Werk

Titel: Zum Biegungsproblem der Regelflächen.

Autor: Salkowski, E.

Jahr: 1913

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?37721857X_0022|log11

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Zum Biegungsproblem der Regelflächen.

Von E. Salkowski in Berlin.

I. Einleitung.

Die Theorie der Raumkurven bietet, sobald sie sich der Untersuchung speziellerer Fragen zuwendet, eine ganze Reihe von Untersuchungen, die zusammenhanglos nebeneinander gestellt zu sein und nur aus mehr oder weniger willkürlicher Kombination gewisser Konstruktionselemente entsprungen scheinen. Wenn man z. B. nach Kurven fragt, die punktweise so zugeordnet werden können, daß die Hauptnormalen der einen Kurve mit den Hauptnormalen der anderen Kurve zusammenfallen, so erscheint es rein zufällig, daß die sich ergebenden Kurven eine so interessante Kurvenklasse darstellen, wie es die Bertrandschen Kurven tatsächlich sind. Es ist zu erwarten, daß solche Fragestellungen, wenn sie auf bemerkenswerte Ergebnisse führen, nicht nur Kuriositätswert haben werden, sondern sich in einen größeren Zusammenhang einordnen lassen müssen, aus dem heraus sie als natürliche Folgerungen allgemein gültiger Sätze zu verstehen sind. Für eine große Anzahl solcher Problemstellungen erweist sich nun als die gemeinsame Quelle die Biegungstheorie der Regelflächen, die nach den Arbeiten von Minding (1838), Bonnet (1848) und Bour (1860) durch Beltrami[1]) grundsätzlich zum Abschluß gebracht ist. Die Ergebnisse seiner klassischen Arbeit, die allerdings den kurventheoretischen Konsequenzen nur wenig Beachtung schenkt, scheinen indessen in der Folge nicht immer berücksichtigt zu sein, so daß manche Probleme, die sich aus seinen Entwicklungen als ganz einfach sich darbietende Folgerungen erledigen lassen, vielfach von anderen Seiten in Angriff genommen sind. Die folgenden Bemerkungen, deren Ergebnisse übrigens im wesentlichen vorlagen, ehe ich die Beltramische Arbeit kennen zu lernen Gelegenheit hatte, beabsichtigen, auf einige solcher Zusammenhänge hinzuweisen, zu zeigen, wie sie insbesondere auch zur genaueren Untersuchung spezieller Raumgebilde führen und verwertet werden können. Dabei ist die anschauliche geometrische Betrachtungsweise, deren Bedeutung für die Probleme der Differentialgeometrie bemerkenswerterweise auch Beltrami betont, in den Vordergrund gerückt. Des Zusammenhangs wegen war es nicht zu vermeiden, besonders im Anfang auch teilweise bekannte Dinge zu rekapitulieren.

1) Beltrami, Sulla flessione delle superficie rigate. Annali di Mat. 7, 105—138. 1865. Werke Bd. I, 208—243.

Die Voraussetzung für das Folgende sind gewisse infinitesimalgeometrische Schlußweisen, deren Berechtigung, wenigstens für Stellen regulären Verhaltens auf analytischen Flächen, durch die hierfür unerläßliche analytische Behandlung des Gegenstandes gewährleistet ist. Eine geradlinige Fläche denken wir uns zusammengesetzt aus ∞^1 windschiefen Streifen, die durch zwei benachbarte Erzeugende begrenzt sind. Die Streifen setzen wir als starr voraus, so daß eine Biegung der Fläche nur durch eine Drehung der Streifen um die begrenzenden Erzeugenden erfolgen kann. Ein jeder Streifen ist dann bestimmt durch den Zentralpunkt C seiner Erzeugenden, ihren kürzesten Abstand dp und ihren Winkel $d\alpha$. Das gemeinsame Lot zweier benachbarter Erzeugenden, das also von C ausgeht, heißt der Striktionsstrahl des Streifens, die Gesamtheit der Striktionsstrahlen bildet das Striktionsband, die Gesamtheit der Zentralpunkte die Striktionslinie. Sollen im besonderen die Tangenten der Striktionslinie mit den Striktionsstrahlen zusammenfallen, so steht offenbar jede Erzeugende der Fläche auf zwei benachbarten Tangenten senkrecht, sie ist also die Binormale der Striktionslinie. Es gilt somit der bekannte Satz:

Die Binormalenflächen der Raumkurven sind die einzigen Linienflächen, für die das Striktionsband eine nicht zylindrische abwickelbare Fläche bildet.

Diese Binormalenflächen bilden bez. des Biegungsproblems eine Gruppe, wenn man zu ihnen noch die Flächen hinzunimmt, deren Erzeugende eine feste Gerade senkrecht schneiden. Da nämlich bei der Biegung die Striktionslinie immer wieder in die Striktionslinie übergehen muß (der Zentralpunkt eines Streifens ist von den Nachbarstreifen nicht abhängig), da ferner bei der Biegung die Winkel nicht geändert werden, muß in der Tat eine Binormalenfläche immer in eine Binormalenfläche übergehen, falls nicht die Striktionslinie in eine Gerade und das Striktionsband in diese Gerade ausartet. Auch die Umkehrung ist unmittelbar einzusehen:

Eine Regelfläche, deren Geraden ein und dieselbe Gerade senkrecht schneiden, geht bei jeder Biegung, die die Geraden geradlinig läßt, in die Binormalenfläche einer Raumkurve über.

Es ist offenbar nicht möglich, eine solche Biegung herbeizuführen, bei der die Gerade in eine andere ebene Kurve übergeht; es liegt also hier eine Ausnahme des in die Lehrbücher übergegangenen Satzes vor, daß für eine beliebige Kurve einer Regelfläche ∞^1 Biegungen existieren, bei denen die Kurve eben wird.

Die ausgezeichnete Stellung, die die Binormalenflächen unter den

Regelflächen einnehmen, und die Einfachheit der Ergebnisse rechtfertigt eine besondere Behandlung dieser Flächenklasse, die zunächst in Angriff genommen werden soll.

II. Die Binormalenflächen.

Da die Tangente der Raumkurve mit dem Striktionsstrahl zusammenfällt, wird der kürzeste Abstand zweier Geraden durch den Abstand zweier benachbarter Punkte der Kurve, durch ihr Bogenelement ds gegeben. Der Winkel benachbarter Erzeugenden, d. h. Binormalen, ist der Schmiegungswinkel $d\omega'$. Zwei solche Flächen sind demnach aufeinander abwickelbar, wenn die Bogenelemente und die Schmiegungswinkel ihrer Striktionslinien übereinstimmen, d. h.

$$ds = ds_1, \quad d\omega' = d\omega_1'$$

also

$$\tau = \tau_1,$$

wenn man mit ds, $d\omega'$, $\tau = \frac{d\omega'}{ds}$ die Bestimmungsgrößen der ersten, mit ds_1, $d\omega_1'$, τ_1 die entsprechenden der zweiten Kurve bezeichnet.

Die Binormalenflächen aller Raumkurven, bei denen die Torsion dieselbe Funktion der Bogenlänge ist

$$\tau = f(s), \tag{1}$$

sind aufeinander abwickelbar.

Als Repräsentanten einer jeden solchen Klasse isometrischer Regelflächen kann man die in ihr vorkommende Fläche mit geradliniger Striktionslinie wählen. Ihre Gleichungen sind leicht angebbar. Es sei die Z-Achse als Striktionslinie gewählt, dann sind alle Erzeugende der xy-Ebene parallel, und es wird offenbar

$$\begin{cases} x = u \cos \omega' \\ y = u \sin \omega' \\ z = s. \end{cases} \tag{2}$$

Hierbei ist

$$\omega' = \int f(s)\, ds$$

gesetzt.

Schneidet man eine solche Fläche (2) durch einen koaxialen Kreiszylinder vom Radius R, so besteht die Schnittkurve aus zwei bezüglich der Achsen symmetrischen Kurven, die wie man weiß, ein spezielles isometrisches Kurvenpaar im Raume[1]) darstellen. Wickelt man diesen

1) Voß, Über Kurvenpaare im Raume. Münch. Ber. 1909. 19. Abh. Insbesondere S. 29.

Kreiszylinder in eine Ebene ab, so geht die Schnittkurve in eine ebene Kurve über, deren Gleichungen

$$x_0 = R\omega' = R\int f(s)\,ds$$
$$z_0 = s$$

lauten. Diese ebene Kurve soll in der Folge das *Zeichen* der Klasse isometrischer Flächen genannt werden.

Ist $\tau = k$ konstant, so ist das Zeichen eine Gerade, und es folgt der bekannte Satz von der Abwickelbarkeit der Wendelfläche auf die Binormalenflächen der Kurven konstanter Torsion.

Zu den Flächen der betrachteten Klasse gehört auch das gleichseitige hyperbolische Paraboloid, für das

$$\tau = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

also das Zeichen

$$x_0 = R \operatorname{arc\,tg} \frac{z_0}{a}$$

ist. Es liegt nicht im Plane, dieses oder andere leicht aufzustellende Beispiele hier näher zu untersuchen.

Die Theorie der Binormalenflächen hängt eng zusammen mit der Theorie der isometrischen Kurvenpaare im Raume, deren Untersuchung durch das bisherige einen gewissen Abschluß erhält. Zwei Kurven bilden ein Kurvenpaar, wenn sie sich punktweis so zugeordnet sind, daß die Verbindungslinie entsprechender Punkte eine konstante Länge besitzt und die Tangenten der Kurven auf ihr senkrecht stehen. Es ist nun bekannt, daß man das allgemeinste isometrische Kurvenpaar (bei dem die entsprechenden Paare von Bogenelementen gleich sind) erhält, wenn man auf einer Kugel zwei bez. des Mittelpunktes symmetrische Kurven, oder auf einem Kreiszylinder zwei beliebige bezüglich der Achse symmetrische Kurven konstruiert, oder endlich auf den Binormalen einer Kurve nach beiden Seiten dieselbe konstante Strecke abträgt. Unter Benutzung der Biegungstheorie dieser Binormalenflächen und unter Berücksichtigung auch der Sonderfälle kann man jetzt das folgende Ergebnis aussprechen:

Isometrische Kurvenpaare sind

1. *zwei bezüglich des Mittelpunktes symmetrische Kurven derselben Kugel,*
2. *zwei bezüglich der Achse symmetrische Kurven eines Kreiszylinders und die aus ihnen bei beliebiger Biegung der Regelfläche des Paares entstehenden Kurven.*

Diese Erzeugungsweise scheint gegen die bisher übliche eine gewisse Vereinfachung zu bedeuten.

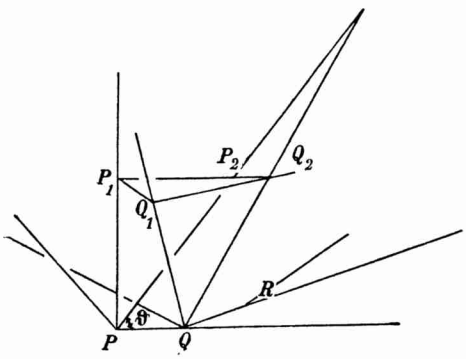
III. Binormalenflächen mit einer zur Striktionslinie äquidistanten Asymptotenlinie.

Eine in der Kurventheorie wiederholt auftretende Fragestellung ist die Bestimmung der Raumkurven, deren Hauptnormalen gleichzeitig Binormalen einer zweiten Raumkurve sind. Sie sind durch die natürliche Gleichung

$$\varkappa_1^2 + \tau_1^2 = \frac{\varkappa_1}{h}$$

zwischen ihrer Krümmung $\varkappa_1$ und der Torsion τ_1 bestimmt und sind durch eine abwickelbare Fläche der Krümmungsachsen charakterisiert. Die Konstante h bedeutet dabei den Abstand zweier entsprechender Punkte der zugeordneten Kurven.

Diese spezielle Fragestellung der Kurventheorie läßt sich, wie man unmittelbar einsieht, mit dem Biegungsproblem der im vorigen Abschnitt betrachteten Binormalenflächen in Beziehung setzen. Setzen wir den auch durch infinitesimale Betrachtungen, die hier der Kürze halber übergangen seien, leicht herleitbaren Satz als bekannt voraus, daß jede Regelfläche durch passende Biegung in die Hauptnormalenfläche einer beliebigen regulären auf ihr liegenden Kurve umgewandelt werden kann[1]), so ergibt sich die verlangte Zuordnung unmittelbar. Man nehme auf der Binormalenfläche einer beliebigen Raumkurve C' eine Orthogonaltrajektorie C_1' im Abstande h von der Kurve und biege die Fläche so, daß die Kurve C_1' in eine Asymptotenlinie übergeht. Die Kurven C' und C_1' gehen dabei in ein Kurvenpaar C, C über, das die verlangte Eigenschaft besitzt.[1]



Die gegenseitige Lage der Kurven C, C_1 läßt sich geometrisch sehr einfach kennzeichnen. Es seien (s. Fig.) $P, Q, R, \ldots$ aufeinanderfolgende Punkte der Kurve C, $P_1, Q_1, \ldots$ die entsprechenden Punkte der Kurve C_1 auf den Binormalen von C. Dann weiß man, daß $PP_1 = QQ_1 = h$ konstant ist, daß daher die Parallelen P_1P_2, $Q_1Q_2, \ldots$ zu den entsprechenden Tangenten von C eine abwickelbare Fläche bilden, deren Gratlinie $C_2 = (P_2, Q_2, \ldots)$ auf der rektifizierenden Fläche der Kurve C gelegen ist. Da P_1P für die Kurve C_1 Hauptnormale ist, so ist die darauf senkrechte Ebene $P_1Q_1Q_2$ die rektifizierende Ebene von C_1. Die Ge-

1) Für die Striktionslinie einer Binormalenfläche gilt der Satz offenbar nur in uneigentlichem Sinne.

samtheit dieser rektifizierenden Ebenen umhüllt aber gerade die Tangentenfläche der Kurve C_2, die also die rektifizierende Fläche von C_2 wird. Aus alledem folgt der Satz:

Die Gratlinie der rektifizierenden Fläche der Kurve C_1 und die Kurve C besitzen dieselbe rektifizierende Fläche.

Die Schlußweise ist eine für den hier vorliegenden Fall zweckmäßig erscheinende Modifikation eines schon gelegentlich früher verfolgten Gedankenganges.[1])

Von besonderem Interesse ist der geometrisch leicht übersehbare Fall, daß die Kurve C eine allgemeine Schraubenlinie, ihre rektifizierende Fläche also ein Zylinder wird. Dann ist $PP_2 \parallel QQ_2 \parallel \ldots$ und die Kurve C_2 wird eine parallele, also kongruente Schraubenlinie desselben Zylinders. Bezeichnet man den hier konstanten Winkel der Tangente und der rektifizierenden Geraden PP_2 mit ϑ, so ist

$$P_1 P_2 = Q_1 Q_2 = \cdots = h \operatorname{ctg} \vartheta,$$

also konstant. Bei der Abwicklung der Tangentenfläche von C_2 in die Ebene geht die Kurve C_1, die ja auf ihr geodätisch ist, immer in eine Gerade $\mathfrak{C}_1$ über; in unserem Falle ist die aus der Gratlinie C_2 hervorgehende Kurve $\mathfrak{C}_2$ so beschaffen, daß das Stück ihrer Tangente zwischen Berührungspunkt und der Geraden $\mathfrak{C}_1$ die konstante Länge $h \operatorname{ctg} \vartheta$ besitzt. Die Kurve ist demnach eine *Traktrix*, deren Gleichungen

$$x = h \operatorname{ctg} \vartheta \left(-\cos\varphi + \log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right),$$
$$y = h \operatorname{ctg} \vartheta \sin\varphi,$$

deren Krümmungsmaß und Bogenlänge

$$\varrho = h \operatorname{ctg} \vartheta \operatorname{ctg} \varphi,$$
$$s = -h \operatorname{ctg} \vartheta \log \sin\varphi$$

und deren natürliche Gleichung

$$\varrho = h \operatorname{ctg} \vartheta \sqrt{e^{\frac{2s \operatorname{tg} \vartheta}{h}} - 1}$$

lauten.

Biegt man die Ebene einer Traktrix so, daß die Tangenten geradlinig bleiben, zu einer Böschungsfläche, so liegt auf der Binormalenfläche der entstehenden Schraubenlinie eine Asymptotenlinie in konstantem Abstand von der Striktionslinie, d. h. eine Kurve, deren Hauptnormalen mit den Binormalen der Schraubenlinie zusammenfallen. Diese Kurve ist kongruent zu der aus der Leitlinie der Traktrix hervorgehenden Raumkurve, die mit ihr durch Parallelverschiebung zur Deckung gebracht werden kann.

1) Über die zweite rektifizierende Fläche einer Raumkurve. Sitzungsber. Berlin. Math. Ges. 8, 27—30.

Betreffs der reichhaltigen Literatur über die Traktrix, deren Eigenschaften zur weiteren Untersuchung der bemerkenswerten räumlichen Figur von Nutzen sein werden, vgl. etwa H. Wieleitner, Spezielle ebene Kurven. Leipzig 1908. S. 290ff.

Wenn bis hierher die synthetische Methode die Untersuchung leicht und vor allem geometrisch übersichtlich durchzuführen gestattete, ist es für das Weitere ratsam, die entsprechenden analytischen Hilfsmittel mit genügender Vollständigkeit zu entwickeln.

Es seien (x, y, z), (α, β, γ), (l, m, n), (λ, μ, ν), s, $\varkappa = \frac{1}{\varrho}$, $\tau = \frac{1}{r}$ der Reihe nach Koordinaten, Richtungskosinus der Tangenten, Hauptnormalen und Binormalen, Bogenlänge, Krümmung und Torsion für eine beliebige Stelle der Kurve C, dieselben Zeichen mit dem Index 1 bezeichnen die entsprechenden Größen für den zugeordneten Punkt der Kurve C_1. Die Gleichungen der Kurve C_1 lauten dann

$$x_1 = x + h\lambda, \ldots$$

wobei h sich aus der Orthogonalitätsbedingung von $P_1 Q_1$ und $P_1 P$ als konstant ergibt.

Aus

$$dx_1 = (\alpha + h\tau l) ds$$

ergibt sich

$$ds_1 = \sqrt{1 + h^2\tau^2}\, ds,$$

$$\alpha_1 = \frac{\alpha + h\tau l}{\sqrt{1 + h^2\tau^2}}, \ldots.$$

Durch nochmalige Differentiation ergibt sich aus den Frenetschen Gleichungen und der Forderung, daß die Hauptnormale von C_1 mit der Binormalen von C zusammenfällt, die Bedingung

$$\varkappa(1 + h^2\tau^2) + h\tau' = 0, \tag{1}$$

wobei wie stets der Akzent Differentiation nach der Bogenlänge bedeutet.

Die Gleichung (1) ist die natürliche Gleichung der Kurvenklasse C. Man kann durch Einführung des Krümmungswinkels

$$\omega = \int \varkappa\, ds$$

die Quadratur formal beseitigen und die Gleichung in die Form setzen:

$$h\tau = \operatorname{ctg}(\omega + \omega_0). \tag{1a}$$

Der Zusammenhang einer Kurve C mit der zugehörigen Kurve C_1 wird durch die Gleichungen vermittelt:

$$\varkappa_1 = \frac{h\tau^2}{1 + h^2\tau^2}, \quad \tau_1 = \frac{\tau}{1 + h^2\tau^2}, \tag{2}$$

aus denen sofort die wohlbekannte natürliche Gleichung der Kurve C_1 folgt:

$$\varkappa_1^2 + \tau_1^2 = \frac{\varkappa_1}{h}.$$

Eine gelegentlich nützliche Form der Gleichungen (2) ergibt sich durch die Formel (1a):

$$(2a) \qquad h\varkappa_1 = \cos^2(\omega + \omega_0) \quad h\tau_1 = \cos(\omega + \omega_0)\sin(\omega + \omega_0).$$

Zur Bestimmung der Schraubenlinien der Klasse C hat man in (1)

$$\varkappa = \tau \operatorname{tg}\vartheta$$

einzusetzen; durch Ausführung der elementaren Quadratur erhält man dann die vorher geometrisch gewonnenen Ergebnisse.

IV. Regelflächen mit geodätischer Striktionslinie. Der Satz von Laguerre.

Die bisher ausschließlich betrachteten Regelflächen können dadurch charakterisiert werden, daß bei ihnen die Striktionslinie die Erzeugenden senkrecht schneidet; sie ist dann offenbar stets geodätisch, da ihre Hauptnormalen mit der Flächennormale zusammenfällt. Die allgemeinsten Flächen mit geodätischer Striktionslinie ergeben sich dann aus dem bekannten Bonnetschen Satz:

Die Striktionslinie einer Regelfläche ist geodätisch, wenn sie alle Erzeugenden unter demselben Winkel schneidet[1]),

der auch durch synthetische Betrachtungen leicht dargetan werden kann.[2])

Man erhält also alle zu einer gegebenen Raumkurve als Striktionslinie gehörigen Flächen dieser Art, indem man in den rektifizierenden Ebenen der Kurve die Geraden zieht, die sie unter dem konstanten Winkel ϑ schneiden. Ihre Gleichungen sind demnach:

$$(3) \qquad \begin{cases} X = x + u(\alpha\cos\vartheta + \lambda\sin\vartheta) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Durch eine passende Biegung gelingt es stets, eine beliebige Geodätische $P_1 P_2 P_3 \dots$ einer Regelfläche in eine Gerade zu verwandeln. Hält man nämlich den Flächenstreifen fest, der das Bogenelement $P_1 P_2$ enthält, so bewegt sich bei einer beliebigen Biegung der Nachbarstreifen so, daß $P_2 P_3$ senkrecht auf der Hauptnormalen in P_1 bleibt, also in

1) Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. 2. Aufl. S. 226.

2) P. Serret, Théorie géométrique et mécanique des lignes à double courbure. Paris 1860.

der rektifizierenden Ebene der Kurve, die zum Punkte P_1 gehört. Es ist daher möglich, die Drehung so weit fortzusetzen, daß $P_2 P_3$ in die Verlängerung von $P_1 P_2$ fällt. Ist die Striktionslinie geodätisch, so ist das Verfahren ungeändert anwendbar, und man erhält als die auf die Fläche (3) abwickelbare Regelfläche mit gerader Striktionslinie:

$$(4) \qquad \begin{cases} X = u \sin\vartheta \cos\varphi \\ Y = u \sin\vartheta \sin\varphi \\ Z = v + u \cos\vartheta, \end{cases}$$

wobei

$$\varphi = \omega \operatorname{cotg}\vartheta + \omega'$$

gesetzt ist und die Krümmungs- und Schmiegungswinkel ω und ω' aus den Gleichungen

$$d\omega = \varkappa\, ds, \quad d\omega' = \tau\, ds$$

sich ergeben.

Auch hier ist eine Klasse aufeinander abwickelbarer Regelflächen durch φ und ϑ bestimmt, d. h. durch eine natürliche Gleichung von der Form

$$\varkappa \cos\vartheta + \tau \sin\vartheta = f(s).$$

Konstruiert man durch die Punkte einer beliebigen Kurve C auf einem Kreiszylinder die Geraden, die die Achse unter einem konstanten Winkel α treffen, so erhält man eine Regelfläche mit geradliniger Striktionslinie, aus der die allgemeinste Regelfläche mit geodätischer Striktionslinie durch eine beliebige Verbiegung hervorgeht.

Man wird auch hier die Kurve C das *Zeichen* der Flächenklasse nennen. Es ist unmittelbar einleuchtend, in welcher Weise sich die schiefe geschlossene Schraubenregelfläche mit geradlinigen Zeichen als Biegungsfläche des Rotationshyperboloid einordnet.

Von besonderem Interesse ist die Bemerkung, daß, abgesehen von dem Falle, daß $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ist, die Fläche so verbogen werden kann, daß die Striktionslinie in eine ebene Kurve übergeht; aus $\tau = 0$ folgt

$$\varkappa \cos\vartheta = f(s),$$

d. h. *Konstruiert man in den rektifizierenden Ebenen einer ebenen Kurve C*

$$\varkappa = \varphi(s)$$

diejenigen Geraden, die sie unter dem konstanten Winkel ϑ schneiden, so erhält man Regelflächen, die die Kurve C als Striktionslinie besitzen. Verbiegt man nun diese Fläche auf alle nur möglichen Weisen zu einer anderen Linienfläche, so geht die ebene Kurve über in Raumkurven, die durch die natürliche Gleichung

$$\varkappa + \operatorname{tg}\vartheta \cdot \tau = \varphi(s)$$

charakterisiert sind, oder in eine Gerade.

Geht man von einem Kreise $\varrho =$ konst. aus, so wird $\varphi(s) =$ konst., und man erhält den bekannten Satz von Laguerre, der die Striktionslinien der Biegungsregelflächen des Rotationshyperboloids als Bertrandsche Kurven charakterisiert. Dieser berühmte Laguerresche Satz, wie übrigens auch die oben ausgesprochene Verallgemeinerung ist implizite schon in einer von Beltrami angegebenen Formel enthalten, die sich durch eine analog der hier durchgeführten Rechnung unmittelbar gewinnen läßt.

V. Asymptotenlinien auf den Binormalenflächen.

Zum Schlusse sei nur noch an einem Beispiel gezeigt, wie die Theorie der Regelflächen sich durch Anregung neuer Problemstellungen, die bekannte Ergebnisse unter wesentlich allgemeinere Gesichtspunkte einordnen, für die Kurvenlehre als nützlich erweist. Im dritten Abschnitt handelte es sich um die Bestimmung einer zur Striktionslinie äquidistanten Asymptotenlinie auf Binormalenflächen. Hieran knüpft sich naturgemäß das allgemeine Problem der Asymptotenlinien auf einer Binormalenfläche, und zwar:

1. Wie hat man eine gegebene Binormalenfläche

$$x = x + u\lambda, \ldots, \ldots$$

zu biegen, damit eine vorgegebene Kurve $u = F(s)$ der Ausgangsfläche in eine Asymptotenlinie übergeht?

2. Welche Eigenschaften besitzen diejenigen Raumkurven, die sich als Asymptotenlinien auf eine Binormalenfläche legen lassen?

Das letzte Problem kann auch rein kurventheoretisch gefaßt werden:

2a. Bei welchen Raumkurven kann man in der Schmiegungsebene durch den entsprechenden Kurvenpunkt gerade Linien legen, die die Binormalen einer zweiten Raumkurve bilden?

Die erste Frage beantwortet sich sehr leicht. Ist die Torsion der Striktionslinie als Funktion der Bogenlänge gegeben

$$\tau = f(s),$$

so gilt diese Beziehung auch für die Striktionslinie jeder Biegungsfläche, ihre nicht geradlinigen Asymptotenlinien ergeben sich aus der zweiten Fundamentalform der Fläche durch die Gleichung

$$2\tau\, du + (\tau^2 \varkappa u^2 + \tau' u + \varkappa) ds = 0,$$

so daß also die erste Krümmung der Striktionslinie der Biegungsfläche

$$\varkappa = -\frac{2fF + f'F}{1 + f^2 F^2}$$

sein muß. Hieraus kann man nicht nur gewisse früher gefundene Ergebnisse ohne weiteres ablesen, sondern auch manche neue Folgerung ziehen.

Wichtiger und von größerem Interesse scheint die zweite der anfangs gestellten Fragen zu sein.

Es sei (xyz) eine Kurve und durch jeden Kurvenpunkt in der Schmiegungsebene eine gerade Linie gezogen, die mit der Tangente den gesetzmäßig veränderlichen Winkel ϑ bilde; dann lauten die Gleichungen der entstehenden Regelfläche

$$(1) \qquad \begin{cases} X = x + u(\alpha \cos\vartheta + l \sin\vartheta) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Die Striktionslinie $(x_0 y_0 z_0)$ ist dann durch den Wert

$$(2) \qquad u_0 = \frac{(\vartheta' + \varkappa)\sin\vartheta}{(\vartheta' + \varkappa)^2 + \tau^2 \sin^2\vartheta}$$

gekennzeichnet. Soll nun die Fläche die Binormalenfläche der Striktionslinie $u = u_0$ sein, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß ihre Erzeugenden die Striktionslinie senkrecht schneiden, daß also

$$\Sigma dx_0 (\alpha \cos\vartheta + l \sin\vartheta) = 0$$

wird. Da aber

$$\frac{dx_0}{ds} = \alpha + u_0'(\alpha \cos\alpha + l \sin\vartheta) + u_0[(\vartheta' + \varkappa)(l \cos\vartheta - \alpha \sin\vartheta) - \tau\lambda \sin\vartheta]$$

. . . . . .

ist, muß

$$(3) \qquad u_0' + \cos\vartheta = 0$$

werden. Ist nun ϑ als Funktion von s bekannt, so ergibt sich aus (2) und (3) als natürliche Gleichung der gesuchten Kurven:

$$(4) \qquad (\vartheta' + \varkappa)\sin\vartheta + [(\vartheta' + \varkappa)^2 + \tau^2 \sin^2\vartheta] \int \cos\vartheta \, ds = 0.$$

Das Linienelement der gesuchten Striktionslinie wird

$$(5) \qquad ds_0 = \frac{\tau \sin^2\vartheta \, ds}{\sqrt{(\vartheta' + \varkappa)^2 + \tau^2 \sin^2\vartheta}}.$$

In den Gleichungen (4) und (5) tritt eine Funktion ϑ auf, die willkürlich vorgeschrieben werden kann. Es genügt also *jede* Raumkurve der Aufgabe (2) bzw. (2a), sofern einschränkende Bedingungen nicht hinzutreten. Das für eine vorgelegte Raumkurve zu erfüllende Gesetz, nach dem ϑ sich mit der Bogenlänge ändert, ergibt sich aus (4) durch Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung. Unterwirft man dagegen ϑ einer beliebig vorzuschreibenden Bedingung, so