Werk

Titel: Zur Lehre von den Mongeschen Flächen.

Autor: Beck, H.

Jahr: 1913

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?37721857X_0022|log27

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

definiert ist. Da die Durchrechnung einer Reihenumkehrung, wenn man sich nicht mit ganz wenig Gliedern zufrieden geben will, immer ein unangenehmes und Rechenfehlern besonders leicht ausgesetztes Geschäft ist, so kann man in solchen Fällen wünschen, der Berechnung der Glieder gerader Ordnung überhaupt überhoben zu sein. Das läßt sich auf folgendem Wege erreichen:

Man setze zunächst:

$$x + x_1 = 2\sigma, \quad x - x_1 = 2\delta,$$

dann ergibt sich aus (1) und (3) durch Subtraktion und Addition:

$$(4)\quad y = \delta[1 + \alpha(x + x_1) + \beta(x^2 + xx_1 + x_1^2) + \gamma(x^3 + x^2x_1 + xx_1^2 + x_1^3) + \varepsilon(x^4 + x^3x_1 + x^2x_1^2 + xx_1^3 + x_1^4) + (x_1x_1)^5],$$

$$0 = 2\sigma + \alpha(x^2 + x_1^2) + \beta(x^3 + x_1^3) + \gamma(x^4 + x_1^4) + \varepsilon(x^5 + x_1^5) + (x,x_1)^6.$$

Aber die symmetrischen Funktionen von x und x_1 lassen sich durch σ und δ^2 ausdrücken; man erhält so:

$$(5)\quad y = \delta[1 + 2\alpha\sigma + \beta(3\sigma^2 + \delta^2) + \gamma(4\sigma^3 + 4\sigma\delta^2) + \varepsilon(5\sigma^4 + 10\sigma^2\delta^2 + \delta^4) + (\sigma,\delta)^5]$$

$$0 = \sigma + \alpha(\sigma^2 + \delta^2) + \beta(\sigma^3 + 3\sigma\delta^2) + \gamma(\sigma^4 + 6\sigma^2\delta^2 + \delta^4) + \varepsilon(\sigma^5 + 10\sigma^3\delta^2 + 5\sigma\delta^4) + (\sigma,\delta)^6.$$

Aus der zweiten Gleichung erhält man σ als Funktion von δ^2 ausgedrückt durch die Reihe

$$\sigma = -\alpha\delta^2 + (3\alpha\beta - \alpha^3 - \gamma)\delta^4 + (\delta^6),$$

also:

$$\sigma^2 = \alpha^2\delta^4 + (\delta^6);$$

setzt man das in (5) ein, so erhält man:

$$y = \delta[1 + (\beta - 2\alpha^2)\delta^2 + (9\alpha^2\beta - 2\alpha^4 - 6\alpha\gamma + \varepsilon)\delta^4 + (\delta^6)]$$

und durch Reihenumkehrung:

$$\delta = y[1 + (2\alpha^2 - \beta)y^2 + (14\alpha^4 - 21\alpha^2\beta + 6\alpha\gamma + 3\beta^2 - \varepsilon)y^4 + (y^6)].$$

Zur Lehre von den Mongeschen Flächen.

Von H. Beck in Charlottenburg.

Die bereits von Monge behandelten Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden wurden von P. Stäckel der Vergessenheit entrissen, der auch eine Zusammenstellung der älteren Literatur über diesen Gegenstand gab.[1]) Besonderes Interesse erweckten als Biegungsflächen

1) Beiträge zur Flächentheorie, Leipz. Ber. (1896), S. 478—485; (1902), S. 108 bis 120.

von Kugeln die sogenannten Serretschen Flächen, d. i. die Mongeschen Flächen von konstantem Krümmungsmaß. Für diese gab P. Stäckel ursprünglich eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung. Später zeigte G. Scheffers[1]), daß sich die kartesischen Koordinaten x, y, z durch Quadraturen darstellen lassen. P. Stäckel hat endlich diese Darstellung von allen Quadraturen befreit, so daß die Koordinaten in endlicher Form erscheinen. Aber auch diese, später von E. Study[2]) verwandte Darstellung ist noch recht umständlich ausgefallen; der analytische Apparat überwuchert so sehr, daß die zugrunde liegenden *außerordentlich einfachen* geometrischen Tatsachen nicht klar zutage treten. Auch die neueren Arbeiten über den Gegenstand[3]) bedeuten in der Beziehung kaum einen wesentlichen Fortschritt.

Wir wollen nun an der Hand liniengeometrischer Methoden weniger auf die hinreichend bekannten Eigenschaften der Mongeschen Flächen eingehen, als vielmehr die nahen Beziehungen zu verwandten geometrischen Disziplinen beleuchten. Dadurch gelangen wir zu einer Darstellung der sämtlichen Mongeschen Flächen, die einer Vereinfachung kaum noch fähig sein dürfte und sicher den Vertretern der Differentialgeometrie die weitere Forschung wesentlich erleichtern wird. Die Frage nach den Serretschen Flächen wird sich als gleichbedeutend mit zwei anderen wohlbekannten Problemen erweisen, nämlich dem Problem der Traktrix bzw. dem der Kurven eines Nullsystems.

1.

Zwei getrennte Punkte mit den rechtwinkligen Kartesischen Koordinaten (a_1, b_1, c_1) und (a_2, b_2, c_2) bestimmen eine Gerade mit den Plückerschen Koordinaten

$$(1)\qquad \begin{cases} \varrho\mathfrak{X}_{01} = a_2 - a_1, & \varrho\mathfrak{X}_{23} = b_1 c_2 - c_1 b_2, \\ \varrho\mathfrak{X}_{02} = b_2 - b_1, & \varrho\mathfrak{X}_{31} = c_1 a_2 - a_1 c_2, \\ \varrho\mathfrak{X}_{03} = c_2 - c_1, & \varrho\mathfrak{X}_{12} = a_1 b_2 - b_1 a_2, \end{cases}$$

wo ϱ ein Proportionalitätsfaktor ist.

1) Einführung in die Theorie der Flächen (erste Auflage) S. 229.

2) Minimalkurven und Serretsche Flächen, Am. Journ. **32**, S. 264—278.

3) L. Raffy, Étude sur les surfaces imaginaires de Monge, Bull. de la soc. math. de France, **36**, (1908). L. Weickmann, Beiträge zur Theorie der Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden. Diss. München 1912. P. Frank, Die Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden als kugelgeometrisches Analogon der abwickelbaren Flächen, Mitt. der Math. Gesellschaft in Hamburg, **5**, (1913), S. 49—70. L. Ph. Eisenhart, Ruled surfaces with isotropic generators, Rend. Pal. **34**, (1912), S. 29—40. Vgl. auch einen Aufsatz von L. Berwald, der demnächst in den Ber. der Bayr. Akademie erscheinen wird.

Der Abstand zweier Punkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$ und $P_2(x_2, y_2, z_2)$ auf dieser Geraden $\mathfrak{X}$ läßt sich eindeutig erst dann erklären, wenn man über das Vorzeichen der Quadratwurzel

$$\mathfrak{x}_0 = \sqrt{\mathfrak{x}_{01}^2 + \mathfrak{x}_{02}^2 + \mathfrak{x}_{03}^2}$$

entschieden hat. Die Gerade wird dadurch orientiert, d. i. in einen *Speer* verwandelt. Ein Speer kann dann durch die sieben homogenen Koordinaten

$$\mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_{01} : \mathfrak{x}_{02} : \mathfrak{x}_{03} : \mathfrak{x}_{23} : \mathfrak{x}_{31} : \mathfrak{x}_{12}$$

dargestellt werden, zwischen denen außer der „Plückerschen Identität"

$$\mathfrak{x}_{01}\mathfrak{x}_{23} + \mathfrak{x}_{02}\mathfrak{x}_{31} + \mathfrak{x}_{03}\mathfrak{x}_{12} = 0 \tag{2}$$

noch die Beziehung besteht:

$$\mathfrak{x}_0^2 - \mathfrak{x}_{01}^2 - \mathfrak{x}_{02}^2 - \mathfrak{x}_{03}^2 = 0. \tag{3}$$

Ist $\mathfrak{x}_0 = 0$, so ist der Abstand zweier getrennter Punkte auf der Geraden stets gleich Null. Die Gerade ist dann eine *Minimalgerade* („MG"). Alle übrigen Geraden heißen *Euklidisch*. Auf einer Euklidischen Geraden liegen zwei „entgegengesetzte" Speere. Um von einem Speere zum entgegengesetzten überzugehen, hat man das Vorzeichen der Koordinate $\mathfrak{x}_0$ abzuändern.[1])

Nach diesen Vorbereitungen erklären wir den Abstand der beiden Punkte P_1 und P_2:

$$\text{dist}(P_1, P_2) = -\text{dist}(P_2, P_1) = \frac{\mathfrak{x}_{01}(x_2 - x_1) + \mathfrak{x}_{02}(y_2 - y_1) + \mathfrak{x}_{03}(z_2 - z_1)}{\mathfrak{x}_0}. \tag{4}$$

Dieser Messung ist also der eine der beiden Speere zugrunde gelegt, deren Träger die als Euklidisch vorausgesetzte Gerade $\mathfrak{X}$ ist.

Die Orientierung einer Euklidischen Geraden setzt die beiden durch sie hindurchlaufenden *Minimalebenen* („ME") in eine bestimmte Reihenfolge.[2]) Man kann sie dann als Anfangsebene und Endebene unterscheiden. Als Anfangsebene erklären wir die folgende

$$(\mathfrak{x}_{11} + i\mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_{23})x + (\mathfrak{x}_{22} + i\mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_{31})y + (\mathfrak{x}_{33} + i\mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_{12})z = \mathfrak{x}_{23}^2 + \mathfrak{x}_{31}^2 + \mathfrak{x}_{12}^2, \tag{5}$$

deren Gleichung auch in einer der nachstehenden Formen geschrieben werden kann:

---

1) Daß aus dieser nicht ganz einwandfreien Ausdrucksweise Mißverständnisse entstehen könnten, ist wohl nicht zu befürchten.

2) Eine Ebene $u_0 + u_1 x + u_2 y + u_3 z = 0$ heißt Minimalebene, wenn $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$ ist, ohne daß u_1, u_2, u_3 gleichzeitig verschwinden. Vgl. des Verf. Aufsatz: Zur Geometrie in der Minimalebene, Sitzber. der Berl. Math. Ges. **12**, (1912) S. 14—30.

$$(5)\quad \begin{cases} (-\mathfrak{X}_{02}^2-\mathfrak{X}_{03}^2)x + (\mathfrak{X}_{01}\mathfrak{X}_{02}+i\mathfrak{X}_0\mathfrak{X}_{03})y + (\mathfrak{X}_{01}\mathfrak{X}_{03}-i\mathfrak{X}_0\mathfrak{X}_{02})z \\ \qquad\qquad + \mathfrak{X}_{11} - i\mathfrak{X}_0\mathfrak{X}_{23} = 0, \\ (\mathfrak{X}_{02}\mathfrak{X}_{01}-i\mathfrak{X}_0\mathfrak{X}_{03})x + (-\mathfrak{X}_{03}^2-\mathfrak{X}_{01}^2)y + (\mathfrak{X}_{02}\mathfrak{X}_{03}+i\mathfrak{X}_0\mathfrak{X}_{01})z \\ \qquad\qquad + \mathfrak{X}_{22} - i\mathfrak{X}_0\mathfrak{X}_{31} = 0, \\ (\mathfrak{X}_{03}\mathfrak{X}_{01}+i\mathfrak{X}_0\mathfrak{X}_{02})x + (\mathfrak{X}_{03}\mathfrak{X}_{02}-i\mathfrak{X}_0\mathfrak{X}_{01})y + (-\mathfrak{X}_{01}^2-\mathfrak{X}_{02}^2)z \\ \qquad\qquad + \mathfrak{X}_{33} - i\mathfrak{X}_0\mathfrak{X}_{12} = 0. \end{cases}$$

Die eine oder andere dieser Darstellungen kann versagen; eine bleibt aber immer brauchbar. Die Endebene erhält man, wenn man in (5) überall i durch $-i$ ersetzt. Die neu eingeführten Symbole bedeuten:

$$(6)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_{11} = \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{X}_{12} - \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{X}_{31}, \\ \mathfrak{X}_{22} = \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{X}_{23} - \mathfrak{X}_{01}\mathfrak{X}_{12}, \\ \mathfrak{X}_{33} = \mathfrak{X}_{01}\mathfrak{X}_{31} - \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{X}_{23}.^{1}) \end{cases}$$

Statt der Ausdrucksweise, die Abstandsmessung sei auf einem Speere erfolgt, kann man jetzt auch sagen, sie geschehe in einer Minimalebene, etwa der Endebene. Soll nämlich der Abstand P_1P_2 in der ME

$$u_0 + u_1x + u_2y + u_3z = 0$$

gemessen werden, so ist zu setzen

$$7)\quad \operatorname{dist}(P_1,P_2) = \frac{(a_2u_3-a_3u_2)(x_2-x_1)+(a_3u_1-a_1u_3)(y_2-y_1)+(a_1u_2-a_2u_1)(z_2-z_1)}{i(a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3)},$$

wie man sich überzeugt, wenn man den zur Ebene u gehörigen Verbindungsspeer von P_1 und P_2 ermittelt. Die drei Größen a sind dabei ganz beliebig zu wählen; sie fallen schließlich aus den Endformeln wieder heraus. Sie sind aber nicht zu umgehen, wenn man eine allgemein gültige Formel erhalten will. Ihre Wahl unterliegt indessen der Bedingung, daß der Nenner in (7) nicht verschwinden darf.

Im übrigen gelingt es auf diese Weise auch, die vier Formeln (5) zu einer einzigen zusammenzufassen, was wir dem Leser überlassen.

2.

Ist $\mathfrak{X}$ eine Minimalgerade, so bestehen noch die Identitäten

$$(8)\quad \mathfrak{X}_{11} : \mathfrak{X}_{01} = \mathfrak{X}_{22} : \mathfrak{X}_{02} = \mathfrak{X}_{33} : \mathfrak{X}_{03}.$$

Bezeichnen wir den gemeinsamen Wert dieser drei Ausdrücke mit $\mathfrak{X}_{00}$, so ist auch

$$(9)\quad \mathfrak{X}_{00}^2 + \mathfrak{X}_{23}^2 + \mathfrak{X}_{31}^2 + \mathfrak{X}_{12}^2 = 0.$$

Durch eine MG läuft nur eine einzige ME:

$$(10)\quad \mathfrak{X}_{00} + \mathfrak{X}_{01}x + \mathfrak{X}_{02}y + \mathfrak{X}_{03}z = 0.$$

1) Vgl. E. Study, Geometrie der Dynamen S. 258.

Zwei getrennte MG $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ sind parallel, wenn

$$(11) \qquad (\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}) = \mathfrak{X}_{01}\mathfrak{Y}_{01} + \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{Y}_{02} + \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{Y}_{03} = 0.$$

Haben sie überdies die ME gemeinsam, so sollen sie *doppelt-parallel* heißen.[1])

Sie schneiden sich, falls

$$(12) \quad (\mathfrak{X}\mathfrak{Y}) = \mathfrak{X}_{01}\mathfrak{Y}_{23} + \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{Y}_{31} + \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{Y}_{12} + \mathfrak{X}_{23}\mathfrak{Y}_{01} + \mathfrak{X}_{31}\mathfrak{Y}_{02} + \mathfrak{X}_{12}\mathfrak{Y}_{03} = 0.$$

Ist endlich $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}) \neq 0$, so sind sie windschief.

Die *gemeinsame Normale* zweier nicht paralleler MG findet man als Schnittkante ihrer ME; sie ist Euklidisch und hat die Koordinaten

$$(13) \qquad \begin{aligned} &\mathfrak{X}_{02}\mathfrak{Y}_{03} - \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{Y}_{02} : \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{Y}_{01} - \mathfrak{X}_{01}\mathfrak{Y}_{03} : \mathfrak{X}_{01}\mathfrak{Y}_{02} - \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{Y}_{01} \\ &: \mathfrak{X}_{00}\mathfrak{Y}_{01} - \mathfrak{X}_{01}\mathfrak{Y}_{00} : \mathfrak{X}_{00}\mathfrak{Y}_{02} - \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{Y}_{00} : \mathfrak{X}_{00}\mathfrak{Y}_{03} - \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{Y}_{00}. \end{aligned}$$

Die gemeinsame Normale treffe die beiden MG $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ in den Punkten N_x und N_y. Für diese findet man die Koordinaten

$$(14) \qquad \begin{aligned} N_x : &\begin{cases} (\mathfrak{X}/\mathfrak{Y})x = \mathfrak{Y}_{02}\mathfrak{X}_{12} - \mathfrak{Y}_{03}\mathfrak{X}_{31} - \mathfrak{Y}_{00}\mathfrak{X}_{01}, \\ (\mathfrak{X}/\mathfrak{Y})y = \mathfrak{Y}_{03}\mathfrak{X}_{23} - \mathfrak{Y}_{01}\mathfrak{X}_{12} - \mathfrak{Y}_{00}\mathfrak{X}_{02}, \\ (\mathfrak{X}/\mathfrak{Y})z = \mathfrak{Y}_{01}\mathfrak{X}_{31} - \mathfrak{Y}_{02}\mathfrak{X}_{23} - \mathfrak{Y}_{00}\mathfrak{X}_{03}, \end{cases} \\ N_y : &\begin{cases} (\mathfrak{X}/\mathfrak{Y})x = \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{Y}_{12} - \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{Y}_{31} - \mathfrak{X}_{00}\mathfrak{Y}_{01}, \\ (\mathfrak{X}/\mathfrak{Y})y = \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{Y}_{23} - \mathfrak{X}_{01}\mathfrak{Y}_{12} - \mathfrak{X}_{00}\mathfrak{Y}_{02}, \\ (\mathfrak{X}/\mathfrak{Y})z = \mathfrak{X}_{01}\mathfrak{Y}_{31} - \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{Y}_{23} - \mathfrak{X}_{00}\mathfrak{Y}_{03}. \end{cases} \end{aligned}$$

Diese Gleichungen (14) führen zu einer Parameterdarstellung des Punktgebietes auf einer Minimalgeraden $\mathfrak{P}$. Dazu führen wir vier Verhältnisgrößen $\mathfrak{A}_{00} : \mathfrak{A}_{01} : \mathfrak{A}_{02} : \mathfrak{A}_{03}$ ein, die den Ungleichungen genügen

$$(15) \qquad \mathfrak{A}_{00} \neq 0, \qquad (\mathfrak{A}/\mathfrak{P}) \neq 0.$$

Sonst dürfen sie ganz beliebig gewählt werden. Dann läßt sich ein Punkt der MG $\mathfrak{P}$ mit Hilfe des Parameters τ in folgender Weise darstellen:

$$(16) \qquad \begin{cases} (\mathfrak{A}/\mathfrak{P})x = \mathfrak{A}_{02}\mathfrak{P}_{12} - \mathfrak{A}_{03}\mathfrak{P}_{31} + \mathfrak{A}_{00}\mathfrak{P}_{01}\tau, \\ (\mathfrak{A}/\mathfrak{P})y = \mathfrak{A}_{03}\mathfrak{P}_{23} - \mathfrak{A}_{01}\mathfrak{P}_{12} + \mathfrak{A}_{00}\mathfrak{P}_{02}\tau, \\ (\mathfrak{A}/\mathfrak{P})z = \mathfrak{A}_{01}\mathfrak{P}_{31} - \mathfrak{A}_{02}\mathfrak{P}_{23} + \mathfrak{A}_{00}\mathfrak{P}_{03}\tau. \end{cases}$$

Die Hilfsgrößen $\mathfrak{A}$ fallen schließlich aus den Rechnungen wieder heraus, ganz wie bei (7) die a. Die Formeln (16) sind übrigens in gleicher Weise brauchbar, wenn $\mathfrak{P}$ eine Euklidische Gerade ist.

---

1) Vgl. des Verf. Aufsatz: Die Gruppe der Minimalgeraden, Leipz. Ber. **64**, (1912), S. 37. Die Durchführung der weiterhin im Texte auftretenden Rechnungen wird wesentlich erleichtert, wenn man sich der in dieser Arbeit eingeführten Hilfsmittel bedient.

Der Punkt N_x liegt mit allen Punkten von $\mathfrak{Y}$ in derselben ME. Daher lassen sich nach (7) unzweideutig die Strecken berechnen, deren Anfangspunkt N_x ist, und deren Endpunkte die Punkte auf $\mathfrak{Y}$ sind. Alle diese Strecken sind gleich lang; man findet für sie den Ausdruck

$$\frac{i(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})}{(\mathfrak{X}/\mathfrak{Y})}. \tag{17}$$

Als genau so lang erweisen sich die Strecken mit dem Anfangspunkt N_y, deren Endpunkte auf $\mathfrak{X}$ liegen; sie sind dazu in der ME von $\mathfrak{X}$ zu messen.

Die Nachweise führt man am besten, indem man zuerst die Fälle erledigt, wo $\mathfrak{X}_{00}$ oder $\mathfrak{Y}_{00}$ verschwindet. Im Falle $\mathfrak{X}_{00} \neq 0$, $\mathfrak{Y}_{00} \neq 0$ kann man dann die $\mathfrak{A}$ etwa folgendermaßen wählen:

$$\begin{aligned}&\mathfrak{A}_{00} : \mathfrak{A}_{01} : \mathfrak{A}_{02} : \mathfrak{A}_{03}\\ &\quad = (\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}) : \mathfrak{X}_{00}\mathfrak{Y}_{01} + \mathfrak{Y}_{00}\mathfrak{X}_{01} : \mathfrak{X}_{00}\mathfrak{Y}_{02} + \mathfrak{Y}_{00}\mathfrak{X}_{02} : \mathfrak{X}_{00}\mathfrak{Y}_{03} + \mathfrak{Y}_{00}\mathfrak{X}_{03}.\end{aligned}$$

Den Ausdruck (17) erhält man auch, wenn man den kürzesten Abstand zweier reeller, Euklidischer, nicht paralleler Gerader ermittelt und diese dann in MG übergehen läßt. Wir wollen ihn daher ebenfalls als *Abstand* der beiden MG $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ bezeichnen.

Von Wichtigkeit für uns ist noch die Mitte M zwischen N_x und N_y. Die Koordinaten von M liest man unmittelbar aus den Gleichungen (14) ab; wir ziehen aber eine mehr symmetrische Schreibweise vor, wozu wir allerdings noch das neue Symbol nötig haben:

$$(\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}\} = \mathfrak{X}_{01}\mathfrak{Y}_{23} + \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{Y}_{31} + \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{Y}_{12}. \tag{18}$$

Dann ergeben sich die Koordinaten von M in der Form:

$$\begin{cases} -2(\mathfrak{X}/\mathfrak{Y})^2 \cdot x = 2(\mathfrak{X}/\mathfrak{Y})[\mathfrak{X}_{00}\mathfrak{Y}_{01} + \mathfrak{Y}_{00}\mathfrak{X}_{01}] \\ \qquad\qquad + (\mathfrak{X}_{02}\mathfrak{Y}_{03} - \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{Y}_{02})[(\mathfrak{Y}/\mathfrak{X}\} - (\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}\}], \\ -2(\mathfrak{X}/\mathfrak{Y})^2 \cdot y = 2(\mathfrak{X}/\mathfrak{Y})[\mathfrak{X}_{00}\mathfrak{Y}_{02} + \mathfrak{Y}_{00}\mathfrak{X}_{02}] \\ \qquad\qquad + (\mathfrak{X}_{03}\mathfrak{Y}_{01} - \mathfrak{X}_{01}\mathfrak{Y}_{03})[(\mathfrak{Y}/\mathfrak{X}\} - (\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}\}], \\ -2(\mathfrak{X}/\mathfrak{Y})^2 \cdot z = 2(\mathfrak{X}/\mathfrak{Y})[\mathfrak{X}_{00}\mathfrak{Y}_{03} + \mathfrak{Y}_{00}\mathfrak{X}_{03}] \\ \qquad\qquad + (\mathfrak{X}_{01}\mathfrak{Y}_{02} - \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{Y}_{01})[(\mathfrak{Y}/\mathfrak{X}\} - (\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}\}]. \end{cases} \tag{19}$$

Die Kugel mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $i(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}) : 2(\mathfrak{X}/\mathfrak{Y})$ enthält die beiden MG $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ als Erzeugende der einen Schar, falls diese windschief sind; sie wird zum Minimalkegel, wenn $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ sich schneiden. Somit folgen die Sätze:

Die Kugel durch zwei windschiefe Minimalgerade hat zum Radius den halben Abstand der beiden Minimalgeraden; ihr Mittelpunkt liegt auf der gemeinsamen Normalen und halbiert die Strecke, die auf dieser

von den beiden Minimalgeraden abgeschnitten wird. Insofern der Radius der Kugel ein bestimmtes Vorzeichen hat, ist die Kugel orientiert.

Zu der letzten Aussage wollen wir noch einiges bemerken. Eine Kugel orientieren kann, wie schon angedeutet, nur heißen, dem Radius ein bestimmtes Vorzeichen beilegen. Ein solches Formelsystem, in dem der Radius auftritt, und nicht sein Quadrat, erhält man nun, wenn man die Plückerschen Koordinaten der Erzeugenden aufstellt. Die Kugel, die orientiert werden soll, heiße:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-\varrho^2=0. \tag{20}$$

Ihre Erzeugenden gewinnt man dann mit Hilfe eines Parameters λ:

$$\left\{\begin{array}{c} 1-\lambda^2 \quad : \quad i(1+\lambda^2) : -2\lambda \\ -2b\lambda - ic(1+\lambda^2) - i\varrho(1-\lambda^2) : 2a\lambda + c(1-\lambda^2) + \varrho(1+\lambda^2) \\ : ai(1+\lambda^2) - b(1-\lambda^2) + 2\varrho i\lambda.^1) \end{array}\right. \tag{21}$$

Dies System liefert nur die eine Schar der Erzeugenden; um die andere Schar zu erhalten, hat man das Vorzeichen von ϱ abzuändern. Insofern also einem bestimmten der beiden Werte des Radius auch eine ganz bestimmte Schar der Erzeugenden zugeordnet ist, kann man als orientierte Kugel die eine Schar der Erzeugenden ansehen. Der „Radius" der orientierten Kugel (21) hat die Größe ϱ, (nicht etwa $-\varrho$). Haben zwei orientierte Kugeln eine Erzeugende gemeinsam, so darf man auch sagen, sie berühren sich.

Ebenso dürfen wir von einer *orientierten Ebene* reden, wenn wir nur das eine Büschel von MG meinen, welches in einer (Euklidischen) Ebene liegt. Auch werden wir kurz von einer ME sprechen, wenn wir unser Augenmerk auf das in einer solchen liegende MG-Büschel richten. —

Hat eine MG von der MG $\mathfrak{A}$ den Abstand k, so trifft sie die MG

$$\mathfrak{A}_{01} : \mathfrak{A}_{02} : \mathfrak{A}_{03} : \mathfrak{A}_{23} + ik\mathfrak{A}_{01} : \mathfrak{A}_{31} + ik\mathfrak{A}_{02} : \mathfrak{A}_{12} + ik\mathfrak{A}_{03},$$

die zu $\mathfrak{A}$ doppelt-parallel ist. Es gibt stets eine MG, die von drei gegebenen windschiefen MG gleichen Abstand besitzt.

3.

In der Ebene $z=0$ („Grundebene") ist durch die Gleichung

$$x\cos\vartheta + y\sin\vartheta + p = 0 \tag{22}$$

ein *Speer* gegeben.[2]) Dreht man ihn in positivem Sinne durch einen rechten Winkel, so erhält man einen „Normalspeer" des ursprünglichen.

---

1) Dieser Darstellung entzieht sich eine Erzeugende der Schar.

2) Dieser Darstellung entziehen sich die Speere der Grundebene, deren Träger eine MG ist.

Jetzt bedeutet ϑ den Winkel, durch den man den positiven X-Speer in positivem Sinne drehen muß, bis er in einen Normalspeer übergeht. Ferner ist p der Betrag, durch den man den Speer in Richtung des Normalspeeres verschieben muß, bis er durch den Nullpunkt des Koordinatenkreuzes läuft.

Der Fußpunkt des Lotes, welches vom Koordinatennullpunkt auf den Speer (22) gefällt ist, hat die Koordinaten

$$x = -p\cos\vartheta, \qquad y = -p\sin\vartheta. \tag{23}$$

Der Punkt des Speeres, welcher aus dem Punkte (23) durch Verschiebung um den Betrag $\varkappa$ in der Richtung des Speeres hervorgeht, heißt

$$\begin{aligned} x &= -p\cos\vartheta + \varkappa\sin\vartheta \\ y &= -p\sin\vartheta - \varkappa\cos\vartheta. \end{aligned} \tag{24}$$

Nach diesen Vorbereitungen kehren wir zu unserem Gegenstand zurück.

Die ME (10)

$$\mathfrak{X}_{00} + \mathfrak{X}_{01}x + \mathfrak{X}_{02}y + \mathfrak{X}_{03}z = 0$$

trifft die Grundebene in der Geraden

$$\mathfrak{X}_{00} + \mathfrak{X}_{01}x + \mathfrak{X}_{02}y = 0,$$

deren Plückersche Koordinaten so heißen:

$$\mathfrak{X}_{02} : -\mathfrak{X}_{01} : 0 : 0 : 0 : \mathfrak{X}_{00}.$$

Auf ihr liegt der Speer mit den Koordinaten

$$-i\mathfrak{X}_{03} : \mathfrak{X}_{02} : -\mathfrak{X}_{01} : 0 : 0 : 0 : \mathfrak{X}_{00};$$

für ihn ist die ME (10) Endebene. Die Gleichung dieses Speeres lautet

$$\frac{i\mathfrak{X}_{00}}{\mathfrak{X}_{03}} + \frac{i\mathfrak{X}_{01}}{\mathfrak{X}_{03}}x + \frac{i\mathfrak{X}_{02}}{\mathfrak{X}_{03}}y = 0. \tag{25}$$

Die Beziehung zwischen der ME (10) und dem Speere (25) der Grundebene nennt man *Minimalprojektion.* Jeder ME, für die nicht $\mathfrak{X}_{03} = 0$ ist, die also nicht zur Grundebene senkrecht steht, ist so eindeutig ein Speer der Grundebene zugeordnet, dessen Träger eine Euklidische Gerade ist. Umgekehrt entspricht jedem solchen Speere der Grundebene eindeutig eine Minimalebene.

Die MG $\mathfrak{X}$ trifft, falls nicht $\mathfrak{X}_{03} = 0$, die Grundebene im Punkte

$$x = -\frac{\mathfrak{X}_{31}}{\mathfrak{X}_{03}}, \qquad y = +\frac{\mathfrak{X}_{23}}{\mathfrak{X}_{03}}. \tag{26}$$

Einer solchen Minimalgeraden kann man somit eindeutig das *orientierte Linienelement* der Grundebene zuordnen, welches durch (25) und (26) gegeben ist.

Setzen wir jetzt die Plückerschen Koordinaten der MG $\mathfrak{X}$ als analytische Funktionen einer Veränderlichen t an, die in einem gemeinsamen Existenzbereich erklärt sind und, nachdem sie von einem etwaigen gemeinsamen Faktor befreit sind, nicht sämtlich konstant sein dürfen, so erfüllt die MG einen, wie wir sagen wollen, *analytischen Regulus*. Einem solchen Regulus entspricht dann in der Grundebene eine Mannigfaltigkeit von orientierten Linienelementen:

Raum:	*Grundebene:*
Unebener Minimalzylinder	Der Punktort der Linienelemente ist eine krumme Kurve; die Speere sind sämtlich *syntaktisch* (parallel und gleichgerichtet).
Orientierte Euklidische Ebene	Punktort eine Gerade, Speere syntaktisch.
Minimalebene (als Ort von MG)	Alle Punkte auf einem Speer.

Die genannten Reguli sind durch die Forderung

$$\frac{d\mathfrak{x}_{01}}{dt} = \frac{d\mathfrak{x}_{02}}{dt} = \frac{d\mathfrak{x}_{03}}{dt} \equiv 0$$

charakterisiert; *sie sollen jetzt ausgeschlossen werden.* In allen übrigen Fällen umhüllen die Speere der Linienelemente eine Kurve, wozu dann auch die Punkte der Grundebene zu rechnen sind. Als Bilder eines Regulus kommen dann ein Punktort und ein Speerort in Frage, wobei auch noch der Punktort auf einen einzigen Punkt zusammenschrumpfen kann.

Wir suchen daher einstweilen für diese Gebilde in der Grundebene eine sachgemäße Darstellung.

Unter Benutzung eines Parameters u setzen wir den Speer so an:

$$x \cos u + y \sin u + p(u) = 0. \tag{27}$$

Die Speere u und $u + du$ haben dann den Punkt gemeinsam

$$\begin{cases} x = -p \cos u + p_1 \sin u, \\ y = -p \sin u - p_1 \cos u, \end{cases} \tag{28}$$

wo $p_1 = dp : du$ gesetzt ist. Die Gesamtheit aller dieser Punkte bildet den als Punktmannigfaltigkeit aufgefaßten *Speerort*. Um den Punktort zu finden, bezeichnen wir mit $f(u)$ den Betrag, durch den man den

Punkt (28) in der Richtung des Speeres (27) verschieben muß, bis er in den gesuchten Punkt (des Punktortes) übergeht. Nach (24) finden wir für diesen dann die Koordinaten

$$(29)\qquad \begin{cases} x = -p\cos u + (p_1 + f)\sin u, \\ y = -p\sin u - (p_1 + f)\cos u. \end{cases}$$

In den Formeln (27) und (29) haben wir nun die gesuchte Darstellung unserer Gebilde in der Grundebene in brauchbarer Form. Vermöge der Gleichungen (25) und (26) ergeben sich jetzt die Plückerschen Koordinaten der zugehörigen Regulusgeraden:

$$(30)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_{01} = \cos u,\ \mathfrak{X}_{02} = \sin u,\ \mathfrak{X}_{03} = i,\ \mathfrak{X}_{23} = -i\{p\sin u + (p_1 + f)\cos u\}, \\ \mathfrak{X}_{31} = i\{p\cos u - (p_1 + f)\sin u\},\ \mathfrak{X}_{12} = p_1 + f;\ \mathfrak{X}_{00} = p. \end{cases}$$

Um von unserer ursprünglichen Darstellung (Parameter t) zu dieser speziellen überzugehen, hat man zwei Eliminationen auszuführen; in dem Sinne ist die Herstellung der Formeln (30) *ausführbar*. Alle unsere Reguli außer den Minimalzylindern sind auf diese Weise darstellbar.

4.

Um eine Parameterdarstellung der Flächen zu erhalten, auf denen die Regulusgeraden Erzeugende sind, benutzen wir die Formeln (16), indem wir über die Hilfsgrößen $\mathfrak{A}$ folgendermaßen verfügen:

$$\mathfrak{A}_{00} = 1,\quad \mathfrak{A}_{01} = -\sin u,\quad \mathfrak{A}_{02} = \cos u,\quad \mathfrak{A}_{03} = -i.$$

Setzen wir endlich noch

$$\tau + f + p_1 - p = v,$$

so ergeben sich die außerordentlich einfachen Formeln

$$(31)\qquad \begin{cases} x = \sin u(p_1 + f) + v\cos u, \\ y = -\cos u(p_1 + f) + v\sin u, \\ z = ip + vi. \end{cases}$$

Damit haben wir eine Darstellung der Mongeschen Flächen erreicht, die einer Vereinfachung wohl kaum noch fähig sein dürfte.[1]) Die analytischen Funktionen $p(u)$ und $f(u)$ unterliegen keinerlei Beschränkung.

Wir betrachten zunächst den Fall $p_3 + p_1 \equiv 0$.[2]) Setzen wir dann

$$p + a\cos u + b\sin u + ci = 0,$$

1) Doch scheint es so, als ob zuweilen eine andere Darstellung vorzuziehen sei, die man erhält, wenn man in (31) v durch $v + p_2$ ersetzt.

2) Die Indizes bedeuten Differentiationen nach u.

so liegen die Erzeugenden der Fläche in der Kongruenz, die von den Erzeugenden aller orientierten Kugeln vom Mittelpunkt (a, b, c) gebildet wird; diese Mongeschen Flächen wollen wir daher *sphärisch* nennen. Zu ihnen gehören die *orientierten Kugeln* selbst ($f = \text{const.}$) und infolgedessen auch die *Minimalkegel* ($f = 0$).

Allgemein ist die Mongesche Fläche für $f \equiv 0$ die *Tangentenfläche der Minimalkurve.*

$$\begin{cases} x = p_1 \sin u + p_2 \cos u, \\ y = -p_1 \cos u + p_2 \sin u, \\ z = i(p + p_2). \end{cases} \tag{32}$$

(Der Fall des Minimalkegels ist bereits erledigt).

Im Falle $f \not\equiv 0$ orientieren wir die Flächennormale durch die Festsetzung

$$\sqrt{EG - F^2} = -if,$$

wo E, F, G die bekannte Bedeutung haben. Dann wird die mittlere Krümmung $2:f$, das Krümmungsmaß $1:f^2$. Es bedeutet also f die gemeinsame Länge der Hauptkrümmungsradien in einem beliebigen Punkte der Erzeugenden u.

Mithin erhält man die Serretschen Flächen, wenn man f konstant wählt.

Das System

$$\begin{cases} x = p_1 \sin u + (p_2 + f_1) \cos u, \\ y = -p_1 \cos u + (p_2 + f_1) \sin u, \\ z = ip + (p_2 + f_1) i \end{cases} \tag{33}$$

stellt für orientierte Kugeln (und Minimalkegel) einen Punkt dar; für die Tangentenflächen der Minimalkurven reduziert es sich auf (32). In den übrigen Fällen stellt es die *Zentrakurve* dar. Für sphärische Mongesche Flächen liegt sie auf einem Minimalkegel. Ihr Bogenelementquadrat hat den Wert $f_1^2 du^2$; für Serretsche Flächen wird sie daher Minimalkurve (ausgenommen die orientierten Kugeln).

Mit größter Leichtigkeit gewinnen wir jetzt den Zusammenhang mit der Liniengeometrie. Bilden wir nämlich den Ausdruck (17) für die konsekutiven Erzeugenden u und $u + du$ (vgl. 30), so ergibt sich der Wert $2f$. Oder: *Der Hauptkrümmungsradius längs einer Erzeugenden einer Mongeschen Fläche ist der halbe Abstand dieser Erzeugenden von der unendlich benachbarten.*

Ebenso folgt, daß die Zentrakurve nichts weiter ist, als der Ort für die Mittelpunkte der (orientierten) Kugeln, die man durch je zwei benachbarte Erzeugenden legen kann.

Die Tatsache, daß sich zwei aufeinanderfolgende von diesen Kugeln berühren, erscheint vom liniengeometrischen Standpunkt aus als geradezu trivial; zwei solche Kugeln müssen ja eine Erzeugende gemeinsam haben.

Damit haben wir gezeigt, wie der Kern der Theorie der Mongeschen Flächen sich in einfachster Weise liniengeometrisch darbietet.

Wir betrachten noch kurz die Gebilde in der Grundebene, die den Mongeschen Flächen nach § 3 zugeordnet sind:

Raum:	*Grundebene:*
Minimalkegel.	Speerort ein (orientierter) Kreis, der in einen Punkt ausarten kann. Der Punktort besteht aus den Berührungspunkten (oder wird ebenfalls zu einem einzigen Punkte, durch den dann alle Speere hindurchlaufen).
Orientierte Kugel.	*Kasnersche Turbine*[1]*:*
Tangentenfläche einer Minimalkurve.	Punktort und Speerort fallen zusammen.
Serretsche Fläche.	*Speerort nebst Traktrix.*

5.

Wir wollen unseren Gegenstand noch von einer etwas anderen Seite beleuchten, indem wir eine von S. Lie herrührende Abbildung der Minimalgeraden auf die Punkte des Raumes[2]) weiter verfolgen. In einem „Bildraum" seien $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ homogene Punktkoordinaten, so daß die uneigentliche Ebene durch die Gleichung $x_0 = 0$ geliefert wird. Dann vollziehen wir die fragliche Abbildung durch die Formeln[3]):

$$(34)\qquad \begin{cases} \mathfrak{X}_{01} = x_0^2 - x_1^2, & \mathfrak{X}_{23} = 2(x_0x_2 - x_3x_1), \\ \mathfrak{X}_{02} = i(x_0^2 + x_1^2), & \mathfrak{X}_{31} = 2i(x_0x_2 + x_3x_1), \\ \mathfrak{X}_{03} = -2x_0x_1 & \mathfrak{X}_{12} = -2(x_0x_3 + x_1x_2), \\ & \mathfrak{X}_{00} = 2i(x_1x_2 - x_0x_3). \end{cases}$$

Jedem Punkte x, der nicht auf der uneigentlichen Geraden $x_0 = x_1 = 0$

1) Am. Journ. **33**, S. 193—202. Die Turbine entsteht durch Rotation eines orientierten Linienelementes um einen Punkt.

2) Vgl. Lie-Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen, S. 446.

3) Vgl. Leipz. Ber. **64**, (1912) S. 55. Die Formeln (35) sind dort (wo sie als (46) numeriert sind) mit einem Druckfehler behaftet.

des Bildraumes liegt, ist dann eine MG eindeutig zugeordnet. Umgekehrt entspricht jeder MG eindeutig ein Punkt des Bildraumes:

$$(35)\quad \begin{cases} x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 2(\mathfrak{X}_{01} - i\mathfrak{X}_{02}) : -2\mathfrak{X}_{03} : \mathfrak{X}_{23} - i\mathfrak{X}_{31} : -\mathfrak{X}_{12} + i\mathfrak{X}_{00} \\ \qquad\qquad = 2\mathfrak{X}_{03} : 2(\mathfrak{X}_{01} + i\mathfrak{X}_{02}) : \mathfrak{X}_{12} + i\mathfrak{X}_{00} : \mathfrak{X}_{23} + i\mathfrak{X}_{31}. \end{cases}$$

Entsprechen so den MG $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ die Punkte x bzw. y des Bildraumes, so ist

$$(36)\quad \begin{cases} (\mathfrak{X}\mathfrak{Y}) = 4(x_0y_1 - x_1y_0)(x_1y_2 - x_2y_1 - x_0y_3 + x_3y_0), \\ (\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}) = -2(x_0y_1 - x_1y_0)^2. \end{cases}$$

Die Erzeugenden $\mathfrak{Y}$ aller orientierten Kugeln, welche die MG $\mathfrak{X}$ gemeinsam haben, genügen (vgl. (17)) der Gleichung

$$i(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}) - 2c(\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}) = 0.$$

Im Bildraum wird daraus

$$(37)\quad (x_3 + cix_1)y_0 - (x_2 + cix_0)y_1 + x_1y_2 - x_0y_3 = 0.$$

Diese Gleichung definiert eine Korrelation, und zwar ein Nullsystem. Wir nennen es kurz das Nullsystem (c). Lassen wir c variieren, so bilden die zugehörigen Gewinde ein Gewindebüschel. Alle Gewinde des Büschels durchsetzen sich in einer linearen Kongruenz mit der doppelt zählenden Leitgeraden $x_0 = x_1 = 0$. Die Ebenen durch diese Gerade, die also zur x_2x_3-Ebene parallel sind, wollen wir kurz als Vertikalebenen bezeichnen. Dann haben wir:

	Bildraum:
Minimalgerade.	Punkt.
Parallele MG.	Punkte derselben Vertikalebene.
Doppelt-parallele MG.	Punkte einer Kongruenzgeraden.
Minimalebene.	Kongruenzgerade.
Unebener Minimalzylinder.	Krumme Kurve einer Vertikalebene.
Orientierte Ebene.	Gerade einer Vertikalebene.
MG $\mathfrak{Y}$ hat von MG $\mathfrak{X}$ den Abstand c.	*Der Punkt y liegt in der Nullebene (c) von x.*
Orientierte Kugel (Radius c).	Gerade (Nullgerade in (c)).
Minimalkegel.	Nullgerade in (0).
Berührende Kugeln.	Schneidende (oder parallele) Gerade.
Mongesche Fläche als Ort von MG.	*Kurve als Punktort.*
Dieselbe als Ort orientierter Kugeln.	*Kurve als Geradenort.*
„Abstandsfläche“ (alle Erzeugenden haben von einer MG gleichen Abstand).	Ebene Kurve.