedacht werden können. Was daher gedacht wird, ist entweder überhaupt nichts oder wenigstens etwas anderes, als beabsichtigt wird. Ich gestehe, nicht vollkommen verstanden zu haben, wie sich die Anhänger dieser Ansicht mit der Tatsache abfinden, daß über die verpönten Begriffe, z. B. der Zahlen der zweiten Zahlenklasse, eine ganze Literatur hat entstehen können, deren Schriftsteller sich trotz dieses intellektuellen Todesurteils nicht nur ohne Zögern und Schwierigkeiten verstehen, sondern auch vollkommen unabhängig voneinander die gleichen Resultate finden. Wenn es auch in der Geschichte der Wissenschaften nicht an Beispielen fehlt, wo man die materielle und metaphysische Gültigkeit wissenschaftlicher Konstruktionen bestritten hat, so kenne ich doch kein zweites Beispiel, wo man so weit gegangen wäre, zu bestreiten, daß die Gedanken selbst, die man bestreitet, denkbar sind — wenn ich von Fällen absehe, wo nicht zwei Anhänger derselben Richtung imstande gewesen sind, etwas Übereinstimmendes zuwege zu bringen —, so weit aber müssen die Finitisten der *exklusiven* Richtung, wie ich sie nennen will, gehen. Sie bleiben die Erklärung eines Phänomens schuldig, das zu den merkwürdigsten aller Zeiten gehören würde — wenn es bestände. Hier ist die Stelle, wo ich die Anschauungen von Poincaré berühren muß, der sich selbst als Finitist bekannt hat. Poincaré hat in seinen Anschauungen eine Entwicklung durchgemacht, welche historisch beleuchtet zu werden verdient. In seinen frühesten Aufsätzen zum Gegenstande, welche unter dem Titel „Letzte Gedanken" dem deutschen Publikum dargeboten worden sind, hat er einen exklusiv finitistischen Standpunkt eingenommen, den er nach eigenen Äußerungen von Hermite übernommen zu haben scheint, und mit einer nicht sehr eingehenden Leichtigkeit sucht er die entgegenstehenden Anschauungen halb widerlegend, halb ironisierend abzufertigen. Erst der andauernde konsequente Widerspruch, den er in den Polemiken mit Couturat, Russel und Zermelo erfuhr, veranlaßte ihn zu tieferem Eindringen, und seine vorletzte Publikation, der Vortrag in Göttingen, enthält nicht nur einen sehr hübschen, neuen Beweis der Nichtabzählbarkeit des Kontinuums, sondern auch in der Kardinalfrage der Existenz von $\aleph_1$ das Geständnis: ich bin nicht überzeugt, daß es existiert, aber ich sage nicht, daß es nicht existiert.

Nach diesem Finale kann ich Poincaré nicht mehr zu den exklusiven Finitisten rechnen.

Die Wahrheit ist, daß Poincaré die Unmöglichkeit erkannt hat, den finitistischen Standpunkt durch eine bloße Exklusivität gegenüber Begriffen und Resultaten durchzuführen. Er hat erkannt, daß es die Aufgabe, deren Beweislast dem Finitismus in der von ihm gewollten Form zufällt, sei, die genannten Begriffe und Resultate auf einem anderen, wenn auch schwierigerem Wege zu erlangen, und daß man den bisherigen Weg zum mindesten insoweit anerkennen müsse, als er in einer zwar nicht finitistischen Ausdrucksweise, doch zu Resultaten führt, die auch finitistisch ihre Bedeutung behalten müssen oder doch behalten können.

Damit würde aber der Finitismus von einer Wirklichkeit zu einem Glauben, von einer selbstverständlichen Grundlage zu einem zu erreichenden Ziel, das man nur durch eine mühsame Arbeit schließlich erreichen kann. Um etwa Verwandtes anzuführen, was den Sachverhalt vielleicht erläutert, so haben die Philosophen stets den Begriff der absoluten Bewegung verworfen und gelehrt, daß alle Bewegung relativ sei. An diesem Prinzip ist etwas Richtiges, aber um es widerspruchsfrei zu formulieren und durchzuführen, bedurfte es noch der Arbeit der Generationen von Galilei, Newton bis Einstein. Nicht viel schneller oder leichter dürfte man, wenn es überhaupt möglich ist, dazu gelangen, die Begriffe der Mathematik so umzugestalten, daß auch das Ideal verwirklicht wird, das heute den Finitisten vorschwebt, und zwar, wie ich noch mit einigen Worten ausführen möchte, äußerst verschwommen vorschwebt.

Der Gedankengang des Finitismus besteht etwa in folgenden Überlegungen. Nur endliche Mengen, deren Elemente Schritt für Schritt und abschließend definiert werden können, führen zu endlichen Begriffen. Unendliche Mengen sind nicht in dieser Weise und daher überhaupt nicht denkbar. Nun ist aber nie und nirgends und vor allem nicht in den klassischen Schriften Georg Cantors gefordert worden, daß unendliche Mengen Element für Element bis zum Ende gedacht werden sollen. Daß das unmöglich ist, darauf beruht ja gerade das alte Paradoxon von Achilleus und der Schildkröte. Eine Menge so zu denken, ist natürlich ebenso unmöglich, wie es nach Zeno unmöglich ist, daß Achilleus die Schildkröte erreicht.

Die Menge selbst wird vielmehr genau so gedacht, wie wir denken, daß Achilleus die Schildkröte erreicht, nämlich in einem einzigen Akt. Aber die Verbindung zwischen diesem Denkakt und der Vorstellung der unendlich vielen Stationen der Annäherung wird gegeben durch eine der tiefliegendsten Begriffsschöpfungen der Mathematik, durch den Begriff der *Grenze einer unendlichen Reihe*, welcher den Begriff der unendlichen Reihe als Menge von unendlich vielen Elementen impliziert. Die Verbindung zwischen den Elementen und der Menge ist durch einen endlichen und einheitlichen Denkakt gegeben. Ich habe geglaubt, dies ausführen zu sollen, um zu zeigen, daß wir in der Vorstellung der stetigen Bewegung über eine primitive Anschauung verfügen, welche dem Finitismus bereits die genau gleichen Schwierigkeiten bereiten müßte wie der Begriff der unendlichen Aleph. Es ist meine feste Überzeugung, daß, wenn das Paradoxon des Zeno nicht so alt wäre, es den konsequenten Finitisten auch heute noch als das interessanteste prinzipielle Problem erscheinen würde, sobald sie ihren Standpunkt ernstlich durchzuführen versuchten.

Allen denen aber, die mit Eudoxus, Cantor, Dedekind, Hilbert und Russel mitgedacht haben, erscheint der Sachverhalt als der folgende: die Menge, welche die Elemente vereinigt enthält, und entsprechend die Grenze einer Reihe ist ein logisch völlig neuartiges Ding, dessen Eigenschaften einer mathematisch exakten Festlegung bedürfen und fähig sind. In der Anwendung des Grenzbegriffs auf Geometrie treten diese Eigenschaften in der Form von Axiomen zutage, welche den Tatsachen der Erfahrung und Anschauung entsprechen. Die Lösung des Paradoxons von Zeno besteht also darin, daß ein komplexes Begriffssystem geschaffen wird, in welchem die Elemente einer Menge und die Menge selbst als völlig verschiedene Dinge, aber beide in einem endlichen Denkakt gedacht werden. Die Rechtfertigung des Denkens dieser Mengendinge beruht einzig und allein auf einem doppelten Erfolg, nämlich erstens darauf, daß die Eigenschaften derselben sich als widerspruchsfrei erwiesen, und zweitens darauf, daß die Folgerungen in Geometrie und Mechanik genau die gewünschte Konsequenz hatten, nämlich eine lückenlose Beziehung der Gebiete des Zählens und der geometrischen Anschauung aufeinander zu bewerkstelligen.

Der Finitismus, der diese klassisch gewordenen Gedankengänge überspringt, verkennt, daß hier der Ort ist, wo er in seiner rohesten Form schon vor 2000 Jahren eine entscheidende Niederlage erlitten hat, und daß er, um seinen extremsten Standpunkt die Verwerfung des

Begriffs der unendlichen Menge überhaupt zu rechtfertigen, beweisen muß, daß Achilleus die Schildkröte erreicht, auch wenn man über keine anderen Hilfsmittel des Schließens verfügt als über derartige, wie daß 2 mal $2 = 4$ ist. Die Lösung, welche Eudoxus fand, ist übrigens fernab von jeder Selbstverständlichkeit, und sie wäre ihm vermutlich nie gelungen, wenn ihn nicht der Zwang der geometrischen Erfahrung geleitet hätte.

Es gibt eine Gattung der Finitisten, welche bis hierher mitgehen und die Existenz abzählbarer Mengen zugestehen, dann aber Halt machen. Dies ist der Standpunkt, den ich am wenigsten verstehe. Nichts ist durch die ganze Entwicklung der Mathematik klarer geworden als die Tatsache, daß, soviel auch die Anwendungen dazu beigetragen haben, die Gedanken zu wecken und auf fruchtbare Bahnen zu lenken, trotzdem jeder Zweig der Mathematik völlig a priori und independent entwickelt werden kann. Wenn aber auch die Erfahrung nötigt, den Grenzbegriff und damit den Begriff der Menge von abzählbar vielen Elementen zu bilden, so ist klar, daß diese Bildung aus Prinzipien herausdemonstriert werden kann, welche von der Erfahrung unabhängige Entwicklungsmöglichkeiten bieten können. Gegenüber dem Riesenschritt, überhaupt erst einmal die Existenz einer unendlichen Menge zuzugestehen, ist es ein gewiß nicht ganz naheliegender, aber doch prinzipiell gar nicht neuer Schritt, den Begriff anderer nicht abzählbarer Mengen zu konzipieren. Ich sehe dabei ganz ab von den großen Schwierigkeiten, die da zu überwinden waren, und richte meinen Blick nur auf das Ganze der Entwicklung, und da muß ich gestehen, daß mir diejenigen, welche, nachdem sie einmal die Existenz des Grenzbegriffs und der abzählbaren Menge zugestanden haben, nun noch vor dem allgemeinen Mengenbegriff zurückscheuen, sehr den Leuten zu gleichen scheinen, die an den kleinen Gewohnheiten eines früheren Zustandes festhalten, nachdem sie bereits im ganzen in einen neuen Zustand übergegangen sind. Der Schritt Georg Cantors, nicht abzählbare Mengen zu konstruieren, hat in seiner Loslösung von dem Zwecke unmittelbarer Anwendungsfähigkeit auf Erfahrungsgebiete prinzipiell keinen anderen Charakter als etwa der Aufbau der nichteuklidischen Geometrie, der Geometrie in Räumen höherer Dimensionen, der Einführung komplexer und höherer komplexer Größen usw., Abstraktionen, die eine wesentliche Signatur des mathematischen Fortschrittes unserer Zeit darstellen!

Ich möchte aber vom mathematischen Finitismus nicht Abschied nehmen, ohne eines Geistesverwandten desselben zu gedenken, der mit ihm vielleicht vom gleichen Ursprung ist. Eine naive Psychologie, deren Einfluß auf Kant noch sehr deutlich ist, hat sich von je vorgestellt, das Denken des Menschen gehe vor sich in einer Reihe aufeinanderfolgender getrennter Akte, indem es ja unmöglich sei, zwei verschiedene Dinge zu gleicher Zeit zu denken. Danach also wäre die simultane Auffassung der Formen eines geometrischen Gebildes eine leere Täuschung. In Wahrheit müßte unser Geist mit der Emsigkeit einer Ameise alle Teile unseres Sehfeldes oder Vorstellungsraumes durchlaufen, um nur zu einer Auffassung desselben zu gelangen. Natürlich liegt dieser Anschauung nur ein Mißverständnis des Phänomens zugrunde, welches die Psychologen als „Enge der Aufmerksamkeit“ zu bezeichnen pflegen. Aber es ist sicher, daß die Mathematiker, die gewohnt sind, durch ihre Konzentration auf einen Gegenstand die Enge der Aufmerksamkeit zu steigern, mehr als alle anderen Menschen geneigt sind, den allerdings nicht ganz erreichbaren Zustand des rein sukzessiven Auffassens von Dingen für den eigentlich natürlichen zu halten. Hieraus glaube ich, entspringen in letzter Linie Anschauungen wie die von Kronecker, welcher meint: die ganzen Zahlen habe der liebe Gott gemacht, alles übrige sei Menschenwerk. Die wissenschaftliche Psychologie hingegen zeigt, ein wie komplizierter und künstlicher Akt das auf diskretem sukzessivem Denken beruhende Zählen ist, und lehrt überdies, wie allmählich und wie spät diese Fähigkeit von dem einzelnen Individuum erworben wird. Gibt es doch auch ganze Naturvölker, die sich mit den fünf ersten Gaben des Kroneckerschen Gottesgeschenkes begnügt haben, während ihre Beherrschung geometrischer und mathematischer Tatsachen oft eine ganz erstaunliche Entwicklung aufweist. Das Denken erfolgt übrigens auch bei dem überzeugtesten Finitisten nicht ausschließlich in Geistesblitzen. Vielmehr ist auch sein Denken voll von simultanen Erfassungen von Dingen, die einem sukzessiven Auszählen der an ihnen bemerkbaren Einzelheiten widerstreben. Diese Natur unseres Auffassungs- und Anschauungsvermögens ist es gerade, die es Georg Cantor ermöglicht hat, den Aufbau der Mengenlehre auf *anschaulichem* Wege zu vollziehen.

Es war nötig, diese psychologischen Unterströmungen der finitistischen Überzeugungen aufzudecken, um verständlich zu machen, welche Wirkung die Paradoxie des Begriffes W ausüben mußte. Alle diejenigen, welche sich an die neuen Begriffe von Cantor nur mit innerem Widerstreben gewöhnt hatten, ohne sich über die tiefe sachliche und historische Notwendigkeit derselben im klaren zu sein, flüchteten sich sofort zum primitivsten Finitismus zurück und glaubten, die Verwerfung aller aktual unendlichen Mengen müsse die notwendige Folge der bei einer derselben, deren singulärer Art der Bildung doch ins Auge fallend war, auftretenden Paradoxie sein.

Wir haben indessen gesehen, wie notwendig ein solcher Standpunkt auch zur Aufgabe der abzählbar unendlichen Menge und zur Verwerfung des Grenzbegriffs führen muß. So logisch ist die Diskussion nicht vorgegangen, aber sie führte in diese Richtung, und es dauerte in der Tat nicht lange, bis sie auf dem Wege über die Paradoxie von Richard wieder auf den Ausgangspunkt der ganzen Mengenlehre zurückgelangte. Das ist dem Leser, der nicht die ganzen Verzweigungen der Frage kennt, vielleicht nicht immer deutlich geworden. Er sieht, wenn in abstrakter Form darüber gestritten wird, ob imprädikative Definitionen gestattet sind, oder wenn über die Begründung des Prinzips der vollständigen Induktion gestritten wird, nicht gerade leicht, daß es dabei um die ihm wohlbekannten und naheliegenden Probleme geht, nämlich, wie man zu begründen habe, daß es eine stetige Bewegung gibt, oder daß eine stetige Funktion ein Maximum besitze. Die finitistische Bewegung, welche durch Poincaré, Richard, Borel, Lindelöf und Brouwer getragen wurde, hat nun einen sehr merkwürdigen Ausgang gehabt. Der Entwicklungsgang von Poincaré ist schon geschildert worden, er sah schließlich die Aufgabe vor sich, Beweise wie den der Nichtabzählbarkeit des Kontinuums, deren Sinn er anerkannte, mit seinem Finitismus zu versöhnen. Borel, der am weitesten gedacht hat, hat die Aufgabe des Finitismus am ernstesten genommen. Er hat gesehen, welcher durchgreifenden Änderungen die Theorie der Irrationalzahlen bedürfen würde, und er hat es versucht, eine solche zu geben. Aber er hat mit seinem Versuche sogleich wieder den Beweis geliefert, daß es immer dabei auf die Neuschöpfung von Begriffen hinausläuft, welche subtilster Art sind, daß man genötigt ist, die größten Komplikationen in Kauf zu nehmen, und er hat schließlich die Erfahrung machen müssen, daß die Theorien, die man aufbaut, zuletzt mit noch viel größerem Mißtrauen betrachtet werden als die, welche man bekämpft.

Lindelöf hat nur ein einziges Argument gegen die transfiniten Zahlen, das ich aber anführen möchte. Er sagt, der Beweis der Existenz von N_1, d. h. der Nichtabzählbarkeit der Menge aller Zahlen der zweiten Zahlenklasse beruht auf demselben Schluß, der den Widerspruch in der Menge W aller Ordnungszahlen hervorruft, daher ist dieser Beweis hinfällig. Das ist genau so, wie wenn ein Schüler, der zum ersten Male bei der Division mit Null eine jener bekannten Paradoxien erhalten hat, mit denen man sich auf den höheren Klassen einer Schule unterhält, erklären würde: das liegt am Dividieren, jetzt dividiere ich niemals wieder. Ganz gewiß schützt diese Methode vor Irrtümern, zugleich leider aber auch vor Erfolgen. Wollte man den Irrtümern, die einst beim Gebrauch der divergenten Reihen auftraten, aus dem Wege gehen, so hätte man auch das Rechnen mit unendlichen Reihen überhaupt verbieten können, und das wäre vielleicht in damaliger Zeit sogar ein Standpunkt gewesen, für den man hätte Gründe anführen können. Aber heute wissen wir aus tausendfältigem Beispiel, daß, wenn eine Methode in überwiegend vielen Fällen zu widerspruchslosen Ergebnissen führt und in anderen Fällen versagt, daß es eine Täuschung ist, die Bedingungen der Anwendung der Methode in den beiden Kategorien von Fällen für völlig gleich zu halten. Wir wissen, daß es ein Mittel gibt, den Widerspruch zu heben, das schon hundertfältig bewährt ist. Wir wissen nämlich, daß es immer möglich ist, *feinere Unterscheidungen* zu treffen (wie z. B. die der Reihen in konvergente und divergente), welche zeigen, daß die Übereinstimmung der Methoden nur ein *Schein* ist, der aus dem Übersehen eines auf den ersten Blick unbedeutenden Details der Bedingungen entstanden ist.

Nachdem wir so diejenigen Entwicklungstriebe geschildert haben, deren gemeinsames Kennzeichen eine wachstumslose und hoffnungslose Kürze ist, gehen wir dazu über zu schildern, in welcher Richtung sich die produktive Forschung des Gegenstandes bewegt, entwickelt und verzweigt hat.

Sie knüpft sich zunächst an die Namen Zermelo und Russel, geht aber in der Richtung wesentlich zurück auf die Arbeiten von Hilbert. In seinen „Grundlagen der Geometrie“ hatte Hilbert ein Idealbild der logischen Darstellung einer mathematischen Disziplin gegeben, welches dazu anreizen mußte, den gleichen Versuch der Darstellung auf anderen Gebieten zu wagen. Die Hilbertsche Methode gestattete zweierlei zu sehen, worauf es logisch ankommt: erstens die Lückenlosigkeit, zweitens die Widerspruchslosigkeit des Aufbaus. Die letztere allerdings wurde nicht durch ein absolutes Verfahren gezeigt, sondern, indem man die Widerspruchslosigkeit der verschiedenen Geometrien auf die der Euklidischen und die der letzteren auf die des Systems der reellen Zahlen zurückführte.

Wollte man das Beispiel Hilberts nachahmen, so müßte man ein System von Axiomen der Mengenlehre aufstellen, *weit genug*, alles zu umfassen, was es an positiven Resultaten gab, *eng genug*, um Widersprüche auszuschließen und endlich in solcher Form, daß man das Problem der *Widerspruchslosigkeit* auf ein engeres und womöglich bekannteres Gebiet zurücktreiben konnte.

In der ersteren Richtung zielen die Arbeiten von Zermelo und Russel, in der letzteren die von Hilbert selbst und von Koenig.

Die Arbeiten von Zermelo sind, obgleich sie am meisten Diskussion verursacht haben, diejenigen, die dazu vom prinzipiellen Standpunkt aus am wenigsten Anlaß bieten. Zermelo stellt ein System von Axiomen auf, aus denen mit Sicherheit alles Positive abgeleitet werden kann, was die Mengenlehre erbracht hat, und nichts von den Paradoxien, die man zu vermeiden wünscht.

Widerspruch im eigentlichen Sinne kann daher ein solches System auch nicht erregen, und es wäre sicher einstimmig akzeptiert worden, wenn es nicht noch mehr geleistet hätte, als es im eben erwähnten Sinne geleistet hat. Es gibt nämlich außerdem eine positive, und zwar bejahende Antwort auf eine Frage, von welcher ein so namhafter Mathematiker wie Schoenflies annimmt, daß sie mit Nein beantwortet werden muß, auf die Frage nämlich, ob das Kontinuum wohl geordnet werden könne oder nicht. Es entstand daher besonders bei denen, die selbst vorher große Mühe zur Beantwortung der Frage aufgewandt hatten, der Verdacht, daß *zu viel* in die Grundlagen aufgenommen worden sei, daß man mit weniger ausreichen würde, und daß also das eigentliche Problem nicht gelöst, sondern unvermerkt *hinwegeskamotiert* sei. Besonders Schoenflies versucht auch neuerdings, ohne daß jedoch schon ein Abschluß erreicht sei, die Mengenlehre auf Axiomen aufzubauen, die ebenfalls alle Paradoxien ausschließen, aber doch weniger enthalten als die von Zermelo.

Die Lösung dieser, ich möchte sagen, internen Frage der Mengenlehre, wird vielleicht dadurch gelingen, daß man in derselben Art und Weise, in der Hilbert in den Grundlagen der Geometrie vorgegangen ist, das Hauptaxiom, um das es sich dreht, das sogenannte Auswahlaxiom in Teilannahmen spaltet — indem man z. B. seinen Gebrauch in Mengen verschiedener Mächtigkeit als axiomatisch verschieden ansieht — und nachsieht, wie weit man durch Ausschaltung von Teilannahmen unter Einführung anderer Annahmen die beiden notwendigen Ziele, nämlich Beherrschung aller bisherigen Resultate und Ausschlüsse der Widersprüche erreicht. Indem man die Frage der Wohlordnung des Kontinuums in den verschiedenen Axiomsystemen als eine verschiedene behandelt, dürfte man zu einer allen bisherigen Bemühungen gerecht werdenden Klarlegung der wichtigen Frage gelangen.

Man sieht aus dieser Schilderung, daß hier weniger eine prinzipielle Differenz, weniger ein Streit als vielmehr ein Wettstreit um die Bevorzugung dieser oder jener Forschungsrichtung vorliegt. Hier hat nur derjenige Unrecht, der sich auf einen ausschließenden Standpunkt stellt, wie er vielleicht durch allzu dogmatische Formen der Darstellung nahegelegt worden ist.

Richten wir nach dieser Abschweifung den Blick wieder auf die große Entwicklungslinie, so sehen wir einen zweiten und in seiner An-lage weit umfassenderen Versuch des positiven Aufbaus in den ausgedehnten Arbeiten von Bertrand Russel.

Das Wesentliche der Leistung Zermelos ist es gewesen, daß er die Möglichkeit gezeigt hat, die Klippen der Paradoxien dadurch zu vermeiden, daß man das Gebiet der Mathematik sorgfältiger in der Richtung abgrenzt, in der sie liegen. Das ist gerade das, was Hilbert zuerst gefordert und auch persönlich angeregt hat. Dabei kam es zunächst mehr darauf an, die Mengenlehre als Besitztum der Mathematik zu sichern und weniger darauf, ob man die Grenzen nicht vielleicht in der einen oder anderen Weise zu nahe absteckte und dadurch Forschungsgebiet vorläufig ausschloß. Wollte man aber die Paradoxien vollkommen verstehen, so mußte man weiter gehen, nämlich bis zu einer gleichzeitigen Umwälzung des gewöhnten Aufbaus der Logik. In dieser Richtung liegen die Arbeiten von Russel. Das erste, was Russel getan hat, ist, daß er die Paradoxien, welche man bei der Bildung von Mengen gefunden hatte, aus ihrer wissenschaftlichen Isolierung befreite. Er bildete, indem er zurückging auf Beispiele, die schon das Altertum betrachtet hatte, nicht nur den logisch einfachsten Typ dieser Paradoxien, sondern brachte auch eine Art Vollständigkeit in das System derselben. Indem man sich der Aufklärungen von Russel bedient, ist es ein Leichtes, solche Paradoxien in Masse herzustellen. Die Masse ist hier sicher weniger schreckhaft als die einzelne. Indem man eine Erscheinung variiert, lernt man sie kennen, und indem man sie kennt, sie beherrschen. Diese Beherrschung der Paradoxien ist der feste Grund, auf dem Russel baut. Auf diesem Grunde löst er in einem umfassenderen Sinne das Problem, die Logik und Mathematik widerspruchsfrei aufzubauen, indem er solche logischen und mathematischen Axiomen gibt, welche, so außerordentlich weit sie auch gefaßt sind, noch immer die Möglichkeit der Paradoxien ausschließen. Das ist der Sinn seiner berühmten „Theorie der Typen", welche in kunstvollster Weise die größte Schwierigkeit überwindet, nämlich mit der Ausschließung der Paradoxien doch die Möglichkeit des Schlusses von n auf $n+1$ beizubehalten.

Hatten die Arbeiten von Zermelo und Russel wesentlich die Aufstellung von Axiomensystemen zum Gegenstande, so sucht eine Arbeit von Hilbert zum erstenmal das Problem der Widerspruchslosigkeit für denjenigen Begriff zu lösen, welcher das einfachste Beispiel einer unendlichen Menge gibt, nämlich für das System der natürlichen ganzen Zahlen. Dieser Versuch ist nicht vollendet, aber er muß hier Erwähnung finden, weil die Methode, die er enthält, neuartig ist, und weil sie der Arbeit von Koenig, die wir sogleich besprechen, augenscheinlich zum

Vorbild gedient hat. Indem Hilbert gewisse logische Aussageformen einführt, gelangt er dazu, jede mathematische Aussage im System der ganzen Zahlen in eine Normalform zu bringen. In eine solche Normalform läßt sich, und zwar in einen ganz bestimmten Typus derselben, auch jeder denkbare Widerspruch bringen und Hilbert versucht durch Schlüsse zu zeigen, daß dieser besondere Typ von Normalformen niemals auftreten kann.

Genau genommen ist hierdurch freilich kein absoluter Beweis der Widerspruchslosigkeit erreicht. Denn diese Art des Beweisens setzt zwar nicht voraus, daß man das System der ganzen Zahlen und alle Teile der Logik für widerspruchsfrei hält, wohl aber diejenigen Teile der Logik, deren man sich bedient. Denn enthielten auch diese Widersprüche, so würde kein Verlaß auf die Schlüsse sein, welche mit ihrer Hilfe gemacht werden, und das Resultat würde jeder Sicherheit ermangeln. Man sieht, daß das Problem der Widerspruchslosigkeit durch Beweise niemals absolut zu lösen ist, man sieht, daß das Hilfsmittel des Beweises wesentlich nur die wichtige Aufgabe lösen kann, die die Frage nach der Widerspruchslosigkeit von einem weiteren auf ein engeres Gebiet zurückzuverlegen.

Aber noch ein weiterer Punkt wurde durch die Hilbertschen Arbeiten deutlich. Mit dem System der ganzen Zahlen hatte Dedekind zugleich das Prinzip der vollständigen Induktion aufgebaut, Hilbert versucht dementsprechend zugleich die Widerspruchslosigkeit des Prinzips der vollständigen Induktion mit zu begründen. Dabei zeigt es sich jedoch, daß der Beweis der Widerspruchslosigkeit eine Art Induktion erfordert, und es bleibt, worauf Poincaré hingewiesen hat, die Frage nach der Art und Berechtigung dieser Induktion im Beweise offen.

Im engen Anschluß an den Gedankengang der zitierten Arbeit von Hilbert führt Koenig für das System der ganzen Zahlen das Problem der Widerspruchslosigkeit auf das der Widerspruchslosigkeit eines engeren Gebietes zurück. Aber dieses engere Gebiet selbst wird bei ihm in einer gänzlich neuartigen Weise auf das deutlichste charakterisiert. Hier nämlich faßt er alle diejenigen Sätze zusammen, welche nach seiner Ansicht darum einen Charakter unmittelbarer Gewißheit besitzen, weil sie auf einer jedem logischen Schließen vorausgehenden *inneren Anschauung* beruhen. Die Tatsachen der inneren Anschauung zählt er in der Form der Beschreibung auf und gibt ihnen auch schließlich den Charakter eines Systems von Sätzen, ohne jedoch in dieser Formalisierung mehr als eine Umformung der Ausdrucksweise sehen zu wollen. Unter den so formalisierten Tatsachen der inneren Anschauung findet sich z. B. das Prinzip, daß zwei Dinge nicht zugleich als identisch und verschieden gedacht werden können. Ferner findet sich unter den Tatsachen der inneren Anschauung auch ein Teil des Prinzips der vollständigen Induktion, nämlich die Induktion, die nur in einer endlichen Anzahl von Schritten besteht und zu einer vorgegebenen Endzahl hinführt.

Das so aufgebaute System gestattet nun auch Beweise zu führen, aber Beweise, die immer noch nur Umschreibungen von Tatsachen der inneren Anschauung sein sollen. Und nun gelingt der entscheidende Schritt: das System der gewöhnlichen Logik und der Mengenlehre läßt sich in einem solchen Beweise als widerspruchsfrei erkennen. Diese Zurückführung ist vollkommen einwandfrei durchgeführt und stellt damit einen Teil des Buches dar; der ohne Zweifel von hoher Bedeutung ist.

Ob und inwieweit man das von ihm aufgestellte Ursystem, auf das er alles reduziert, als ein absolut anzunehmendes wird ansehen wollen, darüber wird wohl noch diskutiert werden. Die Berufung auf innere Anschauung als Quelle der Gewißheit ist jedenfalls nicht unbedingt neu, war aber in letzter Zeit mehr in den Hintergrund getreten. Dazu hat vielleicht beigetragen, daß sich auf die innere Anschauung auch diejenigen berufen haben, welche z. B. die Möglichkeit der nichteuklidischen Geometrie leugnen wollten. Wenn es übrigens so etwas gibt wie eine absolute innere Anschauung, so müßte sie sich vor allem dadurch charakterisieren, daß sie einen Charakter der Einzigartigkeit in ihrer formalen Bildung aufweist. In dieser Hinsicht bleibt jedenfalls die Bemühung von Koenig zu ergänzen. Koenig beschreibt, wie ihm logisch zumute ist, aber man sieht doch nicht vollkommen, warum jeder andere sein logisches Innenleben genau ebenso charakterisieren muß. Vielleicht würde man stärker davon überzeugt werden, daß man in dem Koenigschen reduzierten System das wirkliche Ursystem vor sich hat, wenn noch ein anderer Punkt stärker urgiert worden wäre, den zu urgieren nahe liegt. Es liegt nahe zu vermuten, daß das Koenigsche Ursystem als formales System genommen auch aus formalen Gründen die Eigenschaft besitzt, daß seine Widerspruchslosigkeit nicht mehr durch Reduktion auf ein noch engeres System würde bewiesen werden können. Wenn dies so ist, so hat es allerdings in einem gewissen Sinne absoluten Charakter. Man würde sagen, daß dieses ein System sei, gegenüber dem es nur Glauben oder Verwerfung gibt, und an das man glauben muß, wenn man Wissenschaft treiben will. Verhält es sich so, dann wäre allerdings in der Frage nach der Begründung der Mathematik ein bleibender logischer Abschluß erreicht.

Das Buch von Weyl: Das Kontinuum, unterscheidet sich wesentlich von den bisher betrachteten finitistischen Bestrebungen, indem es diejenige Grundlage wählt, von der aus ein positiver Aufbau der Mengenlehre durchaus erfolgen kann. Indessen gehört es insofern zu der finitistischen Literatur, als es ebenfalls dazu gelangt, den Begriff des Kontinuums als Menge im Sinne Cantors abzulehnen. Zwar geht Weyl so weit, daß er noch dazu gelangt, dem Beweise Georg Cantors von der Nichtabzählbarkeit des Kontinuums einen realen Sinn zu unterlegen. Indessen bei dem Begriff der oberen, bzw. unteren Grenze einer linearen Punktmenge ergibt sich bei Weyl ein Vakuum, das ihn dazu führt, diesen Begriff als logisch unzulässig abzulehnen. Weyl kommt also ganz wie die Finitisten zu einer Beschränkung des Inhalts der Mengenlehre. Unglücklicherweise ist es nun gerade eine Beschränkung, die recht tief eingreift in die wichtigsten Anwendungen, welche von der Mengenlehre auf die Theorie der reellen Funktion und damit auf die gesamte Analysis gemacht worden sind. Gesteht man Weyl die Richtigkeit seiner Behauptungen zu, so kommt man, was er selbst ganz klar erkennt, zur Forderung eines Neuaufbaues wesentlicher Teile der Analysis. Es ist entsprechend der allgemeinen Tendenz des vorliegenden Aufsatzes hier nicht der Ort, die Weylschen Ausführungen im Detail einer Kritik zu unterziehen. Ich möchte nur ganz entsprechend den bisherigen Ausführungen die allgemeine Lage etwa so kennzeichnen:

Wenn jemand ein Fernrohr, das er auf seine Güte prüfen will, gegen den Großen Bären richtet, ihn aber trotz alles Bemühens nicht im Gesichtsfelde findet, so kann dies natürlich daran liegen, daß das Instrument so schlecht ist, daß man den Großen Bären mit demselben nicht sehen kann. Bevor man aber einen solchen Schluß zieht und das Instrument verwirft, ist man genötigt, die andere Möglichkeit ins Auge zu fassen, daß man nämlich das Instrument gar nicht auf den Großen Bären gerichtet hat. Denn es gibt sehr viele Möglichkeiten, ein Instrument nach anderen Himmelsrichtungen einzustellen. Ich meine daher, wenn man auf der Grundlage, auf der Weyl die Theorie des Kontinuums aufbaut, den Begriff der oberen und unteren Grenze nicht findet, dann läßt sich doch die Möglichkeit nicht von der Hand weisen, daß man zu diesem Begriffe gelangt, wenn man den Aufbau in einer Richtung vornimmt. Davon, daß etwa bewiesen wäre, daß diese Begriffe sich nicht in irgendeiner Weise exakt realisieren lassen, ist gar keine Rede. Eine solche Behauptung, die alle möglichen Begründungsarten in Betracht nehmen würde, hätte vielleicht gar keinen Sinn. Die Tatsache besteht, daß es auch ohne Fernrohr möglich ist, den Großen Bären zu sehen; ebenso besteht die Tatsache, daß zahllose Forscher die Begriffe obere und untere Grenze gesehen und mit ihrer Hilfe widerspruchslose und wichtige Wahrheiten begründet haben. Vielleicht ist es nicht ganz einfach, ein sehr feines Instrument so einzustellen, daß man gerade den Großen Bären sieht. Aber vorhanden ist er, es haben ihn schon zu viele gesehen!

Fassen wir also zusammen:

Als das stärkste allgemeine Argument gegen die finitistische Kritik haben wir das Folgende erkannt: Wenn es möglich ist, daß voneinander unabhängig arbeitende Forscher die gleiche Antwort auf die gleiche Frage finden, so ist ein logisches Experiment vollzogen, welches beweist, daß es ein widerspruchsfreies Gedankensystem geben muß, in welchem die vollzogenen Schlüsse nach den strengsten Anforderungen valent sind.

Als klassisches Beispiel können wir zitieren: Die Theorie der Summation der divergenten Reihen, welche Laguerre, Stieltjes, Hölder, Borrel und andere entwickelt haben. Die historisch gegebene Aufgabe ist, in einem solchen Falle über den Weg der strengsten Kritik hinaus das adäquate Gedankensystem zu entdecken und positiv aufzubauen.

Keine Lösung kann angenommen werden, welche entweder in der negativen Kritik stecken bleibt oder den positiven Aufbau nur zum Teil leistet. Die Kritik ist, so sehr sie Epoche machen kann, immer nur eine Richtung gebende Kraft, und erfolgt nicht gleichzeitig mit ihr ein wesentliches Fortschreiten, so dreht man sich mit ihr allein nur auf der Stelle herum.

Es dient zur Bestätigung der vorgetragenen Anschauung, daß auf gänzlich anderem Gebiete, in der theoretischen Physik, Max Planck in Antwort auf die an ihn bei Gelegenheit seines 60. Geburtstages gerichteten Ansprachen sich für sein Wissensgebiet in ganz ähnlicher Weise ausgesprochen und hervorgehoben hat, daß die Entdeckung der Quantenlehre daraus hervorgegangen ist, daß er versucht hat, die fruchtbaren Gedanken der bewährten Theorien, soweit es irgend möglich war, nebeneinander in neuer Form zu *erhalten*. Als allgemein bekannt darf ich auch voraussetzen, daß D. Hilbert in seinem Vortrag: Mathematische Probleme (1900) durchwegs den gleichen Standpunkt eingenommen hat.

Man ist so weit gegangen, in den Begriffen Cantors ein letztes Aufleben mittelalterlicher Scholastik erblicken zu wollen. Man kann versucht sein, auf diesen Vergleich hin ein Experiment vorzuschlagen.

Niemals hat es zu seiner Zeit einen berühmteren Gelehrten gegeben, als den Verfasser des Buches „Augustinus seu doctrinae St. Augustini“.

Man mache nun die Probe: Man wähle irgendein Problem auf Grund der Begriffe der „wirksamen Gnade“ oder der „zuvorkommenden Beihilfe“, und man wähle andererseits ein beliebiges Problem aus den Abhandlungen Georg Cantors. Man lasse jeweils zwei unabhängig voneinander arbeitende Forscher das eine und das andere Problem bearbeiten. Ist das Ergebnis in beiden Fällen dasselbe, nämlich Nichtübereinstimmung oder Übereinstimmung, so ist beides gleichzeitig Scholastik oder Wissenschaft. Wenn aber, wie wir nicht zweifeln, im ersten Falle sich gänzlich verschiedene Ergebnisse zeigen, im zweiten Fall aber die identische Lösung erscheint, dann ist, für alle Zeiten durch himmelweiten Abstand getrennt, das eine müßige Scholastik und das andere echte und unvergängliche Wissenschaft.

Über eine von L. N. M. Carnot berechnete Differentialinvariante.

Von KARL CARDA in Prag.

L. N. M. Carnot behandelt in seiner *Géométrie de position*, Paris 1803, als letztes das folgende Problem (S. 477—480):

Es ist der Winkel zu finden, den die Tangente T einer Kurve im Punkt M mit jener Geraden bildet, die durch M nach dem Halbierungspunkt n einer unendlich nahen, zu T parallelen Sehne gelegt wird. Der gesuchte Winkel ist als Funktion der Differentiale der rechtwinkligen Punktkoordinaten x, y zu ermitteln.

Nach einer längeren infinitesimalgeometrischen Betrachtung findet Carnot als Lösung der gestellten Aufgabe die Formel (E) (S. 479)

$$\cot TMn = \frac{dy}{dx} + \frac{ddx \cdot (dx^2 + dy^2)}{dx \cdot (dxddy - dyddx)}.$$

Diese Rechnung und diese Formel sind unrichtig.

Dies läßt sich erkennen, ohne auf die Rechnung von Carnot auch nur einen Blick zu werfen. In der Tat, es ist begrifflich klar, daß der gesuchte Winkel eine Differentialinvariante bei allen *Ähnlichkeitstransformationen* der Ebene sein muß. Bezeichnet man allgemein mit ϱ den Krümmungsradius, mit s die Bogenlänge für eine beliebige reelle ebene Kurve, so ist bekanntlich jede Differentialinvariante der Gruppe aller *Bewegungen* der Ebene eine Funktion von

$$\varrho, \frac{d\varrho}{ds}, \frac{d^2\varrho}{ds^2}, \frac{d^3\varrho}{ds^3}, \cdots \quad \text{allein.}^{1)}$$

1) Man vergleiche hierüber etwa die Darstellung bei G. Scheffers, Theorie der Kurven. Leipzig 1901. S. 49—50.