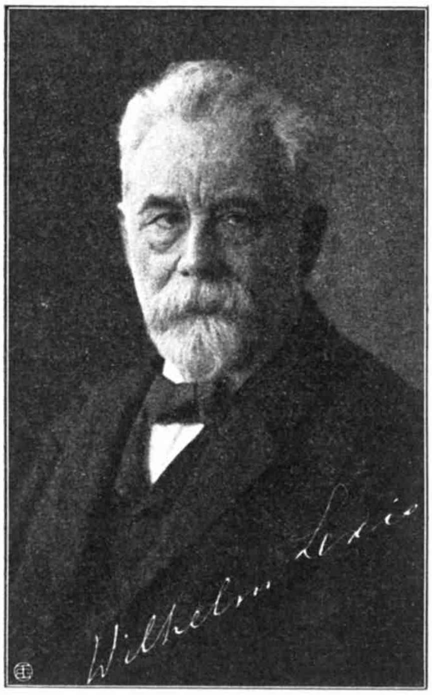
Wilhelm Lexis.

Von F. Klein in Göttingen.

Am 24. August 1914 verschied Geh. Oberregierungsrat Prof. Dr. Wilhelm Lexis, ordentlicher Professor der Volkswirtschaftslehre an der Universität Göttingen. Lexis ist von Hause aus Mathematiker gewesen, und wenn ihn seine fernere Entwicklung auch von der Mathematik weit abführte, so hat sie seine innere Beziehung zu ihr doch nicht ausgelöscht: Das mathematische Denken ist ein wesentlicher Bestandteil seiner wissenschaftlichen Produktivität geblieben, und der Organisation unserer Studien hat er späterhin, als Mitarbeiter von Althoff, eine bedeutungsvolle Tätigkeit gewidmet. So ist es billig, daß seiner an dieser Stelle etwas eingehender gedacht wird.



Lexis ist als Sohn eines Arztes am 17. Juli 1837 zu Eschweiler (im Aachener Industriebezirk) geboren, und man wird wohl nicht fehl gehen, wenn man annimmt, daß seine späteren vielseitigen Interessen frühzeitig durch den Charakter der ihn dort umgebenden Verhältnisse ausgelöst worden sind. Der Achtzehnjährige hat sich dann an der Universität Bonn nach einem kurzen einsemestrigen Studium der Jurisprudenz mathematischen und naturwissenschaftlichen Studien zugewandt. 1859 promovierte er mit einer Dissertation: de generalibus motus legibus, die er dem damaligen Bonner Vertreter der mathematischen Physik, August Beer, widmete, und legte kurz darauf die Oberlehrerprüfung in Mathematik und sämtlichen Naturwissenschaften ab. Nicht unwichtig für seine spätere Wirksamkeit ist, daß er dann, freilich nur für kurze Zeit, als Lehrer am Bonner Gymnasium tätig war. Auch die Arbeit im chemischen Laboratorium von Bunsen in Heidelberg konnte ihn nicht lange fesseln. Es folgt eine Wanderzeit von zehn Jahren, die ihn nach Paris und anderen

Plätzen führte, wobei er sich vorwiegend volkswirtschaftlichen Studien widmete und insbesondere auch mit der Presse Fühlung gewann. Solcherweise hat er die staunenswerte Kenntnis der Dinge und der Persönlichkeiten gewonnen, vermöge deren er in unseren Kreisen einzig dastand, wie auch die beneidenswerte Fähigkeit, schwierige Materien in kürzester Zeit durchsichtig zu ordnen und darzustellen. Im Kriege 1870—71 finden wir Lexis als Redakteur der „Amtlichen Nachrichten für Elsaß-Lothringen" zunächst in Hagenau, dem ursprünglichen Sitz des Generalgouvernements, dann in Straßburg. Und hier fixieren sich die Linien seines späteren Berufslebens, indem er mit den Kreisen der neuentstehenden Universität und insbesondere mit Althoff (der als Justitiar am Zivilgouvernement im Frühjahr 1871 nach Straßburg gekommen war) Beziehungen gewann. Lexis wurde 1872 zum a. o. Professor der Volkswirtschaftslehre an der Straßburger Universität ernannt und kam in kurzer Aufeinanderfolge 1874 als ordentlicher Professor für Geographie, Ethnographie und Statistik nach Dorpat, 1876 als ordentlicher Professor der Volkswirtschaftslehre nach Freiburg i. B., 1884 nach Breslau und 1887 nach Göttingen. Die Georgia Augusta ist stolz darauf, ihn länger als ein Vierteljahrhundert zu den Ihrigen gezählt zu haben. 1893 wurde Lexis, unbeschadet seiner Tätigkeit an der Göttinger Universität, von Althoff als Mitarbeiter in das preußische Kultusministerium berufen und war als solcher bis in die letzten Jahre hinein tätig.

Es liegt außerhalb des Zweckes dieser Zeilen, genauer auf die umfassende Tätigkeit einzugehen, die Lexis auf seinem Hauptgebiete, der Volkswirtschaftslehre, entfaltet hat. Was ihn dabei vor seinen deutschen Fachgenossen auszeichnete, ist eben der mathematische Einschlag seines Denkens gewesen. So ist er für uns der Neubegründer der mathematischen Statistik geworden. Wegen der Einzelheiten, insbesondere der Bedeutung seiner berühmten Dispersionstheorie, sei hier auf den Artikel der mathematischen Enzyklopädie verwiesen[1]), in welchem sein Schüler, L. v. Bortkiewicz, die Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Statistik dargestellt hat.

Ebenso kann von seiner Betätigung als Mitarbeiter von Althoff hier nur berührt werden, was unmittelbar für die Mathematik (oder die Mathematiker) Bedeutung hat. Das gegenseitige Verhältnis der beiden Männer hat man sich wohl so vorzustellen, daß Althoff die Problemstellungen anregte und die spätere Beschlußfassung sich vorbehielt, Lexis aber aus der Fülle seiner ausgedehnten Kenntnisse die Materialien heranbrachte und ordnete.

---

1) Bd. I, p. 822 ff.

In erster Linie zu nennen sind hier die drei großen Sammelwerke, die Lexis im Auftrage des Kultusministeriums herausgegeben hat:

1) Das für die Weltausstellung in Chicago veröffentlichte Werk: Die deutschen Universitäten, 2 Bde., Berlin 1893,
2) Die Reform des höheren Schulwesens in Preußen, Halle 1902,
3) Das Unterrichtswesen im Deutschen Reich, 4 Bde., Berlin 1904 (herausgegeben aus Anlaß der Weltausstellung in Saint Louis);

das wichtige für uns ist, daß hier überall — ungleich manchen ähnlichen Veröffentlichungen von anderer Seite — Mathematik und Naturwissenschaft im Kreise der anderen Fächer volle Mitberücksichtigung gefunden haben. Auch bei dem großen Unternehmen von Hinneberg-Teubner, der Kultur der Gegenwart (Leipzig-Berlin, 1905ff.), hat Lexis, zumal in den ersten Jahren der Vorbereitung, in hervorragender Weise mitgewirkt und unsere Interessen zur Geltung gebracht; es sei hier nur auf den besonders inhaltreichen ersten Artikel des ersten Bandes verwiesen, der das „Wesen der Kultur“ behandelt und Lexis selbst zum Verfasser hat.

Es möge ferner der Verdienste gedacht werden, die sich Lexis um die Gründung und fernere Leitung des Versicherungsseminars der Universität Göttingen (1895ff.) erworben hat. Das Seminar zerfällt gemäß den von Lexis verfaßten Statuten in zwei Klassen, die administrative und die mathematische; Wahrscheinlichkeitsrechnung, Versicherungsmathematik und mathematische Statistik sind die mathematischen Disziplinen, welche neben den Elementen der analytischen Geometrie und der Differential- und Integralrechnung für Mitglieder der letzteren in Betracht kommen. Es sei übrigens daran erinnert, daß der Anstoß zu einer planmäßigen Hochschulausbildung der Versicherungsverständigen, an der es bis dahin in Deutschland ganz gefehlt hatte, von mathematischer Seite erfolgte. Auf der Wiener Naturforscherversammlung 1894 hat L. Kiepert innerhalb der mathematischen Sektion einen dahingehenden Vortrag gehalten (siehe Bd. 4 dieser Jahresberichte, S. 116ff.), worauf dann Althoff die Sache aufgriff und im September 1895 mit Kiepert zusammen nach Göttingen kam.

Wir gedenken endlich der Mitwirkung von Lexis bei der Ausgestaltung des Prüfungswesens für unsere Lehramtskandidaten. Der Entwurf zur Prüfungsordnuug von 1898 rührt von Lexis her, insbesondere aber, was auch in Fachkreisen wenig bekannt sein dürfte, die dort vollzogene Einfügung einer besonderen Lehrbefähigung für angewandte Mathematik. Der mathematische Unterricht an den Universitäten und die an ihn anschließende Prüfungspraxis waren zufolge ihrer abstrakten Richtung mit den Anforderungen, die von Schulleitern und Männern des praktischen Lebens erhoben wurden, in immer schärferen Gegensatz geraten. Eine bloße Abänderung des Wortlauts der offiziellen Prüfungsbestimmungen hätte kaum Abhilfe gebracht, weil die Handhabung des Examens erfahrungsgemäß sehr viel weniger von diesem Wortlaut als von dem traditionellen Geist der Universitätsvorlesungen abhängig ist. Da war es Lexis, der den Gedanken faßte, die angewandte Mathematik als besonderes Fach in die Prüfungsordnung einzusetzen; das Ministerium werde dann nicht umhin können, an allen Universitäten geeignete Lehraufträge zu erteilen und so für die erforderliche Entwickelung freie Bahn zu schaffen.

Wie sich diese Entwickelung seitdem gestaltet hat und daß das Problem immer noch nicht restlos gelöst ist, kann hier nicht in Kürze auseinandergesetzt werden, es sei vielmehr auf die zusammenhängende Darstellung verwiesen, welche diese Frage demnächst in den Abhandlungen des Deutschen Unterausschusses der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission finden soll.[1]) Als eine besonders fördernde Potenz ist die 1898 gegründete Göttinger Vereinigung für angewandte Physik und Mathematik bekannt genug. Lexis ist ihr langjähriges Mitglied gewesen, und wir bewahren ihm für vielfache Mitwirkung und Unterstützung ein dankbares Gedächtnis.

Noch einmal, 1911, hat Lexis eine für die Entwickelung der angewandten Mathematik wichtige Maßregel in die Wege geleitet. Er hat erreicht, daß unter die Wahlfächer, die für das Examen in angewandter Mathematik bei der Göttinger Prüfungskommission in Betracht kommen, Versicherungsmathematik mit aufgenommen wurde und daß andererseits den Lehramtskanditaten, welche das so präzisierte Examen ablegen, die Erwerbung des Diploms als Versicherungsverständige durch Verringerung der außermathematischen Anforderungen erleichtert wurde. Es steht zu hoffen, daß hiernach die Zahl derjenigen Lehrer der Mathematik wachsen wird, welche ihren Unterricht in den Dienst der staatsbürgerlichen Erziehung unserer Jugend zu stellen vermögen.

---

1) Bd. III, Heft 9: W. Lorey, das mathematische Studium an den deutschen Universitäten (Teubner 1915). Vgl. auch Bd. I, Heft 3: W. Lorey, Staatsprüfung und praktische Ausbildung der Mathematiker an den höheren Schulen in Preußen und einigen norddeutschen Staaten (Teubner 1911).

Über die allgemeinste ebene Punktmenge, die stetiges Bild einer Strecke ist.[1])

Von HANS HAHN in Czernowitz.

Es soll im folgenden ein System von Bedingungen angegeben werden, die notwendig und hinreichend sind dafür, daß eine ebene Punktmenge M stetiges Bild einer Strecke sei.[2]) Bekanntlich heißt eine Punktmenge M Bild einer anderen Punktmenge N, wenn jedem Punkte von N ein Punkt von M zugeordnet ist, derart daß dabei auch jeder Punkt von M mindestens einem Punkte von N zugeordnet ist; und es heißt weiter M *stetiges* Bild von N, wenn diese Zuordnung noch folgender Bedingung genügt: ist $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\nu, \ldots$ eine Folge von Punkten von N, ist $\lim\limits_{\nu=\infty} Q_\nu = Q_0$ und gehört Q_0 gleichfalls zu N, so muß, wenn mit P_ν $(\nu=1,2,\ldots)$ der dem Punkte Q_ν zugeordnete Punkt von M, mit P_0 der dem Punkte Q_0 zugeordnete Punkt von M bezeichnet wird, auch $\lim\limits_{\nu=\infty} P_\nu = P_0$ sein. Wir verstehen nun unter N die Einheitsstrecke $0 \leqq t \leqq 1$ einer t-Achse, unter M eine Punktmenge einer xy-Ebene. Die Menge M wird stetiges Bild der Einheitsstrecke dann und nur dann sein, wenn es zwei stetige Funktionen $x(t)$, $y(t)$ gibt derart, daß, wenn t die Einheitsstrecke durchläuft, der Punkt der xy-Ebene mit den Koordinaten $x = x(t)$, $y = y(t)$ mindestens einmal mit jedem Punkte von M zusammenfällt. Die Frage nach der allgemeinsten ebenen Punktmenge, die stetiges Bild einer Strecke ist, ist also gleichbedeutend mit der Frage nach der allgemeinsten ebenen Punktmenge, die von einem sich stetig bewegenden Punkte in einem Zuge durchlaufen werden kann.

Bekanntlich ist jedes stetige Bild einer geschränkten[3]), abgeschlossenen und zusammenhängenden[4]) Menge wieder geschränkt, abgeschlossen

---

1) Vortrag, gehalten auf der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zu Wien, 1913.

2) Ein anderes solches System von Bedingungen hat A. Schoenflies angegeben: Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, zweiter Teil, S. 237.

3) Eine Menge heißt *geschränkt*, wenn sie ganz in einem hinlänglich großen Kreise liegt.

4) Eine abgeschlossene Menge heißt *zusammenhängend*, wenn sie nicht Vereinigungsmenge zweier abgeschlossener Mengen ohne gemeinsamen Punkt ist.

und zusammenhängend. Damit M stetiges Bild der Einheitsstrecke sei, ist also jedenfalls notwendig, daß M folgende drei Eigenschaften habe:

1. *Die Menge M ist geschränkt;*
2. *die Menge M ist abgeschlossen;*
3. *die Menge M ist zusammenhängend.*

Doch sind diese drei Bedingungen nicht hinreichend, damit die ebene Menge M stetiges Bild der Einheitsstrecke sei. Es läßt sich nämlich noch eine vierte Eigenschaft angeben, die jeder Menge M, die stetiges Bild einer Strecke ist, notwendig zukommen muß; es ist die folgende Eigenschaft:

Sei P ein Punkt von M; zu jeder positiven Zahl ε gehört dann eine positive Zahl η derart, daß es zu jedem in der Umgebung[1] *η von P liegenden Punkt P' von M einen die beiden Punkte P und P' enthaltenden abgeschlossenen und zusammenhängenden Teil von M gibt, der ganz in der Umgebung ε von P liegt.*

Eine Menge, die in jedem ihrer Punkte diese Eigenschaft hat, wollen wir *zusammenhängend im kleinen* nennen. Wir wollen nachweisen, daß dieser Zusammenhang im kleinen tatsächlich eine vierte notwendige Bedingung dafür darstellt, daß M stetiges Bild einer Strecke sei.

Angenommen es wäre M nicht zusammenhängend im kleinen; dann gäbe es mindestens einen Punkt P von M, der die eben eingeführte Eigenschaft nicht hat; d. h. es gäbe ein positives ε von folgender Eigenschaft: in jeder Umgebung von P liegen Punkte P' von M derart, daß *jeder* abgeschlossene zusammenhängende Teil von M, der sowohl P als P' enthält, auch Punkte außerhalb der Umgebung ε von P enthält. Sei also: $P_1', P_2', \ldots, P_\nu', \ldots$ eine Folge verschiedener solcher Punkte P' mit $\lim\limits_{\nu=\infty} P_\nu' = P$. Da M Bild der Strecke $0 \leqq t \leqq 1$ ist, ist jeder Punkt P_ν' Bild mindestens eines Punktes dieser Strecke; sei etwa P_ν' Bild von t_ν'. Wir haben nun auf der Einheitsstrecke unendlich viele verschiedene Punkte $t_1', t_2', \ldots, t_\nu', \ldots$, die somit mindestens einen Häufungspunkt t' besitzen. In der Folge der t_ν' gibt es eine Teilfolge $t'_{\nu_1}, t'_{\nu_2}, \ldots, t'_{\nu_i}, \ldots$ mit $\lim\limits_{i=\infty} t'_{\nu_i} = t'$. Wegen der Stetigkeit der Abbildung wird notwendig t' auf P abgebildet. Die Strecke $< t'_{\nu_i}, t' >$ wird auf einen abgeschlossenen, zusammenhängenden Teil von M abgebildet, der sowohl den Punkt P als den Punkt P'_{ν_i} enthält. Nun sind aber die Koordinaten des dem Punkte t der Strecke entsprechenden Punktes

1) Unter der *Umgebung* η von P wird das Innere eines mit dem Radius η um P beschriebenen Kreises verstanden.

von M stetige Funktionen $x(t)$, $y(t)$ von t; es gibt also ein positives δ so, daß:

(1) $$|x(t) - x(t')| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}; \quad |y(t) - y(t')| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \text{ für } |t - t'| < \delta.$$

Wegen $\lim_{i=\infty} t'_{\nu_i} = t'$ gibt es nun aber ein i_0 so, daß:

(2) $$|t'_{\nu_i} - t'| < \delta \text{ für } i \geqq i_0.$$

Aus (1) und (2) aber folgt, daß für $i \geqq i_0$ alle Punkte der Strecke $< t'_{\nu_i}, t' >$ in die Umgebung ε des Bildpunktes P' von t' (d. i. des Punktes mit den Koordinaten $x = x(t')$, $y = y(t')$) abgebildet werden. Es gibt also für $i \geqq i_0$ einen in der Umgebung ε von P' liegenden abgeschlossenen und zusammenhängenden Teil von M, der sowohl P' als P'_{ν_i} (den Bildpunkt von t'_{ν_i} mit den Koordinaten $x = x(t'_{\nu_i})$, $y = y(t'_{\nu_i})$) enthält; das ist aber ein Widerspruch gegen die Annahme, von der wir ausgingen, und der Zusammenhang im kleinen ist als notwendige Bedingung nachgewiesen.

Wir fügen also zu den oben angeführten drei Eigenschaften, die jede Menge M, die stetiges Bild einer Strecke ist, haben muß, als vierte hinzu:

4. *Die Menge M ist zusammenhängend im kleinen.*

Ein einfaches Beispiel einer Menge, der die drei ersten, nicht aber die vierte Eigenschaft zukommen, liefert die Menge N, die (für alle $x \neq 0$ des Intervalles $< -1, 1 >$) aus den Punkten der Kurve $y = \sin\frac{1}{x}$, und ferner aus allen Punkten der Strecke $< -1, 1 >$ der y-Achse besteht: in allen Punkten dieser letzteren Strecke ist Zusammenhang im kleinen nicht vorhanden; denn ist P' irgendein Punkt dieser Strecke, so gibt es auf der Kurve $y = \sin\frac{1}{x}$ eine Folge von Punkten P_ν' mit $\lim_{\nu=\infty} P_\nu' = P'$; wie nahe aber P_ν' auch an P' liegen mag, jeder abgeschlossene, zusammenhängende Teil von N, der sowohl P_ν' als P' enthält, muß das zwischen P_ν' und der y-Achse verlaufende Stück der Kurve $y = \sin\frac{1}{x}$ enthalten und verbleibt daher nicht innerhalb eines beliebig kleinen Kreises um P'.

Ein ähnliches Beispiel liefert die Menge, die aus den Punkten der Strecke $< 0, 1 >$ der x-Achse, aus den Punkten der Strecke $< 0, 1 >$ der y-Achse und aus den Punkten der Strecke $0 \leqq y \leqq 1$ auf jeder der Geraden $x = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ besteht. Zusammenhang im kleinen findet nicht statt in den Punkten der Strecke $< 0, 1 >$ der y-Achse. Ferner die Menge, die aus den Punkten eines Kreises K und einer sich etwa von außen her unendlich oft um den Kreis K windenden und dabei ihm unbegrenzt nähernden Spirale besteht: in den Punkten von K findet kein Zusammenhang im kleinen statt.

Während offenbar ein gewöhnliches Flächenstück (z. B. ein Quadrat, ein Kreis) unsere vier Bedingungen befriedigt, erhalten wir sofort eine aus einem Flächenstücke bestehende Menge N, die zwar die ersten drei, nicht aber die vierte Bedingung befriedigt, in folgender Weise: man gehe aus vom Quadrate: $-1 \leqq x \leqq 1$, $-1 \leqq y \leqq 1$, und tilge zunächst von seiner Berandung das Stück: $0 < x < 1$ der Geraden $y = 1$, mit Ausnahme der Punkte P_ν von den Abszissen $x = \frac{1}{\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$; über der von P_ν und $P_{\nu+1}$ begrenzten Strecke errichte man nach abwärts das gleichschenklige Dreieck von der Höhe 1 und tilge weiter aus unserem Quadrate das Innere dieser sämtlichen Dreiecke. Die übrigbleibende Punktmenge erfüllt unsere drei ersten Bedingungen, nicht aber die vierte: der Zusammenhang im kleinen ist gestört in allen Punkten der Strecke $0 < y \leqq 1$ der y-Achse.

Das System der angegebenen vier Bedingungen, das notwendig ist, damit die ebene Punktmenge M stetiges Bild einer Strecke sei, *ist nun aber gleichzeitig auch hinreichend.* Den Beweis dafür, der etwas umständlich ist, gedenke ich an anderer Stelle zu veröffentlichen. Hier sei darüber nur folgendes bemerkt.

Sei M eine unseren vier Bedingungen genügende ebene Punktmenge. Wir ordnen jedem ihrer Punkte P und jeder positiven Zahl r durch folgende Definition eine ihrer Teilmengen, die mit $M^*(P, r)$ bezeichnet werde, zu: Zu $M^*(P, r)$ mögen alle diejenigen Punkte Q von M gehören, die im Innern des mit dem Radius r um P beschriebenen Kreises liegen und gleichzeitig mit P einem abgeschlossenen zusammenhängenden ganz im Innern dieses Kreises liegenden Teile von M angehören; ferner alle Häufungspunkte dieser Punkte Q. Es läßt sich beweisen, daß auch jede solche Menge $M^*(P, r)$ unseren vier Bedingungen genügt.

Wir bezeichnen mit $r_1, r_2, \ldots, r_\nu, \ldots$ eine abnehmende Folge positiver Zahlen mit $\lim\limits_{\nu=\infty} r_\nu = 0$. Die Menge M kann aufgefaßt werden als Vereinigungsmenge endlich vieler ihrer Teile $M^*(P, r_1)$, die etwa mit $M_1, M_2, \ldots, M_n$ bezeichnet werden mögen. Da jede dieser Mengen M_i wieder unseren vier Bedingungen genügt, können aus jeder dieser Mengen auf Grund obiger Definition die Teilmengen $M_i^*(P, r_2)$ hergeleitet werden und M_i als Vereinigungsmenge endlich vieler dieser Mengen $M_i^*(P, r_2)$ aufgefaßt werden. Aus diesen letzteren können nun wieder mit Hilfe der Zahl r_3 Teilmengen M^* gebildet werden usw.

Indem man (in geeigneter Weise) diese sukzessive Zerlegung der Menge M in die Teilmengen M_i, der Mengen M_i in neue Teilmengen usw. an Stelle der von Peano behufs Abbildung der Strecke aufs Quadrat benützten Zerlegung des Quadrates in Teilquadrate treten läßt, gelangt man zu einer stetigen Abbildung der Strecke auf die Menge M.

Das Raumproblem.

Von E. Study in Bonn.[1])

1. Wer heutzutage glaubt, daß die Art, wie unsere wissenschaftlichen Erkenntnisse zustande kommen, trotz vielfacher Behandlung des Stoffs immer noch einen Gegenstand nützlicher Überlegungen bilden kann, der wird guttun, sich klarzumachen, daß man ihm nicht überall williges Gehör schenken wird. Am ehesten kann er auf Beachtung jedenfalls bei Philosophen rechnen, deren wohl kaum einer ein solches Thema für erschöpft ansehen wird. Tiefwurzelnd und weitverbreitet aber ist in Kreisen der Mathematiker und Naturforscher eine Abneigung gegen alles, was Philosophie heißt. Man hat vielleicht schon eine private Erkenntnistheorie fix und fertig, und man macht dann meist nicht viel Wesens davon. Ziemlich allgemein ist man solcher Erörterungen müde geworden. Wenig kommt dabei heraus, sagt man. Schöner, reicher, wichtiger sind doch unsere Wissenschaften! Systematischer Mißbrauch einer eigens dazu erfundenen Terminologie! Warten wir ab, bis die Philosophen sich über ihr ABC geeinigt haben werden!

Alles das ist nicht sehr verwunderlich. Erstaunlich aber ist es, daß man dann doch manchmal „Philosophie" treibt, und wie man sie treibt. Herr V., ein namhafter Physiologe, kennt nicht Ursache noch Wirkung. Doch redet er vom Bedingtsein von Erscheinungen durch andere, und er nennt das Konditionalismus. Herr W., Chemiker seines Zeichens, ist ein grimmer Hasser der Hypothesen. Er schreibt ein Buch, in dem,

---

1) Eine genauere Ausführung und hier nicht berührte Einzelheiten findet man in dem Buche: Die realistische Weltansicht und die Lehre vom Raume. Geometrie, Anschauung und Erfahrung (Braunschweig 1914). Was mich veranlaßt, auf den Gegenstand zurückzukommen, sind einige zum Teil recht unangenehme Mißverständnisse, denen meine Schrift, seit der kurzen Zeit ihres Erscheinens, bereits ausgesetzt war. Ich hoffe, durch eine nochmalige Darlegung der Hauptpunkte weiteres Unheil, wo nicht zu verhindern, so doch einschränken zu können. An einer Stelle ist auch eine Ergänzung hinzugefügt (*Artikel* 7).

wie er wähnt, nicht eine einzige Hypothese aufgestellt oder benutzt worden ist. Herr X, ein Botaniker, läßt die Welt eine „Tat“ sein. Für den Physiker Y gibt es beinahe weiter nichts als Empfindungen. Und nicht besser schneidet der Mathematiker Z ab, der Geometrie im Laufe von Äonen durch den Kampf ums Dasein entstehen läßt. So werden also viele von uns dennoch Philosophen, und dann wohl nicht immer ganz unbedenkliche Philosophen. Warum? Doch wohl, weil uns allen tief im Blute das Bedürfnis sitzt, uns Rechnung abzulegen vom Wesen unserer Wissenschaften, von ihrer Beziehung zu anderen Wissenschaften, von den oftmals recht dunklen Gründen unserer Interessen und unseres Tuns. Der Mathematiker allein unter allen Forschern hat vielleicht wenigstens die Möglichkeit, sich „philosophischen“ Problemen ganz zu verschließen. Spinnt er sich in seinen engen Kreis ein, nimmt er den Begriff der (positiven ganzen) Zahl und das Rechnen damit als ein Gegebenes hin, wozu er gewiß alles Recht hat, so bleibt seine Gedankenwelt eine Welt für sich. Aber können wir immer und alle damit zufrieden sein? Die Anwendungen der Mathematik sind ja zu unserem Glücke auch da, und sobald es sich um sie handelt, steht der Mathematiker vor denselben Fragen wie alle anderen. Sollte es da nicht besser sein, den Rätseln ins Auge zu sehen, die mit so unwiderstehlicher Gewalt sich uns aufdrängen, und, wenn eine eindeutige Lösung sich nicht erzwingen läßt, törichte Wünsche zurückzustellen? So wenigstens dachten gewiß einige der Besten unter uns. Wenn Gauß und Helmholtz sich über das Rätsel des Raumes den Kopf zerbrochen haben, so dürfen wohl auch wir uns nicht vornehm zurückziehen und sagen: Es kommt nicht viel dabei heraus. Das wenige mag ja besonders wertvoll sein, wie ein seltener Edelstein. Dann aber müssen wir uns auch die Schwierigkeiten einer solchen Aufgabe zu Bewußtsein bringen. Mathematik, und zwar sogenannte höhere Mathematik, wird zu ihrer Lösung nicht zu entbehren sein, ebensowenig aber kann sie genügen. Keine wie immer beschaffene Untersuchung rein-logischer Natur kann uns über das Wesen des Raumes irgendwelche Auskunft geben. Diese Schwierigkeiten sind ganz gewiß von anderer Art als mathematische Schwierigkeiten. Und wer wollte leugnen, daß sie groß sein müssen, wenn er beachtet, wie weit die Ansichten bedeutender Forscher hier auseinandergehen. Es sind eben „philosophische“ Schwierigkeiten, genauer solche der *Erkenntnistheorie*: von ihnen wollte ich in meinem Buche Rechenschaft ablegen. Es scheint mir nämlich, daß sie gerade von Mathematikern häufig nicht richtig eingeschätzt werden. Ja es sind ihrer nicht wenige, die von diesen Schwierigkeiten gar keine Ahnung zu haben scheinen.

In unseren Tagen hat man es gesehen, wie eine ganze Geometerschule gewisse autoritativ hingestellte erkenntnistheoretische Ansichten, deren Berechtigung zum allermindesten als zweifelhaft bezeichnet werden muß, ohne weiteres hinnahm und sie, *pro domo*, zum Ausgangspunkt weitreichender und zum Teil abfälliger Werturteile machte. Daß man Fragen wie die nach Begriff und Wesen, Grundlagen und Aufbau der Geometrie zur Diskussion stellt, ist gewiß gutzuheißen. Es ist nicht ratsam, die Wissenschaft wie einen wilden Garten ins Kraut schießen zu lassen. Jüngere Forscher haben billigen Anspruch auf eine gewisse Anleitung. Nach Art jener Geometer kann man dann aber nicht zu Werke gehen. Dergleichen Fragen bedürfen einer *ernsthaften* und *vielseitigen* Erörterung, dogmatisch können sie so wenig entschieden werden wie irgend etwas anderes in der Wissenschaft. Diese kennt kein *Roma locuta est.*

2. Kritik ist auch noch gegenüber sonstigen weitverbreiteten Ansichten vonnöten.

Befragen wir einen Physiker: Mit welchem Rechte wendest du, mein Lieber, Mathematik auf Naturvorgänge an? Wo sind zum Beispiel die Punkte des Raumes, von denen du redest, und wenn du sie nicht aufweisen kannst, wenn sie nur Gedankendinge sind, wie kommt es dann, daß sie uns trotzdem etwas lehren sollen über die Welt der Wirklichkeit? Mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit werden wir dann hören: Das Recht zu meinem Tun gibt mir *die Erfahrung.*

Statt des Physikers antwortet uns so der Philosoph. Ich sage nicht, das er unrecht hat; aber ist seine Antwort schon genügend? Wie oft schien nicht Erfahrung zu bestätigen, was sich schließlich als unzutreffend erwiesen hat? Steht die theoretische Physik nicht denn doch auf viel festeren Füßen? — Es gibt nun eine philosophische Richtung, die des *Pragmatismus*, die systematisch die Konsequenzen der Annahme entwickelt hat, daß der Erfolg, die Bewährung in der Erfahrung schlechthin, als ein *Wahrheitskriterium* gelten darf. Deshalb habe ich in meinem Buche unter anderem auch diesen Pragmatismus behandelt, allerdings nur summarisch, nach dem Grundsatz: An ihren Früchten sollt ihr sie erkennen. Denn es darf an jede Theorie der Erkenntnis die Forderung gestellt werden, daß sie dem intellektuellen Bedürfnis ernsthafter Forscher zu dienen vermag.

Betrachten wir weiter die *Hypothesen*, die der Physiker, ja schon der Geometer, machen muß, sobald er Mathematik auf räumliche Dinge anwenden will. Jetzt erhebt sich die Frage nach dem Werte der Hypothesen überhaupt. Ihr Daseinsrecht sogar wird geleugnet von der philosophischen Richtung des (extremen) *Positivismus*, dessen Hauptvertreter in der Gegenwart noch dazu ein mit Recht geschätzter Physiker ist. Deshalb habe ich geglaubt, auch die behauptete Möglichkeit einer „hypothesenreinen" Wissenschaft untersuchen zu sollen.

Zu diesen beiden kommt, an Ansehen und wohl auch Bedeutung sie überragend, die ältere vorwiegend *spekulative* philosophische Richtung des *Idealismus*, deren Hauptvertreter Kant ist. In ihr ist eine überaus merkwürdige Ansicht über das Wesen des Raumes (wie der Zeit) zutage getreten, und es ist vielleicht sogar die Originalität dieser Lehre die Hauptursache des großen Erfolgs der Philosophie Kants geworden. Schon im Wesen unseres Geistes (des „Gemütes") soll bekanntlich eine bestimmte Vorstellung über die Beschaffenheit unseres Raumes begründet sein. Ja „der Raum" existiert überhaupt nur in unserer Vorstellung, zwischen ihm und unserer Vorstellung von ihm, zwischen ihm und unserer *Raumanschauung* kann nicht unterschieden werden. Geometrie (und zwar die Kant allein geläufige gewöhnliche Euklidische Geometrie) ist hiernach nichts anderes als eine *eindeutig* bestimmte Auseinanderlegung und Verdeutlichuug dessen, was wir in unserer Raumanschauung vorfinden. Daß diese Geometrie auf Dinge außer uns, auf die Gegenstände der Physik, Anwendung finden kann, wird als selbstverständlich angesehen. Es schien mir unerläßlich, diese Lehrmeinung zu prüfen, und, wenn sie nicht angenommen werden konnte, den berechtigten Kern aus ihr herauszuschälen. Dazu war in gewissem Umfang nötig eine *Erörterung der Raumanschauung.*

Die erkenntnistheoretische Grundansicht, zu der, gleich anderen, der Verfasser sich bekennt, ist von alledem verschieden. Doch ist sie beeinflußt durch Kants Lehre von den Erkenntnissen *a priori*, zu denen auch dieses Philosophen Raum- und Zeittheorie gehört. Sie wird als (theoretischer) *Realismus* bezeichnet.[1]) Sie scheint, in der Hauptsache, eben die Ansicht zu sein, die in der *Forschungsweise der großen Naturforscher* zutage tritt, auch dort, wo sie sich nicht ausdrücklich über philosophische Fragen geäußert haben. Zum Wesen dieses Realismus, der eingehender betrachtet wird, gehört vor allem, daß er *Erfahrung* und *Spekulation* als gleich wertvolle und durchaus notwendige Mittel der Forschung gelten läßt. Der Realist leugnet also nicht grundsätzlich den Wert der Hypothesen. Auf weitere Einzelheiten, die zur Vervollständigung des Bildes gehören, kann hier nicht eingegangen werden.

1) Die Definitionen der verschiedenen *Ismen*, für die ich mich, nach langem Schwanken *und vielfältiger Beratung mit Philosophen von Fach*, schließlich entschieden habe, braucht natürlich niemand anzunehmen. Wer aber andere Begriffe mit diesen Worten verbinden will, darf mich darum nicht der Inkonsequenz beschuldigen (wie einer meiner Kritiker es getan hat).

Worauf es zunächst ankommt, ist: Es mußte, bei der gegenwärtigen Divergenz der Meinungen selbst über die elementarsten Dinge, zuerst nach Möglichkeit der Standpunkt gesichert werden, von dem aus ein Problem wie das des Raumes in Angriff genommen werden kann. Ich durfte einer Erörterung der anzuwendenden Forschungsgrundsätze nicht aus dem Wege gehen, wenn ich mich nicht den Vorwürfen der Oberflächlichkeit und eines gedankenlosen Empirismus aussetzen wollte. Ich schreibe diesen Überlegungen, die etwa die Hälfte meines Buches einnehmen, aber auch einen gewissen objektiven Nutzen zu. Gerade von Mathematikern werden ja, wie gesagt, Ansichten vertreten, die ich für irrtümlich halten muß. *Es scheint mir ferner, daß umgekehrt das eingehender behandelte spezielle Problem eine Art von Prüfstein bilden kann für jede Theorie der wissenschaftlichen Erkenntnis.* Eine solche wird auch dann schon zu verwerfen sein, wenn sie im konkreten Falle nur mit Hilfe eines *salto mortale* zum Ziele kommen kann. Daher werden die bezeichneten philosophischen Theorien später nochmals, und dann in ihrem Verhältnis zum Raumproblem betrachtet.

3. *Die Frage nach dem Wesen unseres Raumes ist nach realistischer Auffassung ein naturwissenschaftliches Problem.*

Dieses erfordert zu seiner Lösung, soweit eine solche überhaupt möglich sein mag, eben die Mittel, die auch andere Probleme der Naturwissenschaft erfordern: Erfahrung, Abstraktion, Hypothesen. *A priori, wie die Schule der Neukantianer es auch heute noch will, kann hier nichts entschieden werden.* Unsere Raumanschauung ist zwar, gleich der Sinneswahrnehmung, ein unentbehrliches Mittel der Erkenntnis, für sich allein aber kann sie uns ebensowenig eine Einsicht in das Wesen des Raumes geben wie die reine Logik. Sie paßt zu der Wirklichkeit, die uns umgibt, und in der wir sind, sie würde aber zu vielem anderem ganz ebensogut passen. Denn sie ist unvollkommen wie die Sinneswahrnehmung, mehr oder weniger verschwommen, dazu in hohem Maße individuell und plastisch. Sie hat also gerade die Eigenschaften nicht, die Kant, ohne nähere Untersuchung, ihr zugeschrieben hatte, und die, trotz längst und mehrfach erfolgter Klarstellung des wirklichen Sachverhalts, auch heute noch ihr vielfach zugeschrieben werden. Und auch die Grundansicht der Schule Kants, daß unser Raum nichts ist als eine Vorstellungsform, ein reines Produkt unseres Geistes, ist unhaltbar, unvereinbar mit den Tatsachen, unbrauchbar für die Physik. Wir müssen vielmehr dem Raume eine selbständige *Realität*, eine von unserem Erkennen, ja von unserem Dasein unabhängige Existenz zuschreiben. Auf die Begründung dieser Behauptungen kann hier nicht eingegangen werden.

Die nächste Hypothese, die dann gemacht werden muß, ist, daß dieser *unser Raum eine mathematisch zu beschreibende Struktur hat, daß es eine* ***natürliche Geometrie*** *gibt.* Die Fiktion einer Beseitigung alles Rauminhalts ist unentbehrlich für den Aufbau der theoretischen Physik: andernfalls würden wir der Fülle der Erscheinungen ratlos gegenüberstehen. Unentbehrlich sind aber auch, zum mindesten als Durchgangspunkte, gewisse Abstraktionen, die wir mit den Worten Punkt, starrer Körper usw. bezeichnen. Unentbehrlich ist darum die Annahme einer präzisen Raumstruktur: ohne sie würde eine theoretische Physik nicht denkbar sein. So kommen wir zum Begriff des physischen oder empirischen *dreidimensionalen* Raumes und zur Idee der natürlichen Geometrie. Diese ist ein System abstrakter Begriffe, *eines* unter unzähligen Systemen ähnlicher Art, die uns alle die reine Logik, die Mathematik, liefert, oder die doch, wenigstens der Anlage nach, in der Mathematik enthalten sind und aus geeigneten *Voraussetzungen* rein-logisch entwickelt werden können. Mit Hilfe eines solchen Systems muß also, so wird angenommen, der Raum zu beschreiben sein. Aber welches unter allen denkmöglichen Systemen *abstrakter Geometrie* nun diese natürliche Geometrie sein mag, das wissen wir nicht, und wir können es sogar niemals genau ermitteln. Denn dazu bedürften wir der Erfahrung. Wir müssen sozusagen an der Wirklichkeit des Raumes herumtasten, bis wir ein System finden, das paßt. Aber alle Erfahrung ist mangelhaft, ungenau; und das hat die weitere Folge, daß eine eindeutig bestimmte Entscheidung sich als unmöglich erweist. *Haben wir irgendeine Hypothese über die Beschaffenheit der natürlichen Geometrie oder also des empirischen Raumes gemacht, so kann uns die experimentelle Prüfung wohl lehren, daß wir fehlgegriffen hatten, nie aber kann sie uns zeigen, daß wir auf dem richtigen Wege sind.*

4. Das Gesagte scheint eine ziemlich hoffnungslose Perspektive zu eröffnen. So schlimm steht aber die Sache in Wirklichkeit nicht. Denn erstens gibt uns die Erfahrung eine Menge Anhaltspunkte, die die *Auswahl* unter den vielen nebeneinander bestehenden Arten „abstrakter Geometrie" von vornherein sehr einschränken. Zweitens dürfen wir uns das Recht nehmen, unnötig komplizierte Hypothesen, solche, die durch Erfahrung nicht kontrollierbare Bestandteile enthalten, von vornherein abzulehnen. Die Mannigfaltigkeit der Systeme abstrakter Geometrie, unter denen wir dann noch die „natürliche Geometrie" zu suchen haben, ist aber ganz gering. Sie ergibt sich als Lösung eines zwar aus der Empirie abstrahierten, aber doch *rein-mathematischen,* übrigens sehr schwierigen Problems, des sogenannten Riemann-Helmholtzschen Problems. Es bleiben als brauchbar übrig nur die (abstrakte) Euklidische Geometrie und die verschiedenen Systeme Nicht-Euklidischer Geometrie.

Das Ergebnis der Untersuchung ist also eine vollkommene Rechtfertigung der Ansichten, die im wesentlichen von den Begründern der Nicht-Euklidischen Geometrie (Gauß, Lobatschewskij, J. Bolyai, B. Riemann) herrühren und später namentlich von Helmholtz vertreten worden sind.

Es wird aber, im Gegensatz zu dem sonst Üblichen, Gewicht auf den Umstand gelegt, daß die zu bildenden Hypothesen je zwei Bestandteile von stark abweichendem Charakter enthalten. Es erfolgt daher die Hypothesenbildung in *zwei* Schritten oder Stufen, die, hier wohl zum ersten Male, scharf getrennt und auf ganz verschiedene Art motiviert werden (und so motiviert werden *müssen*).

Was den Physiker besonders nahe angeht, ist, daß unter den in Betracht kommenden Systemen abstrakter Geometrie, wie zu erwarten, die Euklidische Geometrie sich befindet, auf der alle zurzeit vorhandenen physikalischen Theorien, auch die modernsten und entlegensten, direkt oder indirekt beruhen. *Bei der Euklidischen Geometrie darf sich also der Physiker bis auf weiteres beruhigen.*

Um zu diesem Ergebnis zu kommen, genügen aber nicht etwa die primitiven Erfahrungen, die man schon im gemeinen Leben macht, und selbst nicht die feinsten Laboratoriumsversuche. Vielmehr ist dazu erforderlich Kenntnis gewisser Tatsachen aus der kosmischen Physik.

Im Auge zu behalten ist ferner, daß neue und verfeinerte Beobachtungen uns zwingen können, unsere Ansichten zu ändern.

Immer aber wird die Euklidische Geometrie, als Hypothese über die Struktur des Raumes, ihren Wert behalten müssen, als eine erste und sehr brauchbare Annäherung. Sie wird bleiben als Grundlage der klassischen Mechanik, die ebenfalls als eine brauchbare Annäherung ihren Wert behalten wird. Und wenn, wie es jetzt den Anschein hat, es sich zeigen sollte, daß unsere Vorstellungen über die Grundlagen der Physik radikal geändert werden müssen, daß es vielleicht sogar ziemlich gleichgültig ist, in welche Art von „Raum" wir unsere theoretische Physik einbauen wollen, so wird dennoch das Raumproblem, wie wir es gekennzeichnet haben, mindestens als ein notwendiger Durchgangspunkt, seine Bedeutung behalten. Denn vernünftigerweise können wir nicht umfangreiche Formelsysteme axiomatisch vom Himmel fallen lassen. Wir können auch nicht verwickelte oder schwierige Experimente von den elementaren physikalischen Tatsachen ablösen, die dabei gebraucht werden. Nur stufenweise vollzieht sich unsere Erkenntnis. Viel zu gewaltsam aber drängen sich die Begriffe des dreidimensionalen Raumes und des wenn auch nur annähernd starren Körpers oder der geodätischen Lichtbahn der Beobachtung auf, als daß es je möglich sein sollte, sie aus den Grundlagen der Physik ganz zu entfernen.

Übrigens sind physikalische Theorien zuweilen Eintagsfliegen. Man wird guttun, gegenüber dem jetzt gerade unheimlich schnell erfolgenden Wechsel der Ansichten einiger Physiker Ruhe zu bewahren. Vielleicht gilt am Ende auch hier, was Kant von gewissen philosophischen Ergebnissen gesagt hatte: Sie sind wie Meteore, deren Glanz nichts für ihre Dauer verspricht.

5. Bis hierher ist nicht die Rede gewesen von allerlei Dingen, die mit dem Raumproblem nur einen loseren Zusammenhang haben, mit denen aber die Theorie dieses Problems belastet worden ist. *Historische, pädagogische, psychologische, logische, mathematisch-methodische Fragen werden meines Erachtens vom Raumproblem besser ganz abgetrennt und gesondert behandelt.* Dies ist ein bisher so gut wie nicht beachteter, aber sehr wichtiger Punkt. Denn keine geringe Verwirrung ist eben dadurch entstanden, daß man die heterogensten Dinge durcheinander geworfen hat. Selbst in den Schriften von Helmholtz wird das erkenntnistheoretische Problem durch mancherlei Fremdartiges zurückgedrängt und verdunkelt. Hier galt es, einen gründlichen Wandel zu schaffen. In diesem Punkte befinde ich mich, soviel ich sehe, im Gegensatz zu *allen* meinen Vorgängern, soweit von ihnen überhaupt systematische Arbeiten vorliegen, besonders aber zur gesamten neueren Literatur des Raumproblems. Ich rede also von diesen Dingen zum Teil gar nicht, zum Teil so, „wie etwa die Beschreibung einer Reise nach Island von Schlangen reden mag“: Um zu sagen, daß es dort keine gibt. Man hat zum Beispiel in meinem Buche eine detaillierte Beschreibung des „berechtigten Kerns“ von Kants Ideen vermißt. Mit gleichem Rechte dürfte man in einem Werke über Botanik eine Physiologie des menschlichen Auges oder eine Beschreibung der Instrumente vermissen, deren sich der Botaniker bedient. Es mußte mir genügen, gezeigt zu haben, daß es sich um ein Problem der *Psychologie* handelt. Das Weitere ist Sache des Psychologen, zumal anders als durch Experimente nicht viel darüber auszumachen sein wird. Es liegt auch schon ein reichhaltiges Material vor, das zu beurteilen mir aber nicht zukam. Mein Kritiker, der meint, einem solchen Problem rein-spekulativ zu Leibe gehen zu können, und dabei im Grunde wieder auf Kants Ideen zurückkommt, stellt sich dic Sache sicher viel leichter vor, als sie ist.

Die Geschichtsschreibung darf es gewiß nicht vergessen, daß scharfsinnige *logische* Untersuchungen, die über die systematische Stellung des Parallelenpostulats oder Parallelenaxioms, uns erst den Blick freigemacht haben, daß wir durch sie erst in den Stand gesetzt worden sind, das Raumproblem angemessen zu behandeln. *Für das erkenntnistheoretische Problem aber kann es nur auf das Dasein der nötigen logischen*

Hilfsmittel ankommen, nicht auf ihre immer mehr oder minder willkürliche Gruppierung oder Herleitung. Können wir heute zu diesen Hilfsmitteln ohne sogenannte axiomatische Untersuchungen kommen, so liegt kein *erkenntnistheoretischer* Grund vor, auf ihrer Benutzung auch ferner zu bestehen. Ob man es dennoch tun soll, ist eine Privatangelegenheit der Mathematiker. Die Argumente für und wider können vielleicht auch den Pädagogen, den Historiker, den Psychologen interessieren, nicht aber den Physiker als Physiker.

Sehr erleichtert wird die Urteilsbildung über solche Fragen, in denen die Meinungen noch wenig geklärt sind, wenn man scharf unterscheidet zwischen reiner Logik und Erkenntnistheorie, zwischen der Mathematik und ihren Anwendungen, oder, nach üblicher Ausdrucksweise, zwischen reiner und angewandter Mathematik. Die *abstrakte Geometrie*, von der wir geredet hatten, gehört zur *reinen* Mathematik, also zur Logik. Es gibt eine abstrakte dreidimensionale, aber auch eine n-dimensionale sogenannte Euklidische, Nicht-Euklidische, projektive usw. Geometrie. Diese verschiedenen Disziplinen wohnen in unseren Gedanken friedlich nebeneiander, so wie beispielsweise innerhalb der Euklidischen Geometrie neben dem pythagoräischen Lehrsatz der Satz vom gleichschenkligen Dreieck besteht; sie unterscheiden sich voneinander gerade so wie die eben genannten Lehrsätze, nämlich durch ihre verschiedenen *Voraussetzungen (die durchaus nicht notwendig die Form von „Axiomen“ haben müssen).* Gemeinsam allen diesen Disziplinen ist, daß es sich um Gedankendinge, um Untersuchungen aus dem Bereiche der reinen Logik handelt, für die die Möglichkeit etwaniger Anwendungen zunächst gar nicht in Betracht kommt.

6. Eine ganz andere Art von Überlegungen aber wird nötig, sobald man sich die Frage vorlegt, ob nicht die eine oder andere dieser logischen Disziplinen als Gedankenbild einer physischen Realität aufgefaßt werden kann. Jetzt treten die *Hypothesen* in ihr Recht, die die reine Logik noch entbehren kann und daher höchstens vorübergehend zuläßt (wie es z. B. in der sogenannten Axiomatik geschieht). Ist doch schon die Annahme der bloßen Möglichkeit einer solchen Beziehung von Gegenständen der Physik auf *a priori* konstruierte Gedankengebilde *eine Hypothese*, die sich bei Prüfung an der Wirklichkeit nicht nur als unbrauchbar erweisen kann, sondern es tatsächlich meistens auch tut.

Diese *reinliche Scheidung zwischen abstrakter Geometrie und ihren etwanigen Anwendungen* habe ich in meinem Buche folgerecht durchgeführt.[1]) Gibt man sie als sachgemäß zu, so sieht man sich genötigt, so

1) Das ist in Abrede gestellt worden, mir völlig unbegreiflicherweise und sicher ohne jeden objektiven Grund. Diese Unterscheidung ist gerade eine der Hauptsachen in meinem Buch. Siehe S. 59, 84—96, 125—140, besonders S. 89.

manches anders zu beurteilen, als es gewöhnlich geschieht. Zunächst ist klar, daß die Möglichkeit solcher Anwendung nicht davon abhängen kann, wie sich unsere Kenntnisse historisch entwickelt haben, oder welche Art des logischen Aufbaus abstrakter Theorien wir etwa bevorzugen mögen. Aber auch die Prüfung einer solchen Theorie, eines geometrischen Systems, in einer hinreichend umfassenden Erfahrung (d. i. seine Vergleichung mit Tatsachen der kosmischen Physik) kann sich nicht auf die einzelnen Voraussetzungen der Theorie, sondern nur auf abgeleitete Folgerungen beziehen. Namentlich entzieht sich das Parallelenpostulat jeder direkten Prüfung. Es kommt also, für die Erkenntnistheorie, nur auf die *fertigen* Systeme oder Theorien an, die ja bei jeder Art der Ableitung immer den gleichen ideellen Inhalt haben müssen.

Insbesondere ergibt sich, daß die sogenannte axiomatische Methode eben darum, weil sie eine ***nur-logische*** *Methode ist, die* ***erkenntnistheoretische*** *Bedeutung gar nicht haben kann, die von vielen ihr zugeschrieben wird.*

Ferner wird man zu der Ansicht gedrängt, daß eine empirische Geometrie, eine eigene, von ihren Vertretern ausschließlich „Geometrie" genannte empirische Wissenschaft, zum mindesten überflüssig ist.[1]) Die Anwendung geeigneter Systeme abstrakter Geometrie leistet ja dasselbe. Die abstrakte Geometrie ist aber nicht wie jene empirische dem Einwand unterworfen, daß sie den Begriff der Geometrie von vornherein zu sehr beschränkt und Engzusammengehöriges unnötigerweise auseinanderreißt. Sie verlangt nicht für innerlich verwandte Probleme Verschiedenheiten in der Behandlung, die rein-logisch gar nicht zu motivieren sein würden.

Wer eine scharfe Trennung von reiner Logik und Erkenntnistheorie, von abstrakter Geometrie und ihren Anwendungen befürwortet, wird überhaupt das Hineintragen nicht-logischer Momente in die abstrakte Geometrie abweisen müssen.

Namentlich ist von diesem Standpunkt aus die oft gehörte Forderung abzulehnen, daß alle „Geometrie" *anschaulich* sein soll, oder daß es doch wenigstens die Grundlagen einer Geometrie sein sollen, „die den Namen verdient". Auch diese Art des Geometriebetriebs unterliegt dem soeben gegen die empirische Geometrie gerichteten Einwand. Für

1) Man hat, noch ganz neuerdings wieder, für den uralten Gedanken, daß „Geometrie" eine empirische Wissenschaft sei, Helmholtz verantwortlich gemacht. Er soll sogar gemeint haben, man könne die reine Geometrie aus der Erfahrung korrigieren! Siehe darüber S. 112 meines Buches. Übrigens ist im gleichen Zusammenhang auch Gauß arg mißverstanden worden.

geradezu falsch aber muß ich die Behauptung halten, daß eine so beschaffene Geometrie auf eine „logische Analyse“ unserer räumlichen Anschauung hinausläuft, die dafür viel zu verwaschen ist.

Unzutreffend ist es ferner, daß eine solche Geometrie „ebenso wie die Arithmetik zu ihrem folgerichtigen Aufbau nur weniger und einfacher Grundsätze [der Axiome] bedarf“. Zum folgerechten Aufbau gehört der Nachweis der logischen Zulässigkeit, also der Widerspruchsfreiheit. Dazu wird aber tatsächlich die Analysis benutzt, und zwar unvermeidlicherweise. Da somit die Geometrie der Analysis nicht entraten kann, während das Umgekehrte bekanntlich nicht zutrifft, so erweist sich die Parallelisierung von Geometrie und Arithmetik als nicht sachgemäß.

Endlich zeigt sich noch, daß die Analysis für sich allein schon, ohne irgendwelche „Axiome“, alle Arten abstrakter Geometrie liefert, die man haben will, und zwar auf eine sehr viel einfachere Weise als die Axiomatik. ***Nur*** aus der Analysis sogar hat man bis jetzt brauchbare Begriffe der Kurve, Fläche usw. zu schöpfen vermocht.

Unter diesen Umständen fragt man sich vergebens, weshalb denn diese verwickelten Axiomensysteme zu einem angemessenen Betrieb der Geometrie unerläßlich sein sollen, und warum gar eine einfachere Art der Behandlung des gleichen Stoffs nicht einmal als „wissenschaftlich“ anerkannt werden darf, wie es einzelne Vertreter der axiomatischen Forschungsrichtung wollen.

7. Wirklich unwissenschaftlich ist dagegen die herkömmliche *analytische* Geometrie, die Resultate eines Schulunterrichts übernimmt, der angesichts der Beschaffenheit des Schülermaterials strengen Anforderungen unmöglich genügen kann. *Es muß anerkannt werden, daß hier für den künftigen Lehrer das Bedürfnis nach einer Ergänzung besteht, und daß die moderne Axiomatik diesem Bedürfnis entspricht.*[1])

Jener „analytischen“ Geometrie der Lehrbücher stelle ich eine

1) In meinem Buche steht das leider nicht. Ich bin auf dieses Manko durch einen meiner Kritiker, Herrn Max Simon in Straßburg, aufmerksam gemacht worden. Dazu war es aber schwerlich nötig, meine Objektivität zu verdächtigen, wie es Simon in seiner Rezension durchweg und auch aus diesem Anlaß tut (Geisteswissenschaften 1914, S. 1082).

Herr Simon vertritt die von mir abfällig beurteilte Philosophie der sogenannten Marburger Schule, und insbesondere Cohens Ansichten über „das dx“, in einer Schrift (*Über Mathematik*, Gießen 1908), die ich ebenfalls sehr ungünstig beurteilt hatte (Literaturzeitung 1909, S. 2548). Wer diese Leistung kennt, wird sich nicht wundern, wenn er neuerdings zum Beispiel erfährt, daß die Analysis „zwar den Punkt einwandfrei definiert, aber ... — nach Veronese (?) — schon bei der Kurve versagt!“

andere gegenüber, die ich die wahre nennen möchte, die jedenfalls noch eher als jene *den Namen verdient*, da ihre Begriffe und Beweise ausschließlich der Analysis entlehnt sind. Der Axiomatiker mag sie höchstens als eine „Pseudogeometrie“ gelten lassen, auch muß zugegeben werden, daß sie „unhistorisch“ ist und nicht *ad usum Delphini* dienen kann (so wenig wie übrigens auch die Axiomatik). Dafür aber hat diese Art der *Geometrie* (wie sie zu nennen ich mir herausnehme) einige andere Vorzüge. Sie hat von vornherein einen viel weiteren Gesichtskreis. Sie braucht vor dem Imaginären, und auch vor unendlich vielen Dimensionen, nicht zu erschrecken oder gar haltzumachen. Sie darf sich vollkommener Strenge rühmen, und sie führt den Lernenden nicht erst auf dem Umweg über das Falsche zur Einsicht des Richtigen. Schließlich ist sie der Macht erkenntnistheoretischer Vorurteile gänzlich entrückt, und eben deshalb leistet sie, in der Anwendung, schließlich für die Erkenntnistheorie Besseres. Zu alledem kommt noch, daß die großen modernen Disziplinen der algebraischen und der Differentialgeometrie in ihr, *nicht aber in der geometrischen Axiomatik*, ihre Grundlagen haben.

Geschrieben ist eine solche analytische Geometrie, von der ich in meinen Vorlesungen an geeigneten Stellen einen Begriff zu geben suche[1]), allerdings wohl noch nicht. Es sollte aber doch einmal geschehen, auch im Interesse der künftigen Lehrer. Wo zum Beispiel ein Lehrbuch dem Imaginären aus dem Wege geht oder es gar erschleicht und fehlerhaft handhabt, da sind nicht alle Voraussetzungen für einen sachgemäßen Betrieb der höheren Geometrie beigebracht.

8. Ich bezeichne nunmehr, zusammenfassend und ergänzend, meine Stellung zur Geometrie der Axiomatiker, da sie verschiedentlich mißverstanden worden ist, nochmals kurz wie folgt:

Eine erkenntnistheoretische Bedeutung kann ich diesen Forschungen, und rein-logischen Untersuchungen überhaupt, *nicht* einräumen. Die aus der Annahme einer solchen Bedeutung abgeleiteten methodischen Forderungen und gewisse damit zusammenhängende Werturteile betrachte ich als unbegründet. Die Ansicht von Begriff und Wesen der Geometrie, die hierbei zum Vorschein gekommen ist, scheint mir zu eng zu sein und insofern dem wissenschaftlichen Bedürfnis der Gegenwart nicht zu entsprechen. Ferner halte ich die axiomatische Methode selbst für zu schwerfällig und schwierig, als daß sie sich als sonderlich fruchtbar hätte erweisen können. Doch erkenne ich an, daß durch diese Methode von ihren Urhebern oder vielmehr Erneuerern gewisse Probleme der

---

1) Vgl. die Skizze S. 84—96 in meinem Buch.

reinen Mathematik gelöst worden sind, die ein wissenschaftliches und zum Teil auch ein pädagogisches Interesse haben.

Ich wende mich also *gegen eine mir unberechtigt scheinende Kritik*, gegen Dogmatismus und gewisse hochgespannte Ansprüche, denke aber nicht daran, diese scharfsinnigen Untersuchungen „aufs höchste zu mißachten", wie sogar ein sonst ganz objektiver Beurteiler gemeint hat.[1])

Anders freilich stelle ich mich zu dem Massenbetrieb, der alsbald eingesetzt hat. Diese moderne Scholastik, deren Wesen in der mechanischen Handhabung eines trockenen Schemas besteht, scheint mir eine wirkliche Gefahr für die Wissenschaft zu bedeuten. Ich sehe nicht ein, warum alles und jedes „auf Axiome gebracht" werden soll, und weshalb die mit den wirklichen Fortschritten der Wissenschaft eng zusammenhängende genetische Darstellungsform in Acht und Bann getan werden muß. Pädagogisch ist das jedenfalls nicht, und die zuweilen behauptete Sicherung gegen Irrtum kann die Axiomatik natürlich auch nicht bieten. Ich kann es nicht als heilsam betrachten, daß zahlreiche, besonders aber jüngere Mathematiker sich für die Bearbeitung „spezieller" Probleme zu gut halten und immer nur „grundlegende" Untersuchungen anstellen, d. h. den wirklichen oder vermeintlichen Baugrund der Wissenschaft stets aufs neue umwühlen wollen. Das Gebäude der Geometrie, der algebraischen wie der Differentialgeometrie, sieht so aus wie jedes Gebäude, an dem Generationen mit wechselnden Bedürfnissen, mit einem nicht immer geläuterten Geschmack, und oft genug auch mit schlechtem Material gearbeitet haben. Große Teile davon sind geradezu baufällig. Dieses Gebäude solide, wohnlich und schön zu gestalten, ist meines Erachtens eine *sehr* viel wichtigere Aufgabe als die Reduktion irgendeines Systems von n Axiomen oder Postulaten auf deren $n-1$. Aber dazu bedarf es freilich erfahrener und in gewissem Sinne künstlerisch gebildeter Architekten, eine einseitige Betätigung in Kellergeschossen, die dazu noch meistens um ihrer selbst willen dazusein scheinen, jedenfalls häufig ohne genügende Rücksicht auf den Bauplan des Ganzen konstruiert werden, bildet keine irgendwie genügende Vorbereitung zur Beteiligung an einem solchen Werke. Ich meine *produktive* Kritik zu üben, wenn ich versuche, das Interesse jüngerer Mathematiker von unfruchtbaren Spitzfindigkeiten abzulenken und Kräfte freizumachen für Aufgaben, *deren Dringlichkeit man zwar ignorieren, aber nicht leugnen kann.*

Schließlich erlaube ich mir, wie man erkannt haben wird, nicht ohne Anlaß, eine Bitte an wohlmeinende Kritiker: Nichts in mein Buch hineinzulesen, was darin nicht steht.

1) Vgl. Äußerungen auf S. 128, 133, 135, 137, 140 meines Buchs.