Über die Stellung der Definition in der Axiomatik.[1])

Von A. SCHOENFLIES in Königsberg in Pr.

Von der methodischen Vollendung, die die Grundlegung der Geometrie von seiten der Mathematiker erfahren hat, unterscheiden sich die neueren Arbeiten über die Grundlagen der Arithmetik und Mengenlehre sehr wesentlich. Den Grund erblicke ich darin, daß sie vorwiegend unter dem Einfluß philosophischer Denkweise stehen. Von der Schärfe mathematischen Geistes geboren, ist die Mengenlehre allmählich in philosophisches Fahrwasser geraten und hat die zwingende Kraft, die der mathematischen Schlußweise innewohnt, zu einem Teile verloren.[2])

Die Mathematik sollte sich daher von dem Einfluß der philosophischen Denkweise befreien. Dieser Gedanke hat mich auch bei meinen früheren Arbeiten schon geleitet. Wenn es mir heute möglich erscheint, die geforderte Trennung als erreichbar hinzustellen, so liegt mir daran, von vornherein zu betonen, daß wir dies der modernen, von Hilbert geschaffenen, axiomatischen Methode danken. Wir haben aus ihren Grundgedanken nur noch eine letzte Konsequenz zu ziehen. Diese Konsequenz, die sich auch bei mir erst in letzter Zeit zur Klarheit ausgereift hat, betrifft insbesondere die Stellung, die man der *Definition* im axiomatischen Aufbau sowie überhaupt in den mathematischen Entwicklungen anzuweisen hat.

Allerdings mögen meine Ausführungen mehr oder weniger selbstverständlich oder trivial erscheinen. Dies würde ihre sachliche Richtigkeit nicht herabsetzen. Da aber sogar Mathematiker ersten Ranges in ihren Arbeiten nicht immer diesen Ausführungen gemäß verfahren sind, scheint mir eine ausführlichere Erörterung doch erforderlich zu sein.[3])

§ 1. Scheidung zwischen Erkenntnistheorie und Mathematik.

Am Schlusse eines kürzlich gehaltenen Vortrags über „Erkenntnistheorie und Naturwissenschaft" hat sich Herr O. Külpe in folgendem

1) Der Artikel ist in wesentlich derselben Form kürzlich auch in den Schriften der Phys. ökon. Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. erschienen; Bd. 51 (1910) I, S. 260.

2) Als Vertreter der philosophischen Richtung möchte ich insbesondere Peano und Russell nennen; in jüngster Zeit auch Hessenberg.

3) Den momentanen äußeren Anlaß hat sie darin, daß demnächst eine zweite Auflage meines mengentheoretischen Berichts I erscheinen soll. Es ist mir daher ein Bedürfnis, die grundlegenden Fragen vorher möglichst allseitig geklärt zu sehen.

Sinne ausgesprochen[1]): *In den Naturwissenschaften wird Erkenntnis geschaffen; Aufgabe der Philosophie sei es, diese Erkenntnis zu begreifen.*

Eine derartige reinliche Scheidung sollte meines Erachtens auch zwischen Erkenntnistheorie und Mathematik Platz greifen. Die Mathematik braucht sich um die *erkenntnistheoretische Erörterung* ihrer Eigenart, sowie der Objekte und Beziehungen, mit denen sie operiert, nicht zu kümmern; sie mag deren Untersuchung getrost dem Philosophen überlassen. Natürlich kann es keinem Mathematiker verwehrt sein, sich auch philosophisch zu betätigen, sowie umgekehrt; aber es ist gut, daß ein jeder sich bewußt bleibe, wann er Erkenntnistheorie treibt und wann Mathematik.

Vielleicht wird allerdings die Möglichkeit einer scharfen Unterscheidung beider Gebiete von mancher Seite verneint werden; befinde ich mich doch mit dieser Forderung auch im Gegensatz zu Hilberts Heidelberger Vortrag über die Grundlagen der Logik und Arithmetik.[2]) Ich hoffe aber zu zeigen, daß sachliche Schwierigkeiten für ihre Ausführbarkeit nicht vorliegen, und daß die axiomatische Methode, bis in ihre letzten Konsequenzen verfolgt, die Möglichkeit gewährt, die reinliche Scheidung, die der Külpesche Ausspruch fordert, auch für die Mathematik und die Erkenntnistheorie durchzuführen. Angesichts der Tatsache, daß sich in neuerer Zeit die Philosophen mehrfach mit der Erörterung der erkenntnistheoretischen Grundlagen der Mathematik beschäftigen[3]), scheint es mir erwünscht, daß ihnen die Mathematik in einer Form dargeboten wird, die von allem philosophischen oder gar scholastischen Beiwerk frei ist.

§ 2. Die logischen Grundlagen des mathematischen Schließens und der kontradiktorische Charakter der Mathematik.

Die axiomatische Methode setzt sich die Aufgabe, die mathematischen Erkenntnisse auf gewisse Grundbegriffe und Grundtatsachen einfachster Art zurückzuführen; aus ihnen ist alles weitere den logischen Gesetzen gemäß zu schließen. Es ist daher klar, daß in den axiomatischen Aufbau eines jeden mathematischen Wissensgebietes Beweiselemente von zweierlei Art eingehen, und zwar:

---

1) Vortrag, gehalten auf der Naturforscherversammlung zu Königsberg, 1910, S. 41.

2) Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses; Leipzig 1905, S. 174.

3) Außer Russell besonders Couturat und Natorp.

I. Die allgemeinen Regeln *jeglichen* logischen Schließens und

II. Die Voraussetzungen, die das *spezielle* mathematische Wissensgebiet charakterisieren.

Was zunächst die logischen Regeln betrifft, so *nehmen wir ihre Gültigkeit und Anwendbarkeit als erste selbstverständliche Tatsache an.* Es handelt sich hier nur darum, daß sie in der Mathematik wie in jeder andern Wissenschaft als allgemein anerkannte Gesetze *tatsächlich* zur Verwendung kommen. Die Untersuchung ihres Ursprungs und ihrer Tragweite bleibt, wie wir soeben in § 1 betonten, *außerhalb* der Mathematik; sie ist Sache der Philosophie. Dagegen mag die *Aufzählung* der logischen Gesetze, die für die mathematische Beweisführung besonders in Betracht kommen, hier eine Stelle finden. Abgesehen von den Regeln der deduktiven Schlußweise sind es:

1. *Der Satz vom Widerspruch.* Er besagt, daß von den beiden Aussagen: „Dem Objekt A kommt die Eigenschaft B zu", und „dem Objekt A kommt die Eigenschaft B nicht zu", stets einer und nur einer richtig ist; er bildet die Grundlage des indirekten Beweises.

2. Die auf kontradiktorischer Grundlage ruhende *Einteilung* eines mathematischen Objekts oder einer mathematischen Beziehung in *einander ausschließende Unterabteilungen.*[1])

Daß ich gerade diese beiden logischen Tatsachen besonders anführe, beruht auf derjenigen allgemeinen Eigenschaft der Mathematik, in der ich ihre logische Besonderheit erblicke, die sie meines Erachtens von allen andern abstrakten Wissenschaften unterscheidet und vor ihnen auszeichnet. Sie besteht darin, daß ihre Begriffe und Beziehungen kurzgesprochen *kontradiktorischer Natur* sind. Das bedeutet insbesondere, daß sie ausnahmslos die Methode des indirekten Beweises gestatten, und daß die eben genannte Einteilung, anders ausgedrückt, die Erschöpfung aller an sich möglichen Beziehungen, die zwischen zwei mathematischen Objekten Platz greifen können, in jedem Fall so durchgeführt werden kann, daß *jede einzelne Beziehung* vermöge ihrer eindeutigen Bestimmtheit *alle andern logisch ausschließt.* Die mathematischen Objekte sind *logisch isolierbar* (wie z. B. die Punkte des Kontinuums). Dieser kontradiktorische Charakter der Mathematik ist es auch, auf dem die *Harmonie ihrer Gesetze* beruht. Er bewirkt ins-

1) Als Beispiel erwähne ich die von Cantor stammende Aufzählung der vier einander ausschließenden Möglichkeiten, die zwischen zwei Mengen und ihren Teilmengen in bezug auf Äquivalenz an sich stattfinden können (vgl. meinen Bericht, Bd. I, S. 15). Übrigens gehört auch die Einteilung der algebraischen Gleichungen nach ihrem Grad hierher; woraus man beiläufig erkennen kann, daß die Gesamtheit der zu unterscheidenden Unterabteilungen nicht endlich zu sein braucht.

besondere, daß Begriffen, für die der Satz des Widerspruchs und die auf ihm ruhende Methode des indirekten Beweises versagt — sei es aus logischen oder mathematischen Gründen — *ein mathematisches Objekt nicht entsprechen kann.*[1])

Ich glaube übrigens nicht fehl zu gehen, wenn ich die Mathematik als die *einzige* Wissenschaft bezeichne, die ausnahmlos die Methode des indirekten Beweises gestattet; sie könnte durch diese Eigenschaft geradezu definiert werden (vgl. auch § 9).

§ 3. Die Eigenart der axiomatischen Methode.

Um die Eigenart der axiomatischen Methode zu kennzeichnen, kann ich nichts Besseres tun, als auf die Schriften hinweisen, in denen sie ihre klarste Darstellung gefunden hat. Die ersten, in denen sie tatsächlich zur Erscheinung kommt, sind meines Erachtens die Schriften von Pasch über Neuere Geometrie und Dedekinds „Was sind und was sollen die Zahlen?". Das Werk, in dem sie ihre vollkommenste und geradezu mustergültige Darstellung gefunden haben, sind aber Hilberts Grundlagen der Geometrie. Sie haben der axiomatischen Methode die Welt erobert; an sie werde ich daher die folgenden Erörterungen anknüpfen.

Hilbert geht von drei Arten mathematischer Objekte aus, die Punkt, Gerade, Ebene genannt werden, und von gewissen mathematischen Beziehungen, die diese Objekte betreffen. Ihre nähere Aufzählung ist hier nicht nötig. Nur an zweierlei muß ich erinnern. Erstens wird zunächst nur eine Axiomgruppe eingeführt, nämlich die der Verknüpfung, und zweitens sind es bei jeder Axiomgruppe *nur* die in ihr enthaltenen *Beziehungen*, die den materiellen bzw. den mathematischen Inhalt der Axiome ausmachen. Diese Beziehungen sind es daher, die die Grundlage aller Sätze über die Verknüpfung der drei Arten von Objekten bilden (wie z. B. für den Desarguesschen Satz); sie bilden aber auch, was ich ausdrücklich anführe, die *alleinige* und *ausschließliche* Grundlage aller derartigen Sätze. Dagegen sind die Namen der Objekte, wenigstens soweit die Eigenart der axiomatischen Methode in Betracht kommt, belanglos. Man könnte diese Namen an sich ganz entbehren

1) Auf den kontradiktorischen Charakter der Mathematik und die Folgerungen, die daraus zu ziehen sind, habe ich ausführlicher an anderer Stelle hingewiesen. (Dieser Jahresber. Bd. 15, 1906, S. 19.) Ich könnte mich auch auf Äußerungen von andern beziehen, die diesem Umstand gelegentlich Ausdruck gegeben haben; man vergleiche z. B. die Einleitung zu Poincaré „der Wert der Wissenschaft". Andererseits ist klar, daß der einzelne nur eine persönliche Meinung darüber äußern kann, worauf sich die mathematische Betätigung beschränken sollte.

und statt ihrer nur die Buchstaben A, a, α usw. benutzen; also das erste Axiom so aussprechen, daß zwei Objekte A und B stets ein Objekt c bestimmen usw.[1])

Analog ist es für die zweite Axiomgruppe, die der Anordnung. Die in ihr eingeführten Begriffe und Beziehungen („Strecke" und „zwischen") sind wieder einzig und allein durch die sie betreffenden Axiome festgelegt, und es bilden die beiden Axiomgruppen die alleinige Quelle aller Sätze und Begriffe, die die Verknüpfung und Anordnung betreffen; dazu gehört bekanntlich schon ein erheblicher Teil des Lehrgebäudes der projektiven Geometrie. Das gleiche gilt ebenso von allen weiteren axiomatisch eingeführten Objekten und Beziehungen. Immer ist ihr *mathematischer Inhalt einzig und allein durch die Axiome bestimmt, die sie miteinander verbinden.*

So trivial diese Bemerkungen sein mögen, sollten sie doch eine Stelle finden; denn sie sind keineswegs immer beachtet worden (vgl. § 8). Umgekehrt möchte ich erwähnen, daß Herr Frege — ganz im Sinn der obigen Ausführungen — sogar so weit gegangen ist, für die mathematischen Objekte und Beziehungen künstlich gebildete Worte und Zeichen zu benutzen, um auf diese Weise alle Beweisquellen, die nicht in den axiomatischen Annahmen enthalten sind, auszuschließen. Das gleiche Ziel soll ja auch durch die Peanosche Zeichensprache erreicht werden.

Um die Arbeit, die die axiomatische Methode auf einem Wissensgebiet zu leisten hat, allgemeiner zu charakterisieren, muß ich einen Augenblick die Frage streifen, woher die Begriffe und Beziehungen stammen, die den Gegenstand der mathematischen Forschung bilden. Selbstverständlich teilweise aus der Empirie und teilweise aus der Phantasie. Mathematisch verwendbar werden sie aber insgesamt erst dann, wenn es gelingt, ihnen ein mathematisches Gepräge zu geben, sie mit einem *eindeutigen* vielmals *völlig neuen* Inhalt zu erfüllen, so daß sie sich *logisch vollkommen* verhalten, und den Aufbau eines *kontradiktorisch* gefügten Wissens gewährleisten. Dies gilt für alle Begriffe, mit denen man operiert, mögen sie grundlegend sein oder nicht, mag es sich um Punkte, Ebenen, Strecken und Winkel handeln, um die Funktion oder das Kontinuum, um die Menge oder die Begriffe endlich

1) Meines Erachtens besitzen wir auch in Graßmann einen verdienstvollen Vorläufer der axiomatischen Richtung; die obenerwähnten Axiome der Verknüpfung lauten bekanntlich bei ihm $AB = c$ usw. Dieser Algorithmus hat sicherlich auf die logische Herausschälung der einfachen Elemente des geometrischen Schließens auf das kräftigste hingewiesen und dadurch geholfen, die axiomatische Methode vorzubereiten.

und unendlich.[1]) Ihre eventuelle Reinigung und Umbildung, kurz ihre *Erhebung zu mathematischen Objekten* ist das, was die axiomatische wie überhaupt die mathematische Methode in erster Linie zu leisten hat, und was insbesondere Hilbert für die aus der allgemeinen Empirie stammenden geometrischen Vorstellungen durchgeführt hat. Eine Ausnahme bilden naturgemäß nur solche Worte, deren *allgemeine* Bedeutung man als *logisch bestimmt* anzusehen hat, wie eindeutig, identisch, jeder, alle usw., sie stellen *Stammbegriffe* dar, die wir — im Sinn von § 2 — in gleicher Weise als tatsächlich gegeben anzusehen haben wie die logischen Regeln.[2])

§ 4. Die Definition.

a) Die Definition im engern Sinn.

Jede Definition enthält einen Namen für eine Sache, oder, da es sich hier nur um mathematische Definitionen handelt, einen Namen für ein mathematisches Objekt. Da der Name belanglos ist, so kommt es nur auf das Objekt an. Dieses Objekt wird durch die Definition so eingeführt, daß sie seinen mathematischen Inhalt angibt.[3]) Offenbar kann dies nur mittels *bereits vorhandener Begriffe* oder Beziehungen geschehen.

Hiervon gibt es allerdings eine Ausnahme. Für die in § 3 erwähnten axiomatischen Grundbegriffe und Beziehungen existieren derartige Definitionen nicht; es ist evident, daß sie eine Zurückführung auf andere Begriffe nicht gestatten. Nichtsdestoweniger ist aber ihr mathematischer Inhalt, wie schon oben erwähnt, wohl bestimmt; er wird durch die grundlegenden Axiome unzweideutig festgelegt. In verallgemeinertem Sprachgebrauch könnte man also diese Axiome ebenfalls als *Definition der Grundbegriffe* ansehen; die Eigenart dieser Definitionen besteht dann darin, daß sie eine gewisse *Gruppe* von Begriffen und Beziehungen *zugleich* definieren.

Ich gehe wieder zu den eigentlichen Definitionen zurück und will annehmen, daß für irgendein Wissensgebiet ein *vollständiges*

1) Man vgl., was Poincaré in „Wissenschaft und Hypothese" über implizite Axiome sagt, S. 44ff.

2) Eine ausführliche Begriffsbestimmung des Wortes „definit" (= eindeutig bestimmt), wie sie Zermelo in seiner Grundlegung gibt (Math. Ann. 65, S. 263), ist also der obigen Auffassung gemäß entbehrlich. Sie kann ja auch nur durch gleichwertige Worte umschrieben werden. (Vgl. auch § 5.) Dagegen eignet der Mathematik sehr wohl die Frage, ob eine zwischen mathematischen Objekten angenommene Beziehung den Charakter besitzt, der durch den bezüglichen logischen Begriff gefordert wird, also beispielsweise eindeutig oder definit ist.

3) Genau genommen, müßte man *stets* von Objekten *oder* Beziehungen reden; der Einfachheit halber ist im Text meist nur von Objekten die Rede. Man kann ja auch von einer Beziehung sprachlich und logisch zu einem Objekt übergehen.

System von Axiomen vorhanden ist. Da die Definition ein mathematisches Objekt von gewissen Eigenschaften neu einführt, so wird durch ihren Inhalt eine mathematische Tatsache behauptet; eine solche bedarf, wie jede mathematische Tatsache, an sich eines Beweises. Er hat zu zeigen, daß die Existenz derjenigen Beziehung, die in der Definition zum Ausdruck kommt, aus den zugrunde gelegten Axiomen gefolgert werden kann. Ihr Inhalt stützt sich also in diesem Fall auf einen Lehrsatz oder doch auf ein Beweisverfahren; Quadrat, reguläres Polyeder, Konvergenzradius usw. usw. sind Beispiele. Solche Definitionen bilden also immer das *Ende* einer Erkenntnisreihe.

Es ist hier nicht der Ort, eingehender darüber zu urteilen, was als Beweis oder Beweismethode zu gelten hat, oder gar die Natur und Tragweite der verschiedenen Gattungen von Beweisen zu erörtern (konstruktiver Beweis, Existenzbeweis, indirekter Beweis usw.); es ist auch für den vorliegenden Zweck nur von sekundärer Bedeutung.

Auf *eine* einfache Beweisart möchte ich jedoch besonders hinweisen. Begriffe, wie Gruppe, Invariante, geschlossene Kurve, Erreichbarkeit stützen sich auf die *Verallgemeinerung* eines Spezialfalles; ich bemerke aber ausdrücklich, daß dieser Spezialfall stets an einem oder mehreren *bereits vorhandenen mathematischen Objekten* realisiert sein muß, wenn er einen Beweis für die Existenz des Begriffs darstellen soll. So naturgemäß und selbstverständlich diese Einschränkung auch ist, so wollte ich sie doch im Hinblick auf spätere Ausführungen ausdrücklich erwähnen. Liegt aber ein solcher Spezialfall vor, so pflegt man in ihm einen ausreichenden Beweis für die Existenz des in der Definition beschriebenen Begriffs zu sehen.

Allerdings ist hier auch eine andere Auffassung möglich und teilweise üblich. Will man z. B. die Gruppentheorie *axiomatisch* begründen, so wird man vorziehen, den Gruppenbegriff und seine Eigenschaften axiomatisch an die Spitze zu stellen. Die Existenz des Spezialfalles verbürgt dann nur die Widerspruchslosigkeit des axiomatisch eingeführten Begriffs und der ihn charakterisierenden Beziehungen.

b) Definitionen von axiomatischem Charakter.

Dem Vorstehenden entspricht die „strengere" Art, in der Weierstraß (im Gegensatz zu Riemann) die Theorie der analytischen Funktionen behandelt; indem er jede einzelne auf die erzeugende Potenzreihe stützt, gibt er einen unmittelbaren Beweis für ihre Existenz.[1]) Derselben Auffassung entspricht es, daß Hessenberg und Zermelo

1) Daß auch in ihn gewisse axiomatische Voraussetzungen über das komplexe Gebiet (Zahl und Grenzbegriff) eingehen, bedarf kaum der Erwähnung.

die Definition von unendlichen Mengen auf die Fälle beschränken wollen, in denen man ihre Existenz mit Hilfe der zugrunde gelegten Axiome aus vorhandenen Mengen ableiten kann; augenscheinlich eingeschüchtert, wenn ich so sagen darf, durch das Gespenst der Russellschen Mengen und ähnlicher Paradoxa. Tatsächlich geht aber der Fortschritt der mathematischen Erkenntnis vorwiegend auf andere Weise vor sich; er geschieht durch *freie Bildung neuer Objekte und Beziehungen*, die die schöpferische Phantasie erschafft, die sich zwar ebenfalls auf bereits vorhandene mathematische Begriffe und Beziehungen stützen, aber nicht den Ausdruck einer im obigen Sinne erwiesenen oder doch erweisbaren Tatsache bilden. Und wer wollte dieses Mittel des wissenschaftlichen Fortschreitens eliminieren? Nur haben wir vom axiomatischen Standpunkt aus den so eingeführten Objekten oder Beziehungen ebenfalls *axiomatischen* Charakter beizulegen; naturgemäß vorausgesetzt, daß sie sich dem kontradiktorischen Bau der Mathematik einfügen lassen, also mit den vorhandenen mathematischen Tatsachen und den logischen Gesetzen im Einklang stehen. Ist es aber so, so steht nichts im Wege, auch sie — im Sinn von § 3 — zu mathematischen Objekten zu erheben und sie dem *vollständigen* System der axiomatischen Voraussetzungen eines Wissensgebietes hinzuzufügen.[1])

Bei Begriffen *prinzipieller* Natur ist uns diese Auffassung durchaus geläufig. Ich erinnere z. B. an die Stellung, die man heute dem Grenzwert und der Irrationalzahl gegenüber einnimmt. Ich erinnere ferner an die Du-Boisschen Unendlich, an die unendlichen Determinanten und die divergenten Reihen. Sie alle stellen Begriffe axiomatischen Charakters dar; wenn auch ihre axiomatische Einführung meist nicht in der vollkommenen Form zu geschehen pflegt, die an sich geboten wäre.[2]) Bei den divergenten Reihen schien sogar die Möglichkeit, auch sie zu mathematisch verwendbaren Objekten zu erheben, lange Zeit nicht vorhanden zu sein. Ganz analog ist es in der Geometrie; auch sie hat es verstanden, durch Neuschöpfungen von Objekten ihr Gebiet über den Bereich auszudehnen, der mit den elementaren Axiomen erreichbar ist; ich erinnere an den n-dimensionalen Raum, an die Riemannschen Flächen, an die Meßbarkeit und den Inhalt der Punktemengen, an die Transfiniten Veroneses, an die Studysche Einführung der verschie-

1) Auch damit soll keineswegs etwas Neues gesagt werden. Ich verweise z. B. darauf, daß sich Hilbert in seinem Heidelberger Vortrag (a. a. O. S. 182) ganz analog ausspricht.

2) Ein Beispiel, in dem dies in neuerer Zeit durchgeführt worden ist, sind die Begriffe des Inhalts und der Meßbarkeit der Punktmengen; vgl. die Leçons sur l'intégration von Lebesgue Kap. VII (Paris, 1909).

denen Möglichkeiten, das endliche Gebiet durch uneigentliche (unendlichferne) Elemente zu einem abgeschlossenen zu machen usw. usw.[1])

Begriffen dieser Art steht man insbesondere dann vielfach gegenüber, wenn es sich um die Einteilung eines vorhandenen mathematischen Objekts in Unterklassen handelt, die einander kontradiktorisch gegenüberstehen. Um zunächst eines der berühmtesten Beispiele anzuführen, erinnere ich an die Begriffe: Viereck mit drei rechten und einem spitzen oder stumpfen Winkel; hier hat die Prüfung der Frage, ob diese Begriffe mit den Axiomen der Verknüpfung, der Anordnung und Kongruenz verträglich sind, viele Jahrzehnte gedauert. Angesichts ihrer prinzipiellen Bedeutung sehen wir heute allgemein in ihrer *Existenz*, bzw. in der dadurch angenommenen mathematischen *Beziehung* eines der Axiome der nichteuklidischen Geometrie.[2])

Das gleiche gilt von Dedekinds Einführung der unendlichen Mengen. Eine kontradiktorische Zweiteilung führt zunächst auf die zwei Fälle, daß eine Menge einer ihrer (echten) Teilmengen äquivalent sein kann oder nicht; in der Forderung, auch Mengen, die der im ersten Fall aufgestellten Beziehung entsprechen, als *mathematische Objekte zuzulassen*, haben wir daher eine Forderung von axiomatischem Charakter zu sehen, die der Zulassung der nichteuklidischen Vierecke ganz analog ist; wird doch sogar behauptet, daß diese Frage noch nicht in demselben Sinne bejahend zu beantworten sei wie in der nichteuklidischen Geometrie.

Dedekind steht der Einführung der unendlichen Mengen bekanntlich anders gegenüber; er hat für die Existenz dieses Begriffes einen Beweis gegeben. Der Beweis stützt sich darauf, daß der Begriff in einem speziellen Falle realisiert ist. Hilbert und andere haben diesen Beweis nicht anerkannt; dem muß ich mich anschließen, allerdings aus Gründen anderer Art. Der Dedekindsche Beweis erfüllt nämlich nicht die in § 4a aufgestellte Forderung, daß der Spezialfall durch ein *bereits vorhandenes* mathematisches *Objekt* realisiert ist. Begründet man insbesondere die allgemeine Mengenlehre so, daß man die ganze Zahl und die Theorie der endlichen Mengen voraussetzt, so entspricht auch schon

1) Alle diese Begriffe sind denen analog, die man physikalisch als *Forschungshypothese* bezeichnet; nur daß es sich in der Mathematik ausschließlich um dauernde Verträglichkeit der logischen und mathematischen Folgerungen handelt, während in der Physik auch die Verträglichkeit mit der Welt der experimentellen Tatsachen in Frage steht.

2) Dasselbe gilt von dem Viereck mit vier rechten Winkeln in der euklidischen Geometrie. Das Viereck mit stumpfem Winkel ist bekanntlich mit den Hilbertschen Axiomen der Anordnung nicht verträglich, diese bedürfen der Abänderung.

die Gesamtheit der ganzen Zahlen der Dedekindschen Definition; diese Gesamtheit stellt aber im Rahmen der Theorie der endlichen Mengen *kein bereits vorhandenes* mathematisches Objekt dar; also keines, dem man sein mathematisches Bürgerrecht bereits gesichert hätte. Die Frage, um die es sich in der Theorie der unendlichen Mengen in erster Linie handelt, ist vielmehr gerade die, ob und inwieweit es gestattet ist, Mengen, die der Dedekindschen Definition entsprechen und die beispielsweise durch die sämtlichen ganzen Zahlen vertreten werden, im Sinne von § 3 zu einem mathematischen Objekt zu erheben, das sich dem kontradiktorischen Bau der Mathematik einfügen läßt.[1])

c) Independente Definitionen.

Ähnlich steht es mit der großen Klasse der „independeten" Definitionen.[2]) Dahin sind alle zu rechnen, die sich zwar auf Begriffe axiomatischer Natur stützen und von ihnen ihr Leben empfangen, deren besonderer Inhalt aber ebenfalls nicht auf einem Lehrsatz oder einem Beweisverfahren, sondern nur auf freier Schöpfung beruht. Auch für sie kann eine andere Schranke als ihr kontradiktorischer Charakter nicht gefordert werden, ohne dem Fortschritt des Wissens Fesseln anzulegen. Wird z. B. im komplexen Gebiet die Potenzreihe als Ausgangsdefinition der analytischen Funktion zugrunde gelegt, so darf man für die Bestimmung der unendlich vielen Koeffizienten jegliche Bestimmung treffen, die einen Fortschritt des Wissens erhoffen läßt, mit der einzigen Beschränkung, die durch den kontradiktorischen Charakter der Mathematik bedingt ist.[3]) Die moderne Entwicklung der Theorie der ganzen transzendenten Funktionen liefert ein schlagendes Beispiel. Nirgends wird eine Schranke anderer Art für nötig erachtet. Warum sollte man also in der Mengenlehre nicht ebenso verfahren? Dabei ist es naturgemäß völlig gleichgültig, ob ein etwaiger Widerspruch rein logisch oder durch vorhandene mathematische Tatsachen bedingt ist. Ich halte es daher nicht für einen Vorzug, wenn sich die Mengenlehre, wie Zermelo es befürwortet, auf Einführung solcher Mengen beschränken soll, deren Existenz auf Grund eines an die Spitze gestellten Axiomensystems aus bereits vorhandenen Mengen ableitbar ist.[4]) Das

---

1) Daß dies analog zum Viereck mit stumpfem Winkel nur so möglich ist, daß gewisse Axiome aus der Theorie der endlichen Mengen abgeändert werden, erwähne ich beiläufig.

2) Ich entnehme diese Bezeichnung Zermelo; vgl. Math. Ann. 65, S. 263.

3) Man könnte dies als ein allgemeinstes *Auswahlpostulat* bezeichnen.

4) Vgl. a. a. O. S. 263, wo es heißt: Erstens dürfen mit Hilfe dieses Axioms (des Axioms der Aussonderung) niemals Mengen *independent definiert*, sondern immer nur als Untermengen aus bereits gegebenen *ausgesondert* werden.

bedeutet eine durch nichts gebotene Einschränkung. Die Menge aller Punkte des Raumes oder aller Funktionen, die Menge aller abzählbaren Mengen können gleichfalls das Recht beanspruchen, als mathematische Objekte zugelassen zu werden, und haben die Prüfung, ob sie dem kontradiktorischen Gefüge gehorchen, längst bestanden. Selbst auf Zermeloscher Grundlage könnte man die einzelnen Punktmengen nur so einführen, daß man sie aus der Menge aller Punkte des Raumes aussonderte; und diese stellt doch ebenfalls eine independente Menge dar.

Für die Russellsche Menge dagegen und das sogenannte Ω ist diese Prüfung bekanntlich negativ ausgefallen; sie können mathematische Objekte nicht darstellen.[1]) Und vom Begriff der „endlichen Definierbarkeit" ist die mathematische Verwendbarkeit oder eine besondere Inhaltsbestimmung, die diese gestatten würde, jedenfalls bislang nicht vorhanden; ihm kommt daher ein mathematisches Bürgerrecht gleichfalls nicht zu.[2]) (Vgl. auch § 6.)

d) Schlußfolgerung.

Hiermit bin ich zu dem Ergebnis gelangt, dem ich bereits am Ende von § 3 Ausdruck gegeben habe und in dem ich die letzte Konsequenz und das letzte Ziel der axiomatischen Denkweise erblicke. Denn dieses Ziel kann kein anderes sein als das, die Welt der mathematischen Objekte und Beziehungen so aufzubauen, daß sie sämtlich

---

1) Vgl. übrigens auch Anm. 2 auf S. 238.

2) Sachlich spricht sich auch Zermelo so aus; Math. Ann. 65 (1908) S. 264; allerdings mit der Motivierung, daß durch die freilich etwas im Dunkel bleibenden „Grundbeziehungen des Bereiches" nicht entschieden werden könne, ob die Definition für ein Element des Bereiches zutrifft oder nicht. Über diese Grundbeziehungen vgl. auch § 9.

Poincaré hat die Einwände, die ich früher gegen das Richardsche Paradoxon gerichtet habe, zu entkräften gesucht. Der Gegensatz unserer Meinungen ist aber nur darin begründet, daß die „endliche Definierbarkeit" jedenfalls im allgemeinsten Umfang kein mathematisch verwendbarer Begriff ist; sie ist mit all der Unbestimmtheit behaftet, die einer Wortdefinition eigen ist. Damit scheidet auch die auf diesem Begriff ruhende Richardsche Antinomie als *mathematisches* Problem aus. (Vgl. Näheres in § 5.)

Den *inneren* Grund der Unbestimmtheit erblicke ich übrigens darin, daß man, um unendlich viele Dezimalstellen festzulegen, notwendig Worte benutzen *muß*, die sich selber auf unendlich viele Objekte beziehen, und dies muß wieder bewirken, daß man solche Definitionen, wie ich sie a. a. O. benutze, die also mehr als einen Dezimalbruch definieren, als möglich zuzulassen hat. Jedenfalls aber ist man nicht berechtigt, sie nur auf Grund einer *gewissen Interpretation* der Worte „endlich definierbar" als unzulässig abzulehnen, worauf die Poincarésche Kritik ruht.

mittelbar oder unmittelbar durch Voraussetzungen und Annahmen *axiomatischen* Charakters gestützt sind, daß sie aber im übrigen *nur in dem kontradiktorischen Gefüge* der Mathematik eine *Schranke* haben. Mögen sie an Vorstellungen anknüpfen, die aus der Empirie stammen oder aus der Phantasie, mathematisch verwendbar können alle diese Vorstellungen immer erst dann werden, wenn es gelingt, ihren Inhalt so zu formen, daß sich mit ihnen ein kontradiktorisch gefügtes Wissensgebiet schaffen läßt. Die Dedekindschen Definitionen des Schnitts und der unendlichen Mengen sowie Cantors Begriff der Wohlordnung und der transfiniten Induktion werden meines Erachtens immer glänzende Beispiele für die Arbeit sein, die die axiomatische Methode in dieser Hinsicht zu leisten hat.

Damit ist auch die Stellung der Definition im axiomatischen Aufbau geklärt. Sie kann in ihm einen Platz nur insofern beanspruchen, als die in ihr enthaltene mathematische Tatsache selbst den Axiomen oder, anders ausgedrückt, der *Stammtafel der mathematischen Begriffe und Beziehungen* zugezählt wird; von der Definition im engern Sinne ist hier naturgemäß nicht die Rede. Es ist mir nicht sicher, ob man diese Konsequenz überall da gezogen hat, wo man sogenannte „fundamentale“ Definitionen an die Spitze gestellt hat. Denn diese Konsequenz verlangt insbesondere auch, alle in solchen Definitionen auftretenden Begriffe im Sinne von § 3 darauf hin zu prüfen, ob sie bereits mathematische Geltung besitzen oder nicht; und wenn es nicht der Fall ist, sie ebenfalls in die genannte Stammtafel aufzunehmen und, wenn nötig, mathematisch zu formen und festzulegen.[1])

§ 5. Wortdefinitionen.

Im Gegensatz zur Mathematik müssen die übrigen Wissenschaften vielfach zu dem Notbehelf greifen, allgemeine Wortdefinitionen an die Spitze zu stellen, die oft nur ein Wort durch andere ihm gleichwertige zu bestimmen vermögen, die überdies nur mit mehr oder weniger

1) Meines Erachtens ist diese Analyse in den neuesten Arbeiten über die Beweisbarkeit des Schlusses von n auf $n+1$ und für die auf dem Kettenbegriff ruhende Theorie der endlichen Mengen noch nicht in völlig abgeschlossener Weise ausgeführt worden. Um wenigstens an einem Beispiele die Tragweite der obigen Auffassung darzulegen, wähle ich die auf der „Kette“ ruhende Zermelosche Definition der Worte endlich und abzählbar, die folgendermaßen lautet: Eine Menge heißt *endlich,* wenn alle ihre Elemente eine einfache Kette mit letztem Element ausmachen; abzählbar, wenn die einfache Kette kein letztes Element enthält. (Acta math. Bd. 32 [1909] S. 186.) Gemäß dem Obigen bedeutet dies sachlich, daß zwei Arten von Ketten als mathematische Objekte axiomatisch eingeführt werden; solche mit und solche ohne letztes Element.

unbestimmten Ausdrücken operieren, und bei denen man niemals sicher ist, daß sich der Leser dasselbe denkt wie der Autor, der sie geschaffen. Für sie sollte in der Mathematik kein Platz mehr sein; *ihre vollständige Ausschaltung ist vielmehr das Ziel, das man zu erstreben hat.* In der Möglichkeit, dieser Forderung zu entsprechen — in der vorstehend angegebenen Art — tritt die bevorzugte Stellung, die die Mathematik für sich beanspruchen kann, in Evidenz.[1])

So trivial diese Bemerkungen erscheinen mögen, so sind doch Wortdefinitionen noch bis in die neueste Zeit tatsächlich im Gebrauch geblieben, und dies selbst bei denen, die sich um die axiomatische Methode an erster Stelle verdient gemacht haben, nämlich bei Pasch[2]) und Hilbert. Auch dies ist einer der Gründe, die meine ausführliche Darstellung veranlaßt haben. Insbesondere kann ich auch die Definitionen, die Hilbert in seinem Heidelberger Vortrag über die Grundbegriffe der Mengenlehre gegeben hat, teilweise nur als Wortdefinitionen ansehen. Da mir hier die Mengenlehre an erster Stelle steht, will ich dies ausführlicher erörtern.

Hilbert hat in seinem Heidelberger Vortrag bekanntlich die Forderung, daß die Arithmetik (und sogar auch die Logik) in gleicher Weise auf eine Zahl von Axiomen gegründet werden soll, wie er es für die Geometrie durchgeführt hatte, zum erstenmal in aller Schärfe

---

1) Auf die Notwendigkeit, von den Wortdefinitionen abzusehen, haben auch Hessenberg und Zermelo hingewiesen; ohne jedoch die oben enthaltenen Konsequenzen zu ziehen. Meines Erachtens ist sich Hessenberg in seiner letzten Mengenarbeit (Journ. für Math. Bd. 135 (1909) S. 84 ff.) sogar selber teilweise untreu geworden.

Einige Wortdefinitionen, die sich in neueren mathematischen Schriften axiomatischer Richtung finden, will ich doch beiläufig anführen. So heißt es bei Frege (Grundgesetze der Arithmetik, Jena, 1893, S. 58 und Grundlagen der Arithmetik, Breslau, 1884, S. 89, 90, 151):

1. Die Anzahl, welche dem Begriff F zukommt, ist der Umfang des Begriffes „gleichzahlig dem Begriff F".
2. Eins ist die Anzahl, welche dem Begriff „gleich 0" zukommt.
3. Endlos (= Unendlich) ist der Umfang des Begriffes Anzahl.

Eine große Zahl solcher Wortdefinitionen findet man auch in Veroneses Grundzügen der Geometrie.

Übrigens will ich die wissenschaftliche Tätigkeit, die in der Erschaffung solcher Wortdefinitionen liegt, keineswegs herabsetzen; nur ihre *mathematische Entbehrlichkeit* und *Unverwendbarkeit* sollte hier betont werden. Werden sie insbesondere für die grundlegenden Beziehungen benutzt (wie z. B. bei Frege), so heißt dies eine axiomatische mathematische Beziehung auf unmathematische Worte von unsicherer Bedeutung zurückführen.

2) Man vergleiche seine kürzlich (1909) erschienenen „Grundlagen der Analysis".

und Bestimmtheit erhoben. Er hat auch bereits in Umrissen den Weg gezeichnet, auf dem eine axiomatische Begründung geschehen kann, er nennt aber unter den Prinzipien, die für seinen Aufbau maßgebend sind, auf S. 182 auch das folgende:

III. Die Menge m ist allgemein als ein Gedankending m definiert, und die Kombinationen mx heißen die Elemente der Menge m, so daß also — im Gegensatz zu der üblichen Auffassung — der Begriff des Elementes einer Menge erst als späteres Erzeugnis des Mengenbegriffes selbst erscheint.

Augenscheinlich wollte auch Hilbert auf diese Weise die gewöhnlichen Wortdefinitionen vermeiden und mathematische Begriffe schaffen, die sich nur auf mathematisch vorhandene Operationen stützen, und aus diesen ihren axiomatischen Inhalt empfangen. Dem dient die Einführung der Symbole m und x, und des aus ihnen gebildeten Symbols mx. Aber ich kann seinen Weg nicht als ausreichend ansehen.

Wird nämlich ein Symbol m *nur* als „Gedankending" eingeführt, so ist es zunächst ein *mathematisch leeres* Symbol, und das gleiche gilt von dem Symbol mx, solange es *nur* als „Kombination" der Dinge m und x hingestellt wird. Einen *mathematischen* Inhalt erhalten diese Symbole nur so, daß man gewisse für sie gültige *Beziehungen* — die naturgemäß im Sinne von § 2 kontradiktorischen Charakter haben müssen — axiomatisch festsetzt; diese Beziehungen sind es ja erst, die gemäß § 3 den materiellen Inhalt der Axiome und der Begriffe ausmachen. Die Axiome müssen daher notwendig die Menge, die Elemente und ihre Beziehungen *zugleich* enthalten. Übrigens ist auch Hilbert selbst an der einzigen Stelle seines Vortrags, die eine axiomatische Einführung einer Menge enthält, so vorgegangen, wie ich es hier als nötig erachte; die Axiome 3 bis 5 (S. 179) und die ihnen folgenden Ausführungen lassen dies meines Erachtens erkennen.[1])

Eine mathematisch unverwendbare Wortdefinition bildet insbesondere der von Russell aufgestellte Begriff: durch höchstens 100 Worte definierbar.[2]) Der innere Grund ist der, daß es offenbar nicht

1) Freilich wäre es ja möglich, daß ich den Sinn und die Tragweite der Hilbertschen Ausführungen nicht völlig zutreffend verstehe. Dies scheint mir aber doch ausgeschlossen zu sein; denn offenbar legt er auf die obige „unabhängige" Einführung des Mengenbegriffes deshalb besonderen Wert, weil es seiner Meinung nach gerade dadurch gelingen soll, das bekannte Russellsche Paradoxon von vornherein unmöglich zu machen. Vgl. auch die Anm. 2 auf S. 243.

2) Vgl. darüber z. B. die Ausführungen von Poincaré, Acta math. Bd. 32 (1909) S. 197.

auf die *Zahl* der Worte ankommt, sondern auf ihre *Qualität*, zumal auf die Frage, ob sie mathematisch eindeutig sind oder nicht. Der tatsächliche Beweis besteht darin, daß, wie Russell gezeigt hat, der Begriff: „die kleinste mit höchstens 100 Worten definierbare ganze Zahl" ebenso auf einen Widerspruch führt wie der ähnliche Begriff endlich definierbar.

Übrigens kann man mit dem Begriff „durch höchstens 100 Worte definierbar" *in der Theorie der endlichen Mengen das gleiche Paradoxon ableiten*, das Richard mit dem Begriff „endlich definierbar" für die unendlichen Mengen konstruiert hat. Man betrachte dazu die Menge aller Dezimalbrüche, die durch höchstens 100 Worte definierbar sind; naturgemäß sollen nur solche Definitionen in Betracht kommen, die einen einzigen Dezimalbruch bestimmen; in derselben Weise geordnet, wie es Richard tut. Sei δ_ν der νte Dezimalbruch. Nun bilde man wieder einen Dezimalbruch δ' in der Weise, daß man die νte Ziffer des νten Dezimalbruchs δ_ν zu 9 ergänzt und an die von dieser Vorschrift nicht betroffenen Stellen lauter Nullen setzt. Dann ist δ' durch weniger als 100 Worte definiert (nämlich durch 74) und von jedem δ_ν verschieden; *wir haben also den analogen Widerspruch wie im* Richardschen *Fall.*[1])

Liegt aber darin irgendein Argument gegen die allgemeine Theorie der endlichen Mengen? Keinesfalls; — nur gegen die mathematische Verwendbarkeit derjenigen Bestimmung, die diesen Widerspruch verschuldet hat. Eine andere Konsequenz kann daher auch im Richardschen Fall nicht gezogen werden. Auch sein Paradoxon spricht nur gegen die mathematische Zulässigkeit der Worte „endlich definierbar", und es ist völlig verfehlt, den Widerspruch umgekehrt denjenigen axiomatischen Begriffen zur Last zu legen, mit denen die Theorie der unendlichen Mengen aufgebaut ist.

Auch den Begriff „prädikativ" rechne ich beiläufig bemerkt hierher. Sein Mangel an Eindeutigkeit wird durch die jüngsten Erörterungen Poincarés und Zermelos hinreichend bewiesen.[2]) Er ist aber auch durchaus entbehrlich; die Frage, ob eine irgendwie gebildete oder angenommene Beziehung zwischen mathematischen Objekten wider-

---

1) Man könnte sogar noch ein Hyperparadoxon ableiten. Auf dem gewöhnlichen Wege des Schließens könnte man das obige Ergebnis folgendermaßen aussprechen: Zu jeder endlichen Menge von Dezimalbrüchen, die mit höchstens 100 Worten definierbar sind, läßt sich ein von allen verschiedener, analoger Dezimalbruch finden — und daraus weiter die *Nichtendlichkeit* dieser Menge folgern!

2) Acta math. Bd. 32 (1909) S. 193 u. 199. Vgl. auch Poincarés mathematische Vorlesungen an der Universität Göttingen (IV); Leipzig 1910, S. 47.

spruchsvoll ist oder nicht, oder überhaupt den Anforderungen der mathematischen Verwendbarkeit entspricht, wird der Mathematiker auch ohne diesen Begriff jederzeit entscheiden können; er bedarf dazu keines besonderen philosophischen Gängelbandes.

§ 6. Uneigentliche Definitionen.

Die Arithmetik fügt zu den ganzen Zahlen ein Symbol hinzu, das den Namen Null erhalten hat, und das — was die Axiome der Addition und Multiplikation betrifft — ebenso verwendet werden kann wie die positiven ganzen Zahlen, und deshalb auch *uneigentliche* Zahl heißt. Ebenso fügt die euklidische Geometrie zu den eigentlichen Punkten, Geraden und Ebenen die unendlich fernen als uneigentliche Elemente hinzu. Auch die „Nullmenge" stellt nur eine uneigentliche Menge dar. Man darf aber nicht vergessen, daß es selbstverständlich immer der *Untersuchung* bedarf, ob die so eingeführten Symbole in *jeder Hinsicht* denselben Gesetzen folgen wie diejenigen Objekte, deren Namen man auf sie übertragen hat; oder vielmehr *in wie weit* dies der Fall ist. Es ist z. B. ein wesentliches Verdienst von Staudts, diesen Nachweis für die uneigentlichen Punkte, Geraden und Ebenen (sogar auch für die imaginären) in bezug auf die Axiome der Verknüpfung und Anordnung in eingehender Weise geliefert zu haben. Daraus kann aber nicht etwa ohne weiteres gefolgert werden, daß sich auch die übrigen axiomatisch aufgestellten Eigenschaften der eigentlichen Punkte, Geraden und Ebenen auf die uneigentlichen übertragen lassen. Schon der Satz, daß jede eigentliche Gerade einen und genau einen uneigentlichen Punkt enthält, trifft für eine uneigentliche Gerade nicht zu. Die Axiome der Kongruenz versagen überhaupt. In analoger Weise ist die Null als Divisor nicht zulässig. Der Versuch, auf ein uneigentliches Objekt die allgemeine Definition des eigentlichen zu übertragen, kann sogar zu einem unmittelbaren logischen Widerspruch führen. Die Nullmenge bildet ein einfachstes Beispiel. Ein grundlegendes Axiom der Mengenlehre besagt nämlich, daß eine Menge *ausschließlich* durch die Elemente bestimmbar ist, die sie enthalten soll; wendet man aber diese Definition wörtlich auf die Nullmenge an, so würde sie ein Objekt darstellen, das durch nichts bestimmt ist, was doch einen logischen Widerspruch darstellt.

Als uneigentliche Menge *kann* auch ein einzelnes Objekt a eingeführt und durch $\{a\}$ bezeichnet werden[1]); dem Vorstehenden gemäß darf man jedoch nicht erwarten, daß es sich in *jeder* Hinsicht wie

1) Bei Dedekind und Zermelo ist es übrigens anders, ebenso bei Peano. Sie alle unterscheiden zwischen a und $\{a\}$.

eine eigentliche Menge verhält. Es ist daher nicht berechtigt, wenn Hessenberg die Gleichsetzung von a und $\{a\}$ überhaupt für unerlaubt hält; weil man daraus nämlich die Gleichsetzung irgend zweier Dinge folgern könne.[1]) Eine solche Konsequenz kann niemals einen Einwand gegen die Einführung uneigentlicher Objekte abgeben; sie sind immer nur in beschränktem Maße benutzbar, und stets führt jede darüber hinausgehende Benutzung ad absurdum.[2])

Werden daher uneigentliche Objekte für irgendein Beweisverfahren benutzt oder überhaupt in derselben Weise verwandt, wie die eigentlichen, so bedarf dies immer des Nachweises der Berechtigung, zumal da, wo es sich um die axiomatische Grundlegung handelt. Doch ist diese Sonderstellung der uneigentlichen Objekte in der mengentheoretischen Literatur bisher fast durchgehends außer acht gelassen worden[3]); meines Erachtens gerade unter dem Einfluß der philosophischen Denkweise, der diese Fragestellung fern liegt.

§ 7. Identität und Gleichheit.

Es liegt nahe, eine Anwendung des Vorstehenden in der Weise zu machen, daß wir auf seiner Grundlage in aller Kürze den mathematischen Inhalt der Worte *identisch* und *gleich* darlegen. Den allgemeinen logischen Inhalt des Wortes „identisch" betrachte ich allerdings gemäß § 3 als gegeben; seine Erörterung gehört nicht in die Mathematik. Dieser eignet nur die Frage, wie man diesen Inhalt für *mathematische Objekte* auf Grund der vorstehenden Erörterungen festzusetzen hat. Da sich *jedes* mathematische Objekt auf eine gewisse Definition stützt, so lautet unsere Frage genauer so, unter welchen Bedingungen man auf die *Identität* zweier *verschiedenartig* definierten Objekte schließen kann. Die Antwort ist evident; es kann dies immer und nur dann der Fall sein, wenn die Eigenschaften, die den Inhalt der einen Definition bilden, sich als Folge derjenigen erweisen lassen, die in der andern Definition enthalten sind (gleichwinkliges und gleichseitiges Dreieck, rationale Funktion und analytische Funktion mit einer

1) Journ. für Math. 135 (1909) S. 85.

2) Man könnte übrigens auch das „W" in gewisser Hinsicht als *uneigentliches* Objekt zulassen, und zwar für die Theorie der Abschnitte, und könnte sagen, daß jede wohlgeordnete Menge einen Abschnitt dieses W bildet. Es würde dann für den Mathematiker in derselben Weise sinnlos sein, von W, m zu reden, wie es für ihn sinnlos ist, von $0:0$ zu sprechen oder vom unendlichfernen Punkt der unendlichfernen Geraden.

Übrigens pflegt man analog in der gewöhnlichen Theorie der reellen Größen auch ein Symbol ∞ als uneigentliche Zahl für gewisse Zwecke in Betracht zu ziehen.

3) Davon sind auch meine eigenen Arbeiten nicht auszunehmen.

endlichen Zahl von singulären Stellen, Kurve zweiter Ordnung und Kurve zweiter Klasse usw.). Diese Vorschrift gilt ebenso für einzelne Objekte von gleicher Art wie z. B. für Punkte. Auch zwei verschiedenartig bestimmte Punkte sind nur dann identisch, wenn die eine Bestimmungsweise aus der andern gefolgert werden kann. Eine andere Möglichkeit, diese Identität zu behaupten oder zu erhärten, scheint mir ausgeschlossen. Naturgemäß ist die Frage nach der Identität zweier verschiedenartig definierter Objekte von dem momentanen Stande der Wissenschaft abhängig und kann im Einzelfall lange eine offene bleiben. Insbesondere wird aber auch die Verschiedenheit erst dann behauptet werden können, wenn bewiesen ist, daß die eine Definition nicht eine Folge der andern ist.

Neben die Frage, wann zwei verschiedenartig definierte Objekte als identisch zu gelten haben, tritt die andere, wann man für *verschiedene* mathematische Objekte einen *Gleichheits*begriff aufstellen kann. Ich beschränke mich hier auf die kurze Bemerkung, daß dies bekanntlich gemäß dem bekannten Prinzip der Permanenz immer und nur dann gestattet ist, wenn für die betrachtete Beziehung die grundlegende Eigenschaft dieses Begriffes erfüllt ist; wenn also aus $a = b$ und $b = c$ auch $a = c$ folgt. Ein weiteres ist *an sich* nicht erforderlich. Insbesondere wird hierfür ein bestimmter materieller Inhalt der Beziehung nicht verlangt. Die numerische Gleichheit, die Flächengleichheit, die Inhaltsgleichheit, die Gleichmächtigkeit usw. gehören hierher. Ob die Ausdehnung des Gleichheitsbegriffs auf irgendeine Beziehung erlaubt ist, ob also für sie die obige grundlegende Tatsache besteht, ist naturgemäß ebenfalls immer Sache der Untersuchung.

Die vorstehende Festsetzung der Identität stimmt der Sache nach mit derjenigen überein, die Dedekind gegeben hat[1]; allerdings wird bei ihm und anderen Identität und Gleichheit nicht wie oben geschieden. Seine Definition bezieht sich auch nur auf Symbole oder Zeichen, die den einzelnen mathematischen Objekten entsprechen; er nennt sie *gleich*, wenn sie Zeichen für *dasselbe* Objekt sind, oder wenn sich beweisen läßt, daß sie demselben Objekt entsprechen (z. B. $a(b+c)$ und $ab+ac$). Im Rahmen dieser Festsetzung ist daher die Gleichheit zweier *verschiedenartig* eingeführter Zeichen in derselben Weise Sache der Untersuchung, wie hier die Identität zweier Definitionen. Man könnte dem Dedekindschen Sprachgebrauch auch allgemein folgen, und z. B. die Begriffe Kurve 2. Ordnung und Kurve 2. Klasse als verschiedene Bezeichnungen für dasselbe mathematische Objekt ansehen.

---

1) a. a. O. S. 2.

Der Dedekindschen Auffassung folgt auch Pasch[1]); dagegen sind die meisten sonstigen mathematischen Festsetzungen, die diese Begriffe betreffen, vielfach nur Wortdefinitionen. Der innere Grund scheint mir der zu sein, daß sie meist darauf ausgehen, den *allgemeinsten logischen* Inhalt des Wortes „gleich" oder „identisch" auszudrücken, anstatt sich darauf zu beschränken, welche besondere Formulierung diesem logischen Begriff für den Spezialfall der mathematischen Objekte zu geben ist.

Ich beginne mit der Definition, die Hilbert in seinem Heidelberger Vortrag gegeben hat (S. 178). Sie ist enthalten in den symbolischen Gleichungen:

$$1.\quad x = x; \qquad 2.\quad \{x = y \text{ und } w(x)\} \mid w(y)$$

und hat, in Kürze ausgedrückt, folgenden Inhalt: Ist $w(x)$ eine Aussage, die die „Willkürliche" x betrifft, so muß die nämliche Aussage für die „Willkürliche" y bestehen, falls y das nämliche ist wie x. Es heißt dann weiter, daß 1. und 2. die Definitionen des Begriffes „gleich" bilden und als solche auch Axiome genannt werden.

Augenscheinlich handelt es sich auch bei Hilbert — im Sinne seines Vortrages — darum, den allgemeinen *logischen* Inhalt des Gleichheitsbegriffs festzulegen. Seine Definition stimmt übrigens sachlich mit der von Russell überein, die folgendermaßen lautet: Identity is delined as follows: x is identically with y if y belongs to every class to which x belongs; in other words if x „is a u" implies „y is a u" for all values of u.[2])

Bei Vahlen findet sich die folgende Definition: Zwei Dinge a und b heißen gleich, wenn a eine Teilmenge von b und b eine Teilmenge von a ist; sonst ungleich oder verschieden. Die Definition beruht darauf, daß Vahlen vorher gesagt hat: Jedes Ding ist eine Menge und jede Menge ein Ding.[3]) Ihre Unvollkommenheit entspringt

1) Grundlagen der Analysis, S. 36. Ebenso auch bei Zermelo, Math. Ann. 65 (1908) S. 262.

2) Principles, § 24 (S. 20), (wo übrigens ein Druckfehler vorhanden ist). Russell unterscheidet zwischen identity und equality wie folgt: equality of a and b is defined by the equivalence (!) of „x is a u" and „x is a b" for all values of x (a. a. O. S. 21, § 24).

In der ursprünglichen Darstellung (vgl. S. 222 Anm. 1) hatte ich die Vermutung ausgesprochen, daß Hilbert hierin unter dem Einfluß von Russell stehe; dies trifft, wie ich inzwischen erfahren habe, nicht zu.

3) Abstrakte Geometrie, Leipzig, 1905, S. 7. Das letzte wohl im Anschluß an Hilbert; vgl. oben S. 235. Die Begriffe „Menge" und „Ding" werden dadurch allerdings logisch identisch (wenn jedes A ein B und jedes B ein A ist), was Vahlen wohl kaum sagen wollte.

meines Erachtens daraus, daß in ihr der logische und der mathematische Inhalt des Begriffs verquickt werden; die Worte „zwei Dinge" lassen es ganz unbestimmt, ob sie sich auf die Gleichheit verschiedener Dinge oder auf die Identität verschiedener Symbole beziehen soll.

Zermelo stellt zwar die Dedekindsche Definition an die Spitze; dann aber heißt es: Die Frage, ob $a = b$ ist, ist immer definit (also entscheidbar), da sie gleichbedeutend sei mit der Frage, ob $a \varepsilon \{b\}$ ist, d. h. ob a Element der allein aus b gebildeten Menge ist.[1]) Das ist aber eine materiell *leere* Festsetzung. Man könnte wirklich ebenso sagen: Die Frage, ob $a = b$ ist, ist gleichbedeutend mit der Frage, ob a Grundzahl der mit b gebildeten Potenz b^n oder auch b^1 ist.

Den allgemeinen Charakter dieser Festsetzungen habe ich bereits erörtert; sicherlich können sie niemals dazu dienen, die Frage, *wann* „a" und „b" identisch sind, zu beantworten. Das aber erheischt die Mathematik. Der Mangel, der allen diesen Definitionen meines Erachtens anhaftet, besteht darin, daß genau genommen a und b nur als unbestimmte Symbole allgemeiner Form eingeführt werden, und daß eine bestimmte mathematische Fragestellung nur für mathematisch bestimmte Objekte möglich ist in der Weise, wie es oben geschehen ist.[2])

§ 8. Die Zermelosche Grundlegung der Mengenlehre.

Zermelo hat das Verdienst, als erster einen axiomatischen Aufbau der Mengenlehre vorgenommen zu haben.[3]) Er hat sich dabei ebenfalls von der Erkenntnis leiten lassen, daß die Wortdefinitionen der Exaktheit der mathematischen Methode nicht entsprechen und durch axiomatische Annahmen zu ersetzen sind. So heißt es im Anfang seiner Arbeit, er wolle zeigen, wie sich die gesamte, von G. Cantor und R. Dedekind geschaffene Lehre auf einige wenige „Definitionen" und auf sieben, anscheinend voneinander unabhängige Prinzipien oder Axiome zurückführen läßt.

Bei aller Anerkennung der von ihm geleisteten Arbeit muß ich aber doch auf einige Mängel hinweisen, die seiner Grundlegung anhaften. Es soll in voller Ausführlichkeit geschehen; um damit zugleich an einem Beispiel zu zeigen, wie vorsichtig man in den Schlüssen und im Gebrauch der Worte sein muß, wenn man die in den vorstehenden Paragraphen enthaltenen Ausführungen als maßgebend betrachtet.

1) Math. Ann. 65 (1908) S. 262 u. 263. Vgl. auch Hessenberg, Journ. für Math. 135 (1909) S. 83, wo sich eine analoge Festsetzung findet.

2) Bei Russell ist es anders; dort handelt es sich immer um den rein logischen und damit auch um den *allgemeinsten Inhalt*.

3) Math. Ann. 65 (1908) S. 261.

Zermelo geht von verschiedenen Begriffen aus, für die er die Worte „Bereich", „Menge", „Ding", „Grundbeziehung" benutzt; von ihnen heißt es:

1. Die Mengenlehre hat es zu tun mit einem „Bereich" $\mathfrak{B}$ von Objekten, die wir einfach als „Dinge" bezeichnen wollen. ...

2. Zwischen den Dingen des Bereiches $\mathfrak{B}$ bestehen gewisse „Grundbeziehungen" der Form $a \varepsilon b$ (dies bedeutet, daß a Element der Menge b sei).

Man vergesse aber nicht, daß die so eingeführten Worte und ebenso das Zeichen ε einen mathematischen Inhalt erst durch die sie verbindenden Axiome erhalten können. Zu diesem Zweck stellt Zermelo zunächst drei Axiome auf, auf deren Wortlaut es an dieser Stelle nicht ankommt. Nur das ist wesentlich, daß *in keinem von ihnen das Wort „Bereich" vorkommt.* Trotzdem wird aus ihnen eine Folgerung abgeleitet, die den Bereich betrifft; nämlich die, daß der Bereich keine Menge ist (a. a. O. S. 265). *Das verstößt aber evidentermaßen gegen die in § 4 enthaltenen Ausführungen.*

Es könnte ja nun sein, daß hier nur ein formaler Mangel vorliegt. Das ist in gewisser Hinsicht in der Tat der Fall.

Außer den drei genannten Axiomen enthält nämlich die Zermelosche Arbeit noch einige Festsetzungen, denen man ebenfalls axiomatischen Charakter beilegen muß, und die das Wort „Bereich" enthalten. Und es wäre ja zunächst möglich, daß in ihnen eine, den Bereich betreffende *materielle* Bestimmung enthalten ist. Allerdings trifft auch das nicht zu. Zwei dieser Festsetzungen sind bereits oben erwähnt worden; die dritte lautet folgendermaßen: Eine Frage oder Aussage, über deren Gültigkeit oder Ungültigkeit die Grundbeziehungen des Bereiches vermöge der Axiome und der allgemeingültigen logischen Gesetze ohne Willkür entscheiden, heißt „definit".[1]) Diese drei Festsetzungen lassen sich aber offenbar so abändern, daß *das Wort „Bereich" aus ihnen ganz verschwindet, ohne daß sie ihren materiellen Inhalt ändern.* Sie lauten dann:

Die Mengenlehre hat es zu tun mit gewissen Objekten, die wir einfach als Dinge bezeichnen wollen. ...

Zwischen diesen Dingen bestehen Grundbeziehungen der Form $a \varepsilon b$ und

Eine Frage oder Aussage über deren Gültigkeit oder Ungültigkeit die zwischen den Dingen a und b bestehenden Grundbeziehungen usw.

1) Beiläufig bemerkt, dürften diese Worte zugleich darauf hinauskommen, den kontradiktorischen Charakter der Mathematik zu betonen, daß also die Entscheidung auf kontradiktorischer Grundlage möglich sein muß.

Das Wort Bereich ist also für seine axiomatischen Annahmen in der Tat ganz entbehrlich.[1]) Ich vermute auch, daß die Auslassung einer den Bereich treffenden Festsetzung von ihm mit Absicht geschehen ist, und zwar gerade um ihn von vornherein als mathematisches Objekt auszuschließen, wie es auch bei Hilbert der Fall ist (§ 5). Dann kann man aber auch keinen Satz über ihn aussprechen.

Trotzdem ist der genannte Mangel sachlich ohne Belang. Denn sachlich ist ein Satz dieser Art auch für die Zermelosche Grundlegung durchaus entbehrlich; sie bleibt was sie ist, wenn man die den Bereich betreffende Folgerung aus ihr streicht — zumal sie ja nur einem Zweck dient, der auch auf andere Weise erreichbar ist, nämlich der Ausschließung der Russellschen Menge.[2])

Eine zweite Bemerkung ist folgende. Zermelo operiert — und zwar für den Beweis des den Bereich 𝔅 begründenden Satzes — mit der Beziehung $a \varepsilon a$. Es heißt bei ihm (S. 264), daß die Möglichkeit $a \varepsilon a$ an und für sich durch seine Axiome nicht ausgeschlossen sei.[3]) Dem muß ich entgegenhalten, daß eine materielle Beziehung axiomatischer Natur — und diese soll doch durch ε ausgedrückt werden — überhaupt nur für zwei *voneinander verschiedene* Objekte eingeführt werden kann. Ein Symbol $a \varepsilon a$ kann deshalb nur in *uneigentlicher* Bedeutung (§ 6) zugelassen werden; und ob dies gestattet ist, bedarf in jedem einzelnen Fall der Untersuchung. Keineswegs aber kann es ohne jegliche derartige Untersuchung als Beweismittel benutzt werden.[4])

Drittens weise ich auf einen Fall hin, in dem Zermelo gegen die von ihm aufgestellte Forderung, Mengen nicht indepedent einzuführen (vgl. § 4c), tatsächlich verstößt. Er will zeigen (S. 264), daß auch für mehr als zwei Mengen ein gemeinsamer Durchschnitt existiert. Wenn nun auch das Postulat der unendlichen Mengen erst S. 266 als

1) Meines Erachtens ist die obige Formulierung sogar der Zermeloschen vorzuziehen; auch in Hilberts Grundlagen wird in den Axiomen nur von den Punkten, Geraden und Ebenen gesprochen und nicht davon, daß es Punkte, Gerade und Ebenen des Raumes sind — was dem Bereich analog sein würde.

2) Meines Erachtens lassen sich Widersprüche überhaupt nicht durch irgendeine Form der Axiome absolut bzw. von vornherein ausschließen, sondern immer nur so, daß man nie einen andern Gebrauch von den Axiomen macht als einen solchen, der mit den Regeln der Logik und den Tatsachen der Mathematik verträglich ist.

3) Eine derartige Unbestimmtheit stellt übrigens im Sinne von § 4d einen Mangel bzw. eine Lücke der axiomatischen Begründung dar.

4) Auch in der Benutzung des Symbols $a \varepsilon a$ scheint Zermelo unter dem Einfluß Russells zu stehen; vgl. den Schlußparagraphen.

Axiom VII aufgestellt wird, so ist doch klar, daß alle vorhergehenden Axiome und Darlegungen von vornherein so gemeint sind, daß sie sich auch auf unendliche Mengen beziehen *können*; wäre dies nicht die Absicht, so bedürfte ja ihre Übertragbarkeit auf unendliche Mengen für jedes einzelne Axiom und jede Beweisführung einer neuen axiomatischen Festsetzung oder einer besonderen Erhärtung.[1]) Nun wird a. a. O. der Beweis, daß es auch für mehrere Mengen $M, N, R \dots$ immer einen Durchschnitt gibt, in der Weise bewiesen, daß Zermelo von einer Menge T ausgeht, deren Elemente selbst Mengen sind, deren *Existenz* man also *vorausgesetzt*, und dann für sie die Existenz des Durchschnitts dieser Mengen beweist. Soll sich dieser Beweis aber auf den Fall *beliebiger* Mengen $M, N, R \dots$ übertragen lassen, so muß es gestattet sein, welches sie auch seien, zu ihnen als Elementen eine Menge T zu bilden, und dies bedeutet die Schaffung bzw. die axiomatische Zulassung einer independenten Menge.

Ich erwähne dies auch deshalb, weil ich darin einen Beleg dafür erblicke, daß sich der Zermelosche Standpunkt auch praktisch als zu enge erweist.

Ich möchte nicht schließen, ohne auf das hinzuweisen, was meines Erachtens die genannten Mängel verursacht hat. Es ist die Tatsache, daß Zermelo innerlich durch die Arbeiten beeinflußt ist, die von den philosophischen Mengentheoretikern herrühren. Von Peano und Russell stammt die künstliche Unterscheidung zwischen Menge und Klasse[2]), von Russell die scholastische Idee auch die Möglichkeit $a \varepsilon a$ im eigentlichen Sinn zuzulassen; allerdings hat Russell dies später selbst als einen Nonsens bezeichnet.[3]) Philosophischer Denkweise entspricht es auch, den Rahmen für den Mengenbegriff so weit zu stecken, daß er sich auf irgendwelche „Dinge" beziehen darf. Der Mathematiker soll jedoch die durch seine Wissenschaft gebotene Selbstbeschränkung üben. Er sollte als Elemente der Mengenlehre nichts anderes in Betracht

---

1) Übrigens ist an sich auch der Weg möglich — und vielleicht vorzuziehen —, daß man zunächst eine Grundlegung der endlichen Mengen gibt und nachher nach Einführung des Postulats der unendlichen Mengen die vorherige Grundlegung auf sie axiomatisch ausdehnt.

2) Auch was Zermelo über die „Klasse" sagt, sind im wesentlichen Wortdefinitionen. Ich möchte zwar glauben, daß es mir selbst gelungen ist, den Sinn, den er mit den Worten Klasse und Individuum im Gegensatz zu Menge und Element verbindet, zu erfassen, daß nämlich die Klasse erst dadurch zur Menge wird, daß man aus ihr ein mathematisches Objekt erschafft und es den Grundbeziehungen unterwirft; aber sicher ist es mir nicht.

3) Revue de metaph. et morale, Bd. 14 II (1906) S. 640.

ziehen als mathematische Objekte; etwa auch Mengen von Dingen oder Begriffen oder Widersprüchen oder falschen Urteilen zu erörtern, dazu besteht für ihn weder die Notwendigkeit noch die Möglichkeit.[1])

§ 9. Eine axiomatische Einführung der Mengenlehre.

a) Allgemeiner Teil.

Die Zermelosche Grundlegung ruht, wie schon erwähnt, wesentlich auf dem Unterschied von a und $\{a\}$; ihm ist auch Hessenberg in seiner Erörterung der wohlgeordneten Mengen gefolgt.[2]) Es scheint mir aber von Wert und von Interesse zu sein, zu zeigen, daß die Mengenlehre auch auf anderem Wege axiomatisch streng und sachlich begründet werden kann, zumal mir dieser Weg als der natürlichere erscheint.

Gleich Zermelo stelle ich einen Begriff „Grundbeziehung" an die Spitze. Ich selbst verstehe darunter die durch ε dargestellte grundlegende Beziehung und habe sie zunächst durch gewisse Axiome *inhaltlich* zu bestimmen. Vielleicht hat Zermelo das Wort „Grundbeziehung" in Anlehnung an analoge Verhältnisse der Geometrie gebildet; jedenfalls halte ich es für nützlich, die mengentheoretischen Grundbeziehungen mit denen der Geometrie in Parallele zu setzen. Beschränkt man sich der Einfachheit halber auf die Ebene, so kommt diejenige geometrische Beziehung in Frage, die die *Inzidenz* von Punkt und Gerade betrifft; ich will sie in die Form Aib setzen. Dann haben wir in der Geometrie das folgende erste Axiom, daß *aus Aib auch biA folgt.* Umgekehrt ist es in der Mengenlehre; hier treffe ich die Festsetzung:

Sind a und b zwei voneinander verschiedene Objekte, so sollen für die durch ε ausgedrückte Beziehung $a\varepsilon b$ die folgenden Axiome gelten:

1. *Die Beziehungen $a\varepsilon b$ und $b\varepsilon a$ können nicht zugleich bestehen.*

Durch dieses Axiom ist, wie es auch sein muß, die Relation $a\varepsilon a$ als *grundlegende materielle* Relation von vornherein ausgeschlossen; sie kann, wie schon oben (§ 8) erwähnt, nur noch in *uneigentlicher* Bedeutung zugelassen werden.

Sind ferner a, b, c und ebenso a, a', b voneinander verschiedene Objekte, so gilt:

2a. *Die Beziehungen $a\varepsilon b$ und $a\varepsilon c$ können zugleich bestehen* und

2b. *die Beziehungen $a\varepsilon b$ und $a'\varepsilon b$ können zugleich bestehen.*

---

1) Ich gebe zu, daß man diesen Standpunkt als eng ansehen kann; praktisch scheint er mir jedenfalls ausreichend zu sein.

2) Journ. f. Math. Bd. 135 (1909) S. 81.

Die analogen Axiome gelten bekanntlich auch in der Geometrie; sowohl die Beziehungen Aib und $A'ib$, wie auch Aib und Aic können zugleich bestehen.

Die allgemeine logische Bedeutung der beiden Axiome 2 erhellt aus Folgendem:

Da das Symbol ε *zunächst* inhaltlich leer ist, so könnte die Bedeutung von $a\varepsilon b$ an sich auch die sein, b sei das *einzige* Objekt, das die Beziehung ε zu a besitzt. Dann schließen sich aber $a\varepsilon b$ und $a\varepsilon c$ aus, und analog ist es mit dem Axiom 2b.

Für die Beziehung ε führen wir nun den Ausdruck ein, a ist Element von b.

Wir kommen nun zu der Tatsache, daß die Menge durch ihre Elemente bestimmt ist. Ihr Inhalt zerfällt in zwei voneinander verschiedene Bestandteile. Der erste besagt, daß die Elemente, die mit demselben Objekt b eine Beziehung ε haben können, *unabhängig voneinander* sind; dies soll durch folgendes Axiom ausgedrückt werden, das eine Erweiterung der Axiome 2a auf mehr als zwei Elemente darstellt:

3a. *Ist das Objekt a' von allen Objekten a verschieden, so kann neben den sämtlichen Beziehungen $a\varepsilon b$ zugleich auch die Beziehung $a'\varepsilon b$ bestehen.*

Eine analoge Erweiterung besteht auch für das Axiom 2b; nämlich:

3b. *Ist das Objekt b' von allen Objekten b verschieden, so kann neben den sämtlichen Beziehungen $a\varepsilon b$ auch die Beziehung $a\varepsilon b'$ bestehen.*

Man kann die Axiome 3a und 3b die *Unabhängigkeitsaxiome* nennen.

Axiome dieser Art existieren in der Geometrie *nicht*; vielmehr lauten die Axiome, die dort in Geltung sind, folgendermaßen: 1. Bestehen zugleich die Beziehungen Aib und Aib', so ist A das *einzige* derartige Objekt. 2. Es gibt außer b und b' noch andere Objekte, die zu A diese Beziehung haben; und 3. irgend zwei dieser Elemente bestimmen wiederum das Objekt A, und damit die sämtlichen Objekte, die außer b und b' diese Beziehung haben.

Für die Mengen trifft keines dieser Axiome zu; das zweite nur in der modifizierten Form, die bereits unter 3a erwähnt ist. Kurzgesprochen kann man sagen, daß in der Geometrie die Elemente b, die mit A die Beziehung Aib haben können, durch A eindeutig bestimmt sind, während hier umgekehrt das Objekt b durch die Elemente a eindeutig bestimmt ist, und zwar so, daß die Elemente a keinerlei Beschränkung unterliegen. Dies drücken wir durch folgendes Axiom aus:

4. *Das Objekt b ist durch die Elemente, die mit ihm die Beziehung $a\varepsilon b$ haben, eindeutig bestimmt. Es soll die durch seine Elemente bestimmte Menge heißen.*

Gemäß § 7 folgt daraus noch, daß zwei *verschiedenartig* definierte Mengen dann und nur dann identisch sind, wenn jedes Element der einen Menge auch Element der andern ist.

Hier ist die Stelle, an der wir die aus einem Element bestehende uneigentliche Menge einzuführen hätten. Bisher wurde nämlich angenommen, daß nur eine *Mehrheit* von Elementen eine Menge bestimmen kann; demgegenüber wird es sich empfehlen, *für gewisse Axiome* oder *Operationen* auch die *uneigentliche* Menge $\{a\}$ zuzulassen; was im Sinne von § 6 natürlich in jedem Fall der Prüfung oder des Nachweises der Berechtigung bedarf. Das gleiche gilt von der sogenannten „Nullmenge".

Durch die Axiome 3 und 4 erhält der Mengenbegriff in derselben Weise den Charakter des Subjektiven wie der Funktionsbegriff in der Analysis; die Menge erscheint auch hier als eine *eindeutige Funktion ihrer Elemente*. Damit tritt also auch für die „Grundbeziehungen", die in der Geometrie und in der Mengenlehre gelten, ein prinzipieller Gegensatz in die Erscheinung. Er entspricht dem bekannten Gaußschen Ausspruch, daß die „Raumlehre zu unserm Wissen der selbstverständlichen Wahrheiten eine ganz andere Stellung hat als die reine Größenlehre usw. . . .[1]) Daher sind auch die in der Geometrie und in der Mengenlehre vorhandenen besonderen Beziehungen von durchaus verschiedenem Charakter. In der Tat sind sie in der Geometrie durch die Natur des Raumes objektiv bedingt; in der Mengenlehre dagegen sind sie ganz unseres Geistes Kinder, dem hierauf anwendbaren Cantorschen Wort gemäß, daß das Wesen der Mathematik in ihrer Freiheit liege. Auch deshalb halte ich den Zermeloschen Gedankengnng, der den Bereich und die in ihm vorhandenen Grundbeziehungen als objektiv existierend voraussetzt, nicht für zweckmäßig.[2])

Wir kommen nun zu einer letzten Festsetzung, die das Zeichen ε betrifft. Auf Grund des Axioms 4 haben wir Menge und Element als *verschiedene* mathematische Begriffe zu betrachten (werden also dafür von nun an auch große und kleine Buchstaben verwenden). Wir bedürfen aber noch eines Axioms, das auch die Mengen als Elemente zuläßt. Dieses drücken wir kurz folgendermaßen aus:

---

1) Brief an Bessel vom Jahre 1829.

2) Wenigstens glaube ich Zermelo richtig zu verstehen, wenn ich annehme, seine Grundbeziehungen seien realisiert durch alle an sich möglichen Beziehungen der Form $a \varepsilon b$, also durch die Gesamtheit aller möglichen Mengen oder Mengenbildungen, seien sie bekannt oder unbekannt; in demselben Sinn wie man auch von dem „Bereich" aller mathematischen Gesetzmäßigkeiten sprechen könnte, die doch latent existieren, auch wenn sie uns noch nicht zugänglich geworden sind, oder von allen geometrischen Figuren und Sätzen, die im „Raum" möglich sind.

5. *In den sämtlichen vorhandenen Axiomen sollen die Elemente auch durch Mengen ersetzbar sein;* oder aber:

5a. *Auch wenn A und A' Mengen sind, soll eine Beziehung der Form $A \varepsilon A'$ bestehen können.*

Es ist nun zunächst zu zeigen, daß die Axiome 5 mit den Axiomen 1 bis 4 verträglich sind. Dies beruht darauf, daß erstens auch in den Axiomen 1 bis 4 stets a und b voneinander *verschiedene* Objekte sind, und daß sie zweitens einer sonstigen Beschränkung *nicht* unterliegen.

Weiter bedürfen wir endlich eines Axioms, das den sogenannten *transitiven* Charakter des Zeichens ε ausdrückt, und insbesondere auch das Zermelosche Axiom der *Vereinigungsmenge* enthält. Die Vereinigungsmenge entspricht der Tatsache, daß es gestattet sein soll, von einer Menge A, die die Menge A' als Element enthält, zu einer Menge überzugehen, der die Elemente von A' angehören. Dazu stellen wir das folgende Axiom auf:

6. *Aus den Beziehungen*

$$a \varepsilon A \text{ und } A \varepsilon A' \text{ oder } A \varepsilon A' \text{ und } A' \varepsilon A''$$

soll eine Beziehung $a \varepsilon \mathfrak{A}$ bzw. $A \varepsilon \mathfrak{A}$ gefolgert werden dürfen, wo auch $\mathfrak{A}$ eine Menge ist; was formal durch die Gleichungen

$$(a \varepsilon A)(A \varepsilon A') = a \varepsilon \mathfrak{A} \text{ und } (A \varepsilon A')(A' \varepsilon A'') = A \varepsilon \mathfrak{A}$$

dargestellt werden kann; und zwar ist die Menge $\mathfrak{A}$ folgendermaßen bestimmt:

6a. *Zu einer Menge A, deren Elemente sämtlich oder teilweise Mengen sind, gehört stets eine und nur eine Menge $\mathfrak{A}$;* ihr gehört jedes Element an, das Element entweder von A oder von einer Menge A' ist. Sie heißt die zu A gehörige *Vereinigungsmenge.*[1])

Dieses Axiom soll übrigens auch den Fall treffen, daß die Elemente einer Menge nicht von vornherein als Mengen definiert sind, wohl aber durch solche ersetzbar sind; es gestattet also von der Menge A aller Geraden auf Grund der Tatsache, daß jede Gerade als Menge ihrer sämtlichen Punkte aufgefaßt werden kann, zur Menge $\mathfrak{A}$ aller Punkte des Raumes überzugehen.

Mit den vorstehenden Axiomen sind zunächst die abgeschlossen, die die *mathematische Bedeutung des Zeichens* ε und der durch ε charakterisierten Grundbeziehung betreffen, die also, wie man sagen kann, für den *allgemeinen* Teil der Mengenlehre die Grundlage bilden.

1) Daß es nur eine solche Menge gibt, folgt allerdings bereits aus dem Axiom 4.

Auf sie können die weiteren Operationen und Begriffe der allgemeinen Mengenlehre in gewohnter Weise gegründet werden, z. B. der Begriff der Teilmenge, des gemeinsamen Multiplums, des gemeinsamen Teilers usw. Insbesondere läßt sich auch zeigen, daß die uneigentliche Menge $\{a\}$ und die „Nullmenge" für die genannten Operationen ebenso verwendbar sind wie die eigentlichen Mengen.

b) Spezieller Teil.

Es entsteht nun die Frage, wie man Objekte herstellen kann, die dem so eingeführten Mengenbegriff entsprechen. Dabei bleiben naturgemäß die endlichen Mengen als der triviale Fall außer Betracht; die Frage, um die es sich hier handelt, ist vielmehr die, ob sich außer ihnen noch andere mathematisch verwendbare Objekte erschaffen oder angeben lassen, die den vorstehenden Bestimmungen entsprechen, und wie insbesondere die Auswahl der Elemente, die zu einer Menge zusammentreten sollen, zu geschehen hat. Darauf ist im Anschluß an die allgemeinen Ausführungen von § 4 folgendes zu antworten:

1. Wie bereits oben (§ 8) erwähnt, ziehen wir als Elemente nur mathematische Objekte in Betracht. Aus den früher genannten Gründen ist diese Selbstbeschränkung sachlich gerechtfertigt und geboten.

2. Die Mengenlehre kann unmöglich die Aufgabe haben, bei der axiomatischen Grundlegung ihrer Begriffe und Beziehungen auch das gesamte Gebiet der Arithmetik und Analysis vor ihr Forum zu ziehen. Sie muß sich darauf stützen können, daß sie gewisse Hilfsbegriffe von den andern Wissenschaften entlehnt, insbesondere also den *Funktions*begriff und das ihm äquivalente Zermelosche *Aussonderungs*prinzip. Beachten wir nun, daß die Elemente, die zu einer Menge zusammentreten können, unabhängig voneinander sind, so werden wir, um *spezielle Mengen* zu bilden oder zu definieren — denn darum handelt es sich an dieser Stelle nur —, *jede Vorschrift zulassen dürfen, die sich dem kontradiktorischen Gefüge der Mathematik einreihen läßt*, die also nicht etwa den logischen oder den mathematischen Gesetzen widerspricht — was naturgemäß stets Sache der Untersuchung ist. Eine andere oder auch eine engere Entscheidung allgemeiner Art zu treffen[1]), würde gegen die allgemeinen Erörterungen von § 4 verstoßen. Daß die erste Vorschrift dieser Art die unendliche Menge selbst als mathematisches Objekt axiomatisch einführen muß, z. B. so wie es bei Dedekind der Fall ist, ist evident. Es ist aber auch jede Menge als mathematisches

---

1) Diese engere Vorschrift ist in Zermelos Axiom der Aussonderung mittelbar enthalten; vgl. die Ausführungen von § 4c.

Objekt einführbar, die im Sinn von § 4d „independent" definierbar ist[1]); ihre Widerspruchslosigkeit natürlich vorausgesetzt. Daß diese für die Menge aller mathematischen Objekte nicht vorhanden ist, bedarf keiner weiteren Erörterung; ebensowenig für die Menge aller mathematischen Objekte bis auf eins[2]), oder bis auf eine abzählbare Menge, oder bis auf sämtliche Punkte des Raumes; alles dies sind Bestimmungen, die auf Grund der vorhandenen Rechnungsregeln zu Folgerungen führen würden, die jenseits des kontradiktorischen Rahmens liegen; ihnen können daher mathematische Objekte nicht entsprechen.[3])

Ich schließe mit folgender allgemeinen Bemerkung. Die Sonderstellung der unendlichen und insbesondere der wohlgeordneten Mengen ist augenscheinlich darin begründet, daß sie in der allgemeinen menschlichen Erfahrung keine Stütze haben; im Gegensatz zur Geometrie oder zur Theorie der reellen Funktionen, die beide aus der Verarbeitung der unmittelbaren Erfahrung stammen. Freilich wissen wir, daß es auch hier spezielle mathematische Probleme waren, die Cantor — nach langem Zögern — zu ihrer Erschaffung nötigten. Sie stehen darin den komplexen Zahlen gleich und erfahren daher dasselbe Schicksal. Auch bei diesen hat der Mangel an Objekten der allgemeinen Erkenntnis, denen sie entsprechen, die Stellung der Mathematiker zu ihnen lange Zeit hemmend beeinflußt. Aber auch sie haben durch die Harmonie der ihnen innewohnenden Gesetze diese Hemmungen hinweggeräumt, und aller Voraussicht nach wird auch der herrlichen Schöpfung Cantorschen Geistes das gleiche Los beschieden sein. Denn die opponierenden Mathematiker der Jetztzeit mögen sich strecken und wenden, wie sie wollen; wenn sie die unendlichen Mengen und die transfiniten Zahlen auch theoretisch ablehnen, es gibt doch Gebiete, auf denen sie praktisch mit ihnen operieren; aus dem einfachen Grunde, weil sie nicht anders können.

§ 10. Schlußbemerkung. Die Algebra der Logik.

Ich möchte mich nicht nochmals dem unbegründeten Verdacht aussetzen, als wäre ich ein Nichtachter und Nichtkenner der Philosophie — wie es Herr Hessenberg augenscheinlich annimmt, und wozu ihm

1) Sachlich stimmt dies mit der Auffassung von Cantor und Dedekind darüber, wann man eine Menge als definiert ansehen darf, überein.

2) Auch dieses scholastische Beispiel stammt von Russell.

3) Die Sätze über die Addition von Mengen würden nämlich wieder auf die Menge aller mathematischen Objekte führen. Zudem liegt auch ein *Fehler* obiger Definitionen insofern vor, als sie sich sämtlich auf Worte stützen, denen ein mathematisches Objekt *nicht* entspricht, nämlich die Menge aller mathematischen Objekte.

jede Berechtigung mangelt.[1]) Gerade die Tatsache, daß ich es nicht bin, hat mich veranlaßt, die reinliche Scheidung zwischen Philosophie und Mathematik als eine Art Ziel, aufs innigste zu wünschen, hinzustellen. Denn in der Philosophie ist die volle Harmonie der Gesetze und der objektive Zwang, den diese Gesetzmäßigkeit auf das menschliche Erkennen ausübt, nicht zu finden, und meines Erachtens auch nicht erreichbar.[2]) Es ist also nicht die Geringschätzung der Philosophie die mich dabei treibt, sondern die Liebe zur Mathematik; es ist vor allem der Wunsch, daß sie ihren ihr seit allen Zeiten eigenen Charakter, den absoluten Zwang, den sie auf unser Denken ausübt, auch weiter behalten möge. Dazu kommt, daß es zu allen Zeiten in der Philosophie eine scholastische Betätigung gegeben hat. Ob die alten Sophisten die ersten waren, die an ihr ihre Freude hatten, ist mir unbekannt, aber daß sie — trotz Kants unsterblicher Arbeiten über die Bedeutung und Tragweite aller menschlichen Erkenntnis — auch heute noch im Schwunge ist, ist mir sehr wohl bekannt. Ich zähle dazu insbesondere auch einen Teil der Russellschen Arbeiten, und halte mich deshalb für berechtigt, den Einfluß, den diese auf die Mathematiker ausgeübt haben, als einen scholastischen und unheilvollen zu bezeichnen. Ich glaube auch das Scholastische der Russellschen Menge bereits zu einer Zeit erkannt zu haben, als sie von anderer mathematischer Seite noch für ernst genommen wurde.

Man wird natürlich nach den präzisen Gründen fragen, die einen so schweren Vorwurf rechtfertigen. Man wird außerdem auf die Algebra

1) Vgl. seine Ausführungen in diesem Jahresb. Bd. 17 (1908) S. 162.

2) Ich möchte daher auch darauf verzichten, auf die Ausführungen einzugehen, die Herr Hessenberg zu meinem Artikel über die Paradoxien der Mengenlehre a. a. O. gemacht hat. Sie ermangeln meines Erachtens sogar teilweise der Bestimmtheit. Nur eine einzige historische Bemerkung sei mir gestattet. Auf der Kasseler Mathematikerversammlung (1903) hielt Cantor es für nötig, die Mengenlehre gegen gewisse Einwände französischer Philosophen zu verteidigen. In der Debatte, die sich hieran schloß, wurde von verschiedener Seite die Gültigkeit des Satzes vom Widerspruch mit Entschiedenheit in Zweifel gezogen. Dies war die Veranlassung zu meinem Meraner Vortrag und dem Paradoxieartikel. Sein Ziel war auch damals zu betonen, daß der Satz vom Widerspruch das Alpha und Omega jeder mathematischen Wissenschaft bleiben muß, und daß Begriffe, die ihm widersprechen, eine Existenzberechtigung in der Mathematik nicht besitzen und mathematische Objekte nicht darstellen. Ich habe dem in dem vorstehenden Artikel ausführlicher Ausdruck zu geben versucht; doch ist mir trotz aller Knappheit des früheren Artikels nicht ersichtlich, auf Grund welcher Tatsachen die Herren Korselt und Hessenberg ihn so auffassen konnten, als sollte auch die Verwendung des indirekten Beweises in Frage gestellt werden. (Dieser Jahresb. Bd. 15 (1906) S. 218 u. Bd. 17 (1908) S. 146.)

der Logik hinweisen und daraus folgern, daß schon ihre bloße Existenz meine Auffassung Lügen straft. Aber ich glaube auch diesem Einwand gewachsen zu sein. Freilich kann es nicht meine Absicht sein, in eine allgemeine Erörterung der Grundlagen der Algebra der Logik einzutreten oder ihre anerkannten wissenschaftlichen Resultate in Zweifel zu ziehen. Ich habe es nur mit dem zu tun, was ich soeben als mathematisch unheilvoll bezeichnet habe. Ich beschränke mich deshalb darauf, die Prinzipien, die Russell ihrem Bau oder vielmehr der Ableitung seiner Paradoxa zugrunde legt, hier zu nennen.

Erstens bildet man zu jedem Begriff A und zu jedem Urteil sein sogenanntes kontradiktorisches Gegenteil Non A; also zur „Menschlichkeit" die „Nichtmenschlichkeit", zum „Rot" das „Nichtrot", zum „Ding" oder „Punkt" die Begriffe „Nichtding" und „Nichtpunkt" usw.

Zweitens gibt man auf Grund dieser Begriffsbildung dem Satz des Widerspruchs die Form, daß jedes Urteil entweder richtig oder falsch ist. Dies trifft für mathematische Urteile zu; bei Russell sowie überhaupt im neueren Logikkalkül wird aber in einem viel allgemeineren, oder richtiger, im schrankenlosesten Umfang davon Gebrauch gemacht.

Diese beiden Festsetzungen finden in den Gleichungen

$$A \cdot \text{Non}\, A = 0 \text{ und } A + \text{Non}\, A = 1$$

ihre formale Darstellung. Beide sollen das vorausgesetzte kontradiktorische Verhältnis zwischen A und Non A ausdrücken. Die zweite bedeutet, daß jedes Ding entweder die Eigenschaft A oder aber die Eigenschaft Non A hat. Die erste soll bedeuten, daß es kein Objekt gibt, dem sowohl die erste, wie auch die zweite Eigenschaft zukommt.

Auf Grund der vorstehenden Bestimmungen wird drittens aus der Prädikatseigenschaft „rot" ($= r$) ein Subjektsbegriff geschaffen, der Begriff „Rot" ($= R$), und man kann nun den Satz aufstellen: Der Begriff „Rot" (R) ist nicht rot (r), ist also mit andern Worten kein roter Begriff, der Begriff „Rechteckig" ist nicht selbst rechteckig usw. Umgekehrt ist der Begriff „Denkbar" (D) selbst denkbar (d) oder der Begriff „Prädikabel" (P) selbst prädikabel (p) — weil diese Eigenschaft offenbar *allen* Begriffen zukommt. Ferner wird auch der Begriff „Nicht Rot" selbst wieder als nichtroter Begriff bezeichnet; so daß also der Satz gilt: der Begriff „Nicht rot" ist selbst nicht rot.[1]) Man hat daher, wenn man noch das Zeichen $\varkappa$ für diese Beziehung einführt, die Aussagen:

$$D \varkappa d;\ P \varkappa p;\ R \textit{ nicht } \varkappa r;\ \text{Nicht } R\ \varkappa \text{ nicht } r.$$

1) Principles of Mathematics, Cambridge 1893, S. 80 ff. u. 100 ff. Hier scheint mir übrigens die Quelle dessen versteckt zu liegen, was ich als Scholastik bezeichne.

Der Logikkalkül, wie er durch Russell vertreten wird, geht aber noch einen Schritt weiter; *er benutzt für den Subjektbegriff und die Prädikatseigenschaft die gleichen Symbole,* schreibt also $p \varkappa p$, $d \varkappa d$, r *nicht* $\varkappa r$, nicht r $\varkappa$ nicht r, und kommt so zu Symbolen, die zu sich selbst in einer gewissen *materiellen* Prädikatsbeziehung stehen.[1])

Von diesen Prinzipien aus ist Russell zur Ableitung seiner Paradoxien, die ja eine ganze Klasse bilden, geführt worden. Welchen Schluß soll der Mathematiker daraus ziehen? — Offenbar keinen andern als den: Der Versuch, eine Algebra der Logik den *mathematischen* Wissenschaften anzugliedern, schlägt fehl, wenn man die vorstehenden drei Prinzipien in *allgemeinstem* Umfang als Axiome zugrunde legt. Denn diese Axiome führen zu Folgerungen, die gegen den Satz vom Widerspruch verstoßen. Sie liegen daher jenseits des mathematischen Denkens und lassen sich in den mathematischen Rahmen nicht einspannen.

Welches ist denn nun der *innere* Grund hiervon? Meines Erachtens der folgende: Im Gegensatz zur Mathematik ist die Sprache und die Welt der Begriffe *nicht durchweg logisch* aufgebaut; ihre gegenseitigen Beziehungen ruhen in vielen Fällen nicht auf kontradiktorischer Grundlage, insbesondere ist auch die Eindeutigkeit und Bestimmtheit ihres Inhalts nicht immer vorhanden.[2]) Es ist auch nicht immer möglich, sie so zu klären, daß sie sich wie die mathematisierbaren Begriffe *logisch vollkommen* verhalten und von den empirischen Schlacken, die ihnen als peinlicher Erdenrest zunächst anhaften, frei werden. Insbesondere aber ist — im Gegensatz zur Mathematik — die Erschöpfung

---

1) Hier scheint mir auch der Ursprung davon zu liegen, daß Zermelo eine materielle Beziehung $a \varepsilon a$ für möglich hält. Übrigens steht meines Erachtens die Annahme einer materiellen Prädikatsbeziehung $a \varkappa a$, die von der Identität verschieden ist, mit dem logischen Satz von der Identität im Widerspruch; eine Objektsbeziehung $a \varkappa a$ ist freilich möglich.

2) Gerade auf dem Schillern der einzelnen Worte und Begriffe und dem Spiel mit Worten, die bald in dieser, bald in jener Bedeutung erscheinen, beruht ja die ganze Sophistik.

Dem Obigen widerspricht naturgemäß nicht, daß auch die mathematische Darstellung sich vielfach der gewöhnlichen Sprache zu bedienen hat; z. B. wenn es sich um Berichte oder Urteile handelt. Man kann sehr wohl von einem „allgemeinen" Resultat, von einem noch „allgemeineren" Resultat und von dem „allgemeinsten" bisher erreichten Resultat sprechen, darf hinzufügen, daß sogar dies allgemeinste Resultat nicht einmal „allgemein" im strengen Sinn des Wortes ist, und darf hoffen, nicht mißverstanden zu werden. Aber die mathematische **Beweisführung** darf nur mit Worten mathematischen Gepräges operieren; diese muß in der Tat, wie es z. B. von Peano und Frege gefordert wird, völlig mit Hilfe spezifischer mathematischer Symbole möglich sein.

aller, einem und demselben Begriff entsprechenden Möglichkeiten im allgemeinen nicht so durchführbar, daß jede einzelne *isolierbar* ist und die andern kontradiktorisch ausschließt. Die Algebra der Logik, wie sie uns hier entgegentritt, will aber in schrankenloser Weise alle Begriffe und alle Begriffsbildungen, die man real oder formal aussinnen mag, und alle ihnen entsprechenden Möglichkeiten und Urteile umfassen und will auf sie alle die Methode des indirekten Beweises anwenden. Darin liegt ihr Verhängnis.[1]) Bei den Begründern dieser Wissenschaft war es freilich anders. Schröder z. B. operiert überhaupt nur mit den beiden ersten der obigen Prinzipien; er hat überdies ausdrücklich darauf hingewiesen, daß auch sie nur in gewissem Umfang in Betracht zu ziehen sind. Es heißt z. B. bei ihm, daß die Algebra der Logik sich auf solche Sätze zu beschränken habe, die *einen dem Sinne nach vollkommen bestimmten Inhalt besitzen.*[2]) Naturgemäß stellt man aber wieder die Frage, ob sich eine derartige Schranke mit derselben Bestimmtheit ziehen oder angeben läßt, wie dies für die eigentlichen mathematischen Wissenschaften der Fall ist, und wo diese Schranke etwa liegen mag. Ich verzichte darauf, dies tatsächlich zu erörtern, nur auf die Lücke, die hier offen ist, wollte ich hinweisen.

Dieser Gegensatz zwischen der Mathematik und der allgemeinen Welt der Begriffe und der Sprache ist der innere Grund, aus dem ich die reinliche Scheidung zwischen Mathematik und Philosophie für notwendig halte.[3]) Er ist es auch, der die Harmonie der Gesetze, die die Mathematik ziert, der Philosophie vorenthält. Insbesondere aber kann die Mathematik die Erledigung der Paradoxa und ähnlicher Probleme ruhig dem Philosophen überlassen, vorausgesetzt, daß er sie vor sein Forum ziehen mag.[4]) Es kann der Mathematik wirklich gleichgültig

---

1) Hat doch schon Kant in der Erörterung der Antinomieen darauf hingewiesen, daß für gewisse Urteile die Methode des indirekten Beweises versagen kann; (Krit. d. rein. Vernunft, herausgeg. von Rosenkranz, S. 396 ff.). Man vgl. andererseits den schrankenlosen Gebrauch, den Russell von den Worten „Funktion" und „Willkürliche" macht. Während die Mathematik mit größter Vorsicht und Gewissenhaftigkeit vorgeht und stets die Frage nach der Berechtigung ihrer Verallgemeinerungen prüft, werden von Russell beliebige Worte, Dinge und Nichtdinge, Möglichkeiten und Unmöglichkeiten als „Willkürliche" eingeführt und unterschiedlos zum Gegenstand der Schlüsse gemacht. Vgl. auch den Schluß von § 6.

2) Algebra der Logik, Leipzig 1892, Bd. 2, S. 7.

3) Die Sprache der Mathematik soll — mit Pringsheim zu reden — nicht quallenhaft sein.

4) Ich verkenne keineswegs, daß die Analyse gewisser Paradoxa ein wissenschaftliches und schwieriges Problem darstellt. Eine philosophische Erörterung ist kürzlich auch von Herrn Urbach gegeben worden; Zeitschr. für Philosophie und philosophische Kritik, Bd. 140 (1910) S. 95.

sein, wo sie ihre ernste oder heitere Würdigung finden. Jedenfalls aber hat sie nicht den geringsten Anlaß, sich bei der Grundlegung ihrer eigenen Wissensgebiete von der Rücksicht auf philosophische Allgemeinbegriffe und Spekulationen, die auf ihnen ruhen, leiten zu lassen. Sie ist und muß eine kontradiktorische Wissenschaft bleiben. Sie soll sich also nicht an etwas anschließen, dem der kontradiktorische Charakter mangelt.

Es ist nicht der Cantorismus, dem man die Mängel zur Last legen kann, auf die Poincaré in Rom auf dem internationalen Kongreß hinzuweisen für nötig gehalten hat. Wollte sich die Mathematik in dieser Hinsicht eine Losung aneignen, so müßte sie vielmehr lauten:

Für den Cantorismus, aber gegen den Russellismus!

Über eine bemerkenswerte Klasse von Raumkurven.

Von E. SALKOWSKI in Charlottenburg.

Im dritten Bande seiner „Lezioni di geometria differenziale" beschäftigt sich Herr Bianchi mit einer bestimmten Art von Transformationen, die aus einer Biegungsfläche einer Fläche zweiter Ordnung unendlich viele neue Flächen derselben Art herzuleiten gestatten. Dabei kommt er bei der Betrachtung eines Grenzfalls[1]) auf eine Klasse von Raumkurven, die auch an sich bemerkenswerte Eigenschaften besitzen und die daher auch losgelöst vom Problem der Biegung eine nähere Untersuchung verdienen dürften. Es sei hier nur auf einige Fragestellungen hingewiesen, die sich naturgemäß darbieten.

1. Es handelt sich um diejenigen Kurven, die bei der Ausbreitung ihrer Tangentenfläche in die Ebene sich in einen Kegelschnitt verwandeln und die man daher der Kürze halber als *tordierte* oder *windschiefe Kegelschnitte* („coniche distorte") bezeichnen kann. Die Krümmung, Torsion und Bogenlänge einer solchen Kurve sei $\varkappa = \frac{1}{\varrho}$, $\tau = \frac{1}{r}$ und s; dann ist ihre erste natürliche Gleichung mit der Gleichung der Kegelschnitte identisch

$$\text{(I)} \qquad \left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2 = 9\left(-1 + A\varrho^{\frac{2}{3}} - B\varrho^{\frac{4}{3}}\right),$$

während als zweite eine beliebige Relation zwischen Torsion und Bogenlänge angenommen werden kann

$$\text{(II)} \qquad \tau = f(s).$$

1) Lezioni III, Nota II. Sopra un caso limite delle trasformazioni B_k. Pisa. 1909. Siehe auch Rom. Acc. L. Rend. (5) 18_1, 175—181.