

Werk

Titel: Über die Momentanbewegung eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems in seiner E...

Autor: Müller, Reinhold

Jahr: 1910

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?37721857X_0019|log9

Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Herr Müller in seinen Veröffentlichungen wiederholt erwähnt (dieser Jahresbericht 16, S. 186, 17, S. 36), auch Eulers Verdienste um die Astronomie geschildert und ist im besonderen auf dessen Anteil an der Bestimmung der Sonnenparallaxe aus dem Venusdurchgang im Jahre 1769 eingegangen. Hierbei nimmt er ausdrücklich darauf Bezug, daß Euler auch auf die Bestimmung der geographischen Lage der Beobachtungsorte eingegangen sei, und das ist gerade der Gegenstand einer der Teil-Abhandlungen im 14. Bande der *Novi Commentarii* (deutsche Ausgabe der Gedächtnisrede, Basel 1786, S. 89—90). In demselben Sinne haben sich auch Encke in der Monographie über den *Venusdurchgang 1769* (Gotha 1824, S. 23) und R. Wolf in seinem viel benutzten *Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie* geäußert (Bd. I, Zürich 1872, S. 164—165).

Es kann mithin gar keine Rede davon sein, daß erst Herr Eneström die drei folgenden Abhandlungen im Jahre 1909 „als Eulersche erwiesen habe“. Er hat vielmehr nur mit seiner gewohnten Sorgfalt den vorher dargelegten, aus dem Summarium sofort ersichtlichen und längst bekannten Sachverhalt auf S. 117 seines *Verzeichnisses der Eulerschen Schriften* kurz angegeben. Allerdings hat der verdiente Euler-Bibliograph einige kleinere Abhandlungen Eulers entdeckt, die bei Fuß und Hagen fehlen; diese Abhandlungen haben selbstverständlich in der hier mitgeteilten *Liste der Berichtigungen* keinen Platz gefunden.

Alles in allem muß es bei meinem Ausspruch in der Züricher Vierteljahrschrift sein Bewenden haben: „*Das Müllersche Verzeichnis erwies sich als recht unzuverlässig; die Fehler, die bis zu 220 Seiten gehen (Hagen Nr. 703), belaufen sich auf mehr als 1000 Seiten.*“ Es ist nicht wahr, daß ich bei diesen 1000 Seiten Abhandlungen mitgezählt habe, die erst nach dem Erscheinen des Müllerschen Verzeichnisses als Eulersche erwiesen oder neu entdeckt worden sind, und ich muß die hierin liegende Unterstellung einer illoyalen Handlungsweise mit aller Entschiedenheit zurückweisen. Herrn Müllers Vorgehen gegen mich zu qualifizieren, überlasse ich den Lesern dieser Zeitschrift.

Über die Momentanbewegung eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems in seiner Ebene.

Von REINHOLD MÜLLER in Darmstadt.

Die bisher vorliegenden Untersuchungen über die Momentanbewegung eines kompl. bewegten ebenen ähnlich-veränderlichen Systems beziehen sich hauptsächlich auf drei unendlich benachbarte Phasen, also auf die Krümmung der erzeugten Kurven.¹⁾ Gegenüber

¹⁾ Vgl. vor allem Grouard, L'Institut, Journal universel des sciences etc., 1870, S. 27, 84, 124, 171 und Geisenheimer, Untersuchung der Bewegung ähnlich-veränderlicher Systeme, Zeitschrift für Mathematik und Physik 1879, Bd. 24, S. 129. Weitere Literaturangaben in Burmesters Kinematik S. 865. Vgl. ferner R. Müller, Über die Krümmungsmittelpunkte der Bahnkurven in ebenen ähnlich-veränderlichen Systemen, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1891, Bd. 36, S. 129.

den bekannten, für starre Systeme geltenden Sätzen zeigt sich hier von vornherein ein wesentlicher Unterschied. Beschreibt nämlich in einem ähnlich-veränderlichen System der Punkt A momentan eine Bahnstelle vom Krümmungsmittelpunkt A , so ist A nicht zugleich der Krümmungsmittelpunkt der Bahnkurve, die A bei der umgekehrten Bewegung durchläuft, auch stehen die Punkte A und A nicht mehr in der Beziehung, daß jede Systemkurve, die AA zur Normale und A zum Krümmungsmittelpunkt hat, ein Hüllbahnelement erzeugt, dessen Krümmungsmittelpunkt mit A zusammenfällt. Es gibt also keine „Paare entsprechender Krümmungsmittelpunkte“ in dem bei starren Systemen gebräuchlichen Sinne. Wenn sonach die Verhältnisse im gegenwärtig betrachteten Falle auch ungleich verwickelter liegen, so bieten sie andererseits eine um so reichere Fülle von leicht übersehbaren geometrischen Beziehungen, daß es sich immerhin lohnt, die Theorie in demselben Umfange zu entwickeln, wie dies bei starren Systemen bereits geschehen ist.

I. Die Bewegung des Systems durch drei unendlich benachbarte Phasen. Die Krümmungsmittelpunkte der von den Systempunkten erzeugten Bahnkurven.

1. Ein ähnlich-veränderliches System durchlaufe in der festen Ebene Σ eine Reihe unendlich benachbarter Phasen $S, S', S'' \dots$

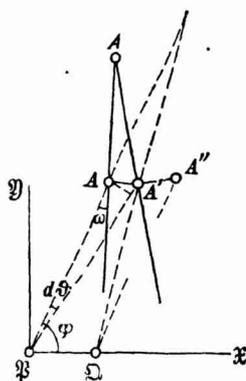


Fig. 1.

Es gelange aus der Anfangsphase S nach S' durch eine Drehung um den Pol \mathfrak{P} durch den Winkel $d\vartheta$ und durch eine gleichzeitige Zunahme der Längeneinheit um $d\lambda$, aus S' nach S'' durch eine Drehung um den Pol \mathfrak{Q} durch den Winkel $d\vartheta + d^2\vartheta$ und eine Zunahme der Längeneinheit um $d\lambda + d^2\lambda$ usw. Im folgenden wird immer vorausgesetzt, daß \mathfrak{P} im Endlichen liegt. Der Winkel $d\vartheta$ soll positiv gerechnet werden, wenn die Drehung des Systems, wie in Fig. 1, im Sinne des Uhrzeigers erfolgt.

Wir betrachten ferner das Bogenelement $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ der Polbahn, das wir mit ds bezeichnen, als wesentlich positiv und verstehen unter positiver Polbahntangente die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ in der Richtung von \mathfrak{P} nach \mathfrak{Q} , unter positiver Polbahnnormale die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{Y}$, die nach einer positiven Drehung um 90° mit $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ zusammenfällt.

Es seien A, A', A'' drei aufeinanderfolgende Lagen eines beliebigen Systempunktes. Dann ist das Bogenelement AA' seiner Bahnkurve die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $\mathfrak{P}A \cdot d\vartheta$

und $\mathfrak{P}A \cdot d\lambda$. Bezeichnen wir mit ω den spitzen Winkel, den die Bahnnormale in A mit der Geraden $\mathfrak{P}A$ einschließt, so ist ω gleich dem Winkel bei A in jenem Dreieck, folglich

$$(1) \quad \tan \omega = \frac{d\lambda}{d\vartheta}, \quad \sin \omega = \frac{d\lambda}{\sqrt{d\vartheta^2 + d\lambda^2}}, \quad \cos \omega = \frac{d\vartheta}{\sqrt{d\vartheta^2 + d\lambda^2}}.$$

Es bilden also die Bahnnormalen aller Punkte mit den zugehörigen Polstrahlen momentan den Winkel ω .

Für die Phase S' haben wir den Winkel zwischen der Bahnnormale in A' und der Geraden $\mathfrak{Q}A'$ gleich $\omega + d\omega$ zu setzen, und zwar ergibt sich aus (1)

$$\frac{d\omega}{\cos^2 \omega} = \frac{d\vartheta d^2\lambda - d\lambda d^2\vartheta}{d\vartheta^3}$$

oder

$$(2) \quad d\omega = \frac{d\vartheta d^2\lambda - d\lambda d^2\vartheta}{d\vartheta^2 + d\lambda^2}.$$

Nun ist der Krümmungsradius r der Bahnkurve im Punkte A gleich dem Bogenelement AA' dividiert durch den Winkel $d\iota$ der beiden Normalen. Setzen wir $\mathfrak{P}A = r$, $\angle A\mathfrak{P}A' = \varphi$, $\angle(\mathfrak{Q}A', \mathfrak{P}A) = d\xi$ und $\angle \mathfrak{Q}A'\mathfrak{P} = d\kappa$, so ist

$$AA' = r \sqrt{d\vartheta^2 + d\lambda^2}$$

und

$$\omega + d\iota = \omega + d\omega + d\xi,$$

also

$$d\iota = d\omega + d\xi = d\omega + d\kappa - d\vartheta.$$

Aus dem Dreieck $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}A'$ folgt aber nach dem Sinussatz

$$d\kappa = \frac{ds \sin \varphi}{r},$$

mithin wird

$$d\iota = \frac{ds \sin \varphi - r(d\vartheta - d\omega)}{r},$$

und demnach ist der Krümmungsradius der Bahnkurve des Punktes A

$$(3) \quad r = \frac{r^2 \sqrt{d\vartheta^2 + d\lambda^2}}{ds \sin \varphi - r(d\vartheta - d\omega)}.$$

Bei der Ableitung dieser Formel haben wir den Kontingenzwinkel $d\iota$ und folglich auch den Krümmungsradius r positiv gerechnet, wenn — wie in Fig. 1 — der Krümmungsmittelpunkt A und der Pol \mathfrak{P} auf entgegengesetzten Seiten der Bahntangente liegen.

2. Die umgekehrte Bewegung. Für einen in der Ebene S befindlichen Beobachter dreht sich die Ebene Σ um die Systempunkte, die der Reihe nach mit \mathfrak{P} , $\mathfrak{Q} \dots$ zusammenfallen, in entgegengesetztem

Sinne, also bzw. durch die Winkel $-d\vartheta$, $-(d\vartheta + d^2\vartheta) \dots$, und gleichzeitig scheint sich ihre Längeneinheit um $d\lambda$, $d\lambda + d^2\lambda \dots$ zu verkleinern. Verstehen wir daher unter B den Punkt der Ebene Σ , der momentan mit A zusammenfällt, unter \bar{r} den Krümmungsradius der Bahnkurve, die B in der Ebene S beschreibt, so erhalten wir \bar{r} , indem wir in Gleichung (3) die Größen $d\vartheta$, $d^2\vartheta$, $d\lambda$, $d^2\lambda$ bzw. mit $-d\vartheta$, $-d^2\vartheta$, $-d\lambda$, $-d^2\lambda$ vertauschen. Dann bleibt $d\omega$ unverändert, und es ergibt sich

$$(4) \quad \bar{r} = \frac{r^2 \sqrt{d\vartheta^2 + d\lambda^2}}{ds \sin \varphi + r(d\vartheta + d\omega)}.$$

Der Krümmungsmittelpunkt A der Bahnkurve, die der Systempunkt A in der Ebene Σ beschreibt, erzeugt bei dieser umgekehrten Bewegung in der Ebene S eine Kurve als Ort der Systempunkte C, D, E . . . , die bei der ursprünglich betrachteten Bewegung in den Lagen C, D', E'' . . . mit A zusammenfallen. Dann ist $AC = AA$, $A'D' = A'A$, $A''E'' = A''A$, also $AC = A'D' = A''E''$, folglich $AC > AD > AE$. Wie bereits in der Einleitung bemerkt wurde, ist demnach A nicht umgekehrt der Krümmungsmittelpunkt der Bahnkurve des Punktes A an der gegenwärtig mit C bezeichneten Stelle.

3. Für

$$(5) \quad r = \frac{ds}{d\vartheta - d\omega} \sin \varphi$$

folgt aus Gleichung (3) $r = \infty$. Den Punkten des durch Gleichung (5) dargestellten Systemkreises w , der die Polbahntangente $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ in \mathfrak{P} berührt, entsprechen daher unendlich ferne Krümmungsmittelpunkte, er ist also der *Wendekreis* der Phase S. Ebenso ergibt sich aus (4) als Ort der Punkte von Σ , die bei der umgekehrten Bewegung eine Bahnstelle mit unendlich fernem Krümmungsmittelpunkt durchschreiten, der *Rückkehrkreis* ψ mit der Gleichung

$$(6) \quad r = -\frac{ds}{d\vartheta + d\omega} \sin \varphi.$$

Bezeichnen wir die Durchmesser der Kreise w und ψ mit d_w , d_ψ , ihre Mittelpunkte mit \mathfrak{M}_w , \mathfrak{M}_ψ , so ist

$$(7) \quad d_w = \frac{ds}{d\vartheta - d\omega},$$

$$(8) \quad d_\psi = -\frac{ds}{d\vartheta + d\omega};$$

dabei liegen \mathfrak{M}_w , \mathfrak{M}_ψ auf der positiven Polbahnnormale, wenn d_w , d_ψ positiv sind.

4. Der Übergang des Systems aus der Phase S in die unendlich benachbarte Phase S' ist definiert durch den Pol \mathfrak{P} und den Winkel ω , der Übergang in die folgende Phase S'' durch die Polbahntangente $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ und die Durchmesser d_w und d_ψ des Wende- und Rückkehrkreises. Denn die Gleichungen (1), (7) und (8) bestimmen die Verhältnisse der unendlich kleinen Größen ds , $d\lambda$, $d\vartheta$, $d\omega$, mithin für jeden Systempunkt den Krümmungsmittelpunkt seiner Bahnkurve. Wir wollen deshalb bis auf weiteres den Pol \mathfrak{P} , die Kreise w und ψ und den Winkel ω von vornherein als gegeben betrachten, diesen etwa durch die Normale $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ der Bahnkurve, die der mit \mathfrak{P} zusammenfallende Punkt der Ebene S beschreibt; dann ist $\omega = \angle \mathfrak{N}\mathfrak{P}\mathfrak{X}$. (Fig. 2.)

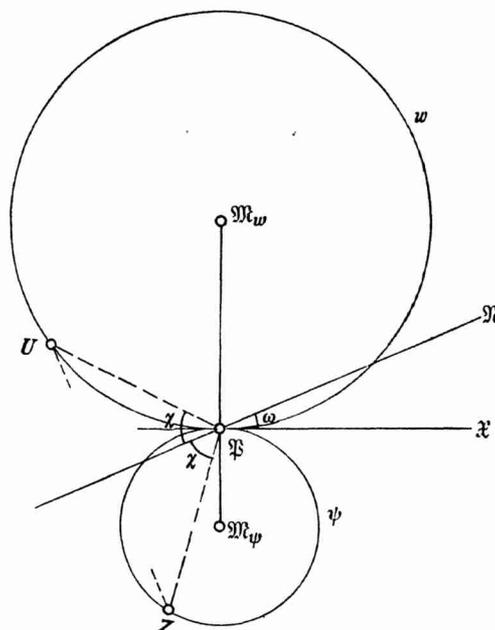


Fig. 2.

Verstehen wir unter U und Z die Punkte von w und ψ , die in bezug auf $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ symmetrisch liegen, und setzen $\mathfrak{P}U = \mathfrak{P}Z = l$ und $\angle Z\mathfrak{P}U = 2\chi$, so ist

$$(9) \quad d_w = \frac{l}{\sin(\chi - \omega)}$$

und

$$(10) \quad d_\psi = -\frac{l}{\sin(\chi + \omega)}$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf (7) und (8)

$$\frac{\sin(\chi - \omega)}{\sin(\chi + \omega)} = \frac{d\vartheta - d\omega}{d\vartheta + d\omega}$$

oder

$$\frac{\cot\omega - \cot\chi}{\cot\omega + \cot\chi} = \frac{\frac{d\vartheta}{d\lambda} - \frac{d\omega}{d\lambda}}{\frac{d\vartheta}{d\lambda} + \frac{d\omega}{d\lambda}};$$

es ist also nach (1)

$$\cot\chi = \frac{d\omega}{d\lambda},$$

oder analog den für ω geltenden Gleichungen

$$(11) \quad \tan\chi = \frac{d\lambda}{d\omega}, \quad \sin\chi = \frac{d\lambda}{\sqrt{d\omega^2 + d\lambda^2}}, \quad \cos\chi = \frac{d\omega}{\sqrt{d\omega^2 + d\lambda^2}}.$$

Demnach ist

$$\sin(\chi - \omega) = \frac{d\lambda(d\vartheta - d\omega)}{\sqrt{(d\vartheta^2 + d\lambda^2)(d\omega^2 + d\lambda^2)}},$$

mithin nach (7) und (9)

$$(12) \quad l = \frac{ds d\lambda}{\sqrt{(d\vartheta^2 + d\lambda^2)(d\omega^2 + d\lambda^2)}}.$$

An Stelle von b_w und b_ψ werden wir häufig auch l und χ zur Festlegung der Momentanbewegung benutzen.¹⁾

Mit Rücksicht auf die letzten Gleichungen läßt sich die Formel (3) für den Krümmungsradius r auch folgendermaßen schreiben

$$(13) \quad r = \frac{r^2 \sin \chi}{l \sin \varphi - r \sin(\chi - \omega)},$$

oder nach (9)

$$(14) \quad r = \frac{\sin \chi}{\sin(\chi - \omega)} \cdot \frac{r^2}{b_w \sin \varphi - r}.^{2)}$$

5. *Erste Konstruktion des Krümmungsmittelpunkts A der Bahnkurve des Systempunkts A.* In Fig. 3 haben w , U , $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ dieselbe Bedeutung wie in der vorigen Figur. Schneidet w die Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{A}$ bzw. in \mathfrak{N}_w und A_w , so ist $\angle \mathfrak{N}_w A_w \mathfrak{P} = \omega$, die Bahnnormale π_A des Punktes A also parallel zu $\mathfrak{N}_w A_w$.

Es sei r_e der Krümmungsradius, A_e der Krümmungsmittelpunkt der Bahnkurve, die der Punkt A beschreiben würde, wenn unter Beibehaltung der Werte von $d\vartheta$, $d^2\vartheta \dots d\lambda$, $d^2\lambda \dots$ das System sich *ein­förmig* d. h. auf solche Weise bewegte, daß der mit \mathfrak{P} zusammenfallende System­punkt fortwährend fest bliebe. In diesem Falle ist $ds = 0$, also nach (12) auch $l = 0$, während die Winkel ω und χ unverändert bleiben; Gleichung (13) geht daher über in

$$r_e = - \frac{r \sin \chi}{\sin(\chi - \omega)}.$$

Das Dreieck $A\mathfrak{P}A_e$ ist demnach in der betrachteten Phase für alle Systempunkte A von unveränderlicher Gestalt. Ziehen wir nun $UU \parallel \mathfrak{P}\mathfrak{N}$

1) Bemerkenswert sind folgende *Sonderfälle*, auf die wir aber nicht weiter eingehen wollen:

1. $d\vartheta = 0$, also $\omega = 90^\circ$ und $d\omega = - \frac{d^2\vartheta}{d\lambda}$, $b_w = b_\psi = - \frac{ds}{d\omega}$, d. h. Wende- und Rückkehrkreis fallen zusammen. Die Bahntangenten aller Punkte gehen momentan durch \mathfrak{P} .

2. $d\omega = 0$. Dann ist $b_\psi = -b_w$ wie bei starren Systemen und $\chi = 90^\circ$.

3. $d\omega = d\vartheta$, $b_w = \infty$, $\chi = \omega$. Der Wendekreis artet aus in die Polbahntangente $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$.

4. $d\omega = -d\vartheta$, $b_\psi = \infty$, $\chi = 180^\circ - \omega$.

5. $d\lambda = 0$, also $\omega = 0$, alle Bahnnormalen gehen durch \mathfrak{P} .

2) In etwas anderer Form zuerst bei Grouard a. a. O. S. 85.

Aus beiden Gleichungen folgt durch Elimination von r

$$(\xi - x)(x \sin \omega + y \cos \omega) - (\eta - y)(x \cos \omega - y \sin \omega) = 0$$

oder

$$(17) (x \sin \omega + y \cos \omega)\xi + (-x \cos \omega + y \sin \omega)\eta - (x^2 + y^2) \sin \omega = 0.$$

Es ergibt sich ferner aus (15) und (16)

$$\xi x + \eta y = x^2 + y^2 + r \{x \cos(\varphi + \omega) + y \sin(\varphi + \omega)\} = r^2 + r r \cos \omega$$

und

$$\xi y - \eta x = r \{y \cos(\varphi + \omega) - x \sin(\varphi + \omega)\} = -r r \sin \omega.$$

Demnach ist der Ausdruck

$$(\xi x + \eta y) \sin \chi + (\xi y - \eta x) \cos \chi + l \{(\xi - x) \sin \omega - (\eta - y) \cos \omega\}$$

gleich

$$r^2 \sin \chi + r \{r \sin(\chi - \omega) - l \sin \varphi\},$$

folglich nach (13) gleich Null; zwischen den Koordinaten von A und A besteht also weiter die Gleichung

$$(18) (\xi x + \eta y) \sin \chi + (\xi y - \eta x) \cos \chi + l \{(\xi - x) \sin \omega - (\eta - y) \cos \omega\} = 0.$$

Betrachten wir nun den Punkt $A(x, y)$ als gegeben, so liefert jede der Gleichungen (17) und (18) einen geometrischen Ort des Punktes A , und zwar bedeutet (17) offenbar die Bahnnormale n_A und (18) eine zweite Gerade, die wir fortan mit g_A bezeichnen wollen; demnach ist A der Schnittpunkt von n_A und g_A . Fragen wir aber umgekehrt nach dem Systempunkt, der zu einem gegebenen Krümmungsmittelpunkt $A(\xi, \eta)$ gehört, so wird dem Punkte A durch Gleichung (18) eine Gerade g_A zugeordnet und durch (17) ein Kreis k_A ; in der Tat liegen alle Systempunkte, deren Bahnnormalen den Punkt A enthalten, auf einem Kreise, der durch \mathfrak{P} geht, und der die Bahnnormale des in A liegenden Systempunktes an dieser Stelle berührt. Dem Punkte A der Ebene Σ entsprechen daher in S zwei reelle oder konjugiert imaginäre Punkte A und A^* , nämlich die Schnittpunkte der Geraden g_A mit dem Kreise k_A . Sind sie reell, so ist A der Krümmungsmittelpunkt der Bahnelemente, die sie augenblicklich beschreiben.

Die Lösung der einen wie der umgekehrten Aufgabe erfordert nur noch die Konstruktion der Geraden g , die dem jeweilig gegebenen Punkte entspricht.

8. Gleichung (18) definiert eine reziproke Verwandtschaft zwischen den Ebenen S und Σ . Um sie näher zu untersuchen, drehen wir das bisher benutzte Koordinatensystem um \mathfrak{P} durch den Winkel ω , bis $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$

mit $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ zusammenfällt, setzen also $x = x' \cos \omega - y' \sin \omega$, $y = x' \sin \omega + y' \cos \omega$ und drücken in analoger Weise ξ, η durch ξ', η' aus. Dann verwandelt sich Gleichung (18) in

$$(19) (x' \sin \chi + y' \cos \chi) \xi' + (-x' \cos \chi + y' \sin \chi - l) \eta' + ly' = 0.$$

Die reziproke Verwandtschaft der Ebenen S und Σ ist also bereits bestimmt durch Angabe von \mathfrak{P} , $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$, l und χ , mithin unabhängig von ω , d. h. von der Lage der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$.

Für $x' = y' = 0$ folgt aus (19) $\eta' = 0$, und für $\xi' = \eta' = 0$ ergibt sich $y' = 0$; dem Punkte \mathfrak{P} entspricht also, gleichgültig welcher Ebene man ihn zuweist, in der anderen Ebene die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$.

Setzen wir in Gleichung (19) $x' = -l \cos \chi$, $y' = l \sin \chi$, so verschwinden die mit ξ' und η' multiplizierten Ausdrücke, und das Analoge gilt hinsichtlich der Glieder mit x' und y' für $\xi' = -l \cos \chi$, $\eta' = -l \sin \chi$. Diese Koordinatenwerte beziehen sich aber auf die Punkte U und Z , die in den Ebenen S und Σ auf dem Wende- und Rückkehrkreis in bezug auf die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ symmetrisch liegen (Fig. 2). Jedem der beiden Punkte entspricht daher in der anderen Ebene die unendlich ferne Gerade.

Fragen wir nach den Punkten, die auf ihren zugeordneten Geraden liegen, setzen also in (19) $x' = \xi'$, $y' = \eta'$, so folgt

$$x'^2 + y'^2 = 0;$$

der gesuchte Ort besteht demnach aus den beiden Geraden, die den Punkt \mathfrak{P} mit den imaginären Kreispunkten \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 verbinden. — Jedem unendlich fernen Punkte entspricht in Σ eine durch Z , in S eine durch U gehende Gerade, jedem der imaginären Kreispunkte also seine Verbindungslinie mit Z bzw. U . Nun schneiden sich wegen der symmetrischen Lage der Punkte U und Z die Geraden $\mathfrak{S}_1 Z$ und $\mathfrak{S}_2 U$ und ebenso die Geraden $\mathfrak{S}_2 Z$ und $\mathfrak{S}_1 U$ auf $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ bzw. in zwei imaginären Punkten \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 . Dann ist dem Punkte \mathfrak{R}_1 in S die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{S}_1$, in Σ die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{S}_2$ zugeordnet, und das Umgekehrte gilt von \mathfrak{R}_2 . Den Punkten von $\mathfrak{P}\mathfrak{S}_1$ entsprechen also bzw. in Σ und S ihre Verbindungslinien mit \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 .

Den unendlich fernen Punkten $A_\infty, B_\infty \dots$ der Ebene S sind in Σ die Strahlen eines Büschels um Z zugeordnet, das zur Punktreihe $A_\infty B_\infty \dots$, also auch zum Strahlenbüschel $Z(A_\infty B_\infty \dots)$ projektiv ist. Die beiden Büschel haben aber die nach den imaginären Kreispunkten gehenden Strahlen entsprechend gemein, sie sind folglich gleichlaufend gleich. Nun entspricht dem unendlich fernen Punkte von $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ in Σ die Gerade $Z\mathfrak{P}$, die mit $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ den Winkel χ einschließt; denselben Winkel bildet also die dem Punkte A_∞ zugeordnete Gerade mit der Richtung A_∞ .

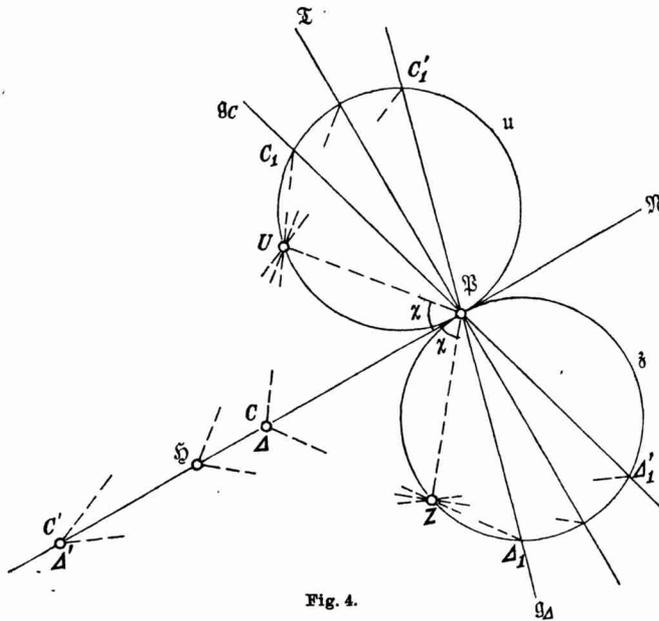


Fig. 4.

gehende Gerade. Beschreiben wir daher durch U und Z bzw. die Kreise u und z , die $\mathfrak{p}\mathfrak{N}$ in \mathfrak{P} berühren, so erhalten wir zu irgendeinem Punkte C von $\mathfrak{p}\mathfrak{N}$ die Gerade g_C , indem wir UC mit u in C_1 schneiden und C_1 mit \mathfrak{P} verbinden (Fig. 4). Weisen wir aber den Punkt C der Ebene Σ

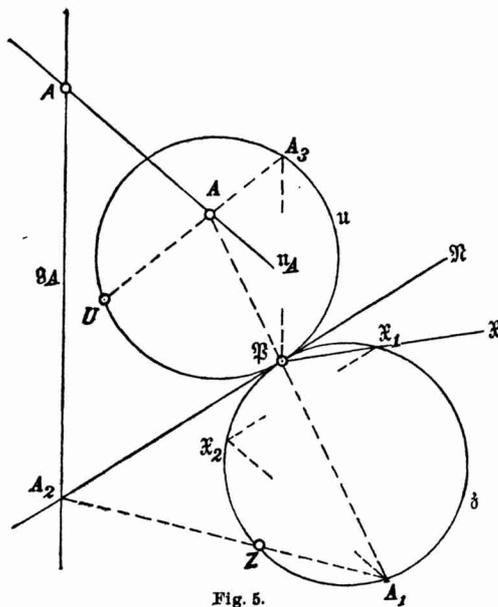


Fig. 5.

zu und bezeichnen ihn demgemäß mit Δ , so geht g_Δ durch den Schnittpunkt Δ_1 von $Z\Delta$ mit z .

Die Geraden g_C und g_Δ liegen symmetrisch in bezug auf $\mathfrak{p}\mathfrak{N}$ und schneiden z und u bzw. in Δ'_1 und C'_1 ; die Verbindungslinien UC'_1 und $Z\Delta'_1$ treffen sich daher in einem Punkte von $\mathfrak{p}\mathfrak{N}$, den wir zugleich mit C' und Δ' bezeichnen. Ihm entspricht in Σ die Gerade g_Δ und in S die Gerade g_C . Die Punkte der Geraden $\mathfrak{p}\mathfrak{N}$ sind also einander paarweise zugeordnet, so daß dem einen in Σ und S dieselben Geraden entsprechen wie dem anderen in S

Den Punkten einer durch U gehenden Geraden entsprechen in Σ parallele Geraden. Demnach ist die einem beliebigen Punkte A zugeordnete Gerade g_A parallel zu der Geraden, die dem unendlich fernen Punkte von UA entspricht; sie bildet also mit UA den Winkel χ , und zwar in demselben Sinne wie $Z\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{p}\mathfrak{N}$.

Jedem Punkte von $\mathfrak{p}\mathfrak{N}$ entspricht in der einen wie in der anderen Ebene je eine durch \mathfrak{P}

und Σ . Dem Schnittpunkte \mathfrak{S} von $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ mit dem durch \mathfrak{P} , U und Z gehenden Kreise entspricht jedoch in beiden Ebenen das Lot $\mathfrak{P}\mathfrak{Z}$ zu $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$. — Die Punktpaare C, C' bilden eine Involution mit den Doppelpunkten \mathfrak{P} und \mathfrak{S} .

9. Jetzt können wir auch zu einem beliebigen Punkte A der Ebene S die reziprok zugeordnete Gerade g_A konstruieren (Fig. 5). Wir betrachten A als Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{P}A$ und UA und

ermitteln zu beiden die entsprechenden Punkte in Σ . Trifft die Gerade $\mathfrak{P}A$ den Kreis \mathfrak{z} in A_1 , so entspricht ihr in Σ der Schnittpunkt A_2 von $Z A_1$ mit $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$, und der Geraden UA , die den Kreis u in A_3 schneidet, ist der unendlich ferne Punkt von $\mathfrak{P}A_3$ zugeordnet. Demnach geht g_A durch A_2 parallel zu $\mathfrak{P}A_3$.

Um ferner zu einem Punkte B der Ebene Σ die Gerade g_B zu bestimmen, schneide man $\mathfrak{P}B$ mit u in B_1 , UB_1 mit $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ in B_2 , ZB mit \mathfrak{z} in B_3 ; dann ist g_B die Parallele zu $\mathfrak{P}B_3$ durch B_2 (Fig. 6).

10. Bedeutet \mathfrak{D} den Mittelpunkt des dem Dreieck $\mathfrak{P}UZ$ eingeschriebenen Kreises, so ist $\angle Z\mathfrak{D}U = 90^\circ + \chi$ (Fig. 7). Drehen wir nun die Ebene S um \mathfrak{D} , bis U mit Z zusammenfällt, und bezeichnen mit A_0 die neue Lage des Punktes A , so kommt die Gerade UA , die mit g_A

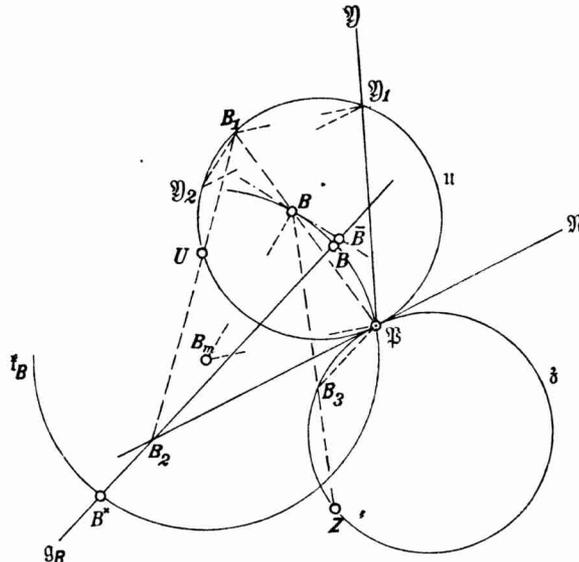


Fig. 6.

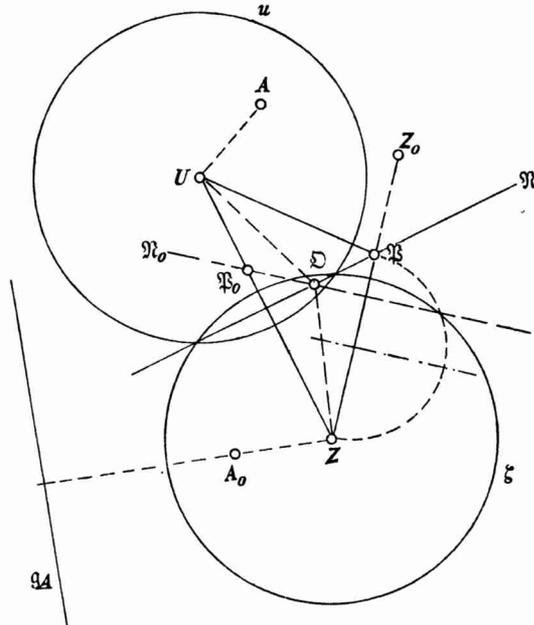


Fig. 7.

den Winkel χ bildet, nach $Z A_0$, folglich ist $g_A \perp Z A_0$. Insbesondere gelangt \mathfrak{DN} in die Lage $\mathfrak{DN}_0 \perp \mathfrak{P}Z$, und \mathfrak{P} fällt auf den Schnittpunkt \mathfrak{P}_0 von UZ mit \mathfrak{DN}_0 . Dann befinden sich die reziproken Systeme S_0 und Σ in involutorischer Lage, und zwar sind sie polar reziprok in bezug auf den Kreis ξ um Z , für welchen \mathfrak{P} und \mathfrak{DN}_0 — und ebenso \mathfrak{P}_0 und \mathfrak{DN} — einander als Pol und Polare entsprechen.

Der Kreis ξ geht durch die Schnittpunkte von \mathfrak{DN}_0 mit dem Kreis über dem Durchmesser $\mathfrak{P}Z$; das Quadrat seines Radius ist gleich $l^2 \sin \chi$. Beschreiben wir um U mit demselben Radius den Kreis u , so schneiden sich u und ξ auf $\mathfrak{P}N$ und teilen dabei die Strecke $\mathfrak{P}D$ harmonisch; wir können also u und ξ auch definieren als die Kreise um U und Z , die den Kreis über dem Durchmesser $\mathfrak{P}D$ rechtwinklig schneiden.

Wir gelangen somit zu einer zweiten Konstruktion der Geraden g_A , die dem Punkte A von S entspricht: Wir drehen die Ebene S um \mathfrak{D} , bis U nach Z kommt, und konstruieren zur neuen Lage A_0 von A die Polare in bezug auf ξ . Oder: Wir ermitteln zu A die Polare in bezug auf u und drehen dann die Ebene S wie vorhin um den Punkt \mathfrak{D} . — Um ferner zum Punkte B von Σ die entsprechende Gerade g_B zu erhalten, drehen wir die Ebene Σ um \mathfrak{D} , bis Z mit U zusammenfällt, und konstruieren zur neuen Lage von B die Polare in bezug auf u .

Beiläufig sei noch erwähnt, daß dem mit Z zusammenfallenden Punkte der Ebene S in Σ die Mittelsenkrechte von $\mathfrak{P}Z$ zugeordnet ist. Drehen wir nämlich das Dreieck $\mathfrak{D}UZ$ um \mathfrak{D} , bis U nach Z kommt, so gelangt Z nach Z_0 auf der Geraden $\mathfrak{P}Z$; als Polare von Z_0 in bezug auf ξ ergibt sich aber die Mittelsenkrechte von $\mathfrak{P}Z$; denn es ist $\frac{\mathfrak{P}Z}{2} \cdot Z_0Z = \frac{l}{2} \cdot 2l \sin \chi$, also gleich dem Quadrat des Radius von ξ .

11. Die soeben abgeleiteten Konstruktionen der Geraden g_A liefern sofort neue Lösungen der Aufgabe, zu einem Systempunkte A den Krümmungsmittelpunkt A seiner Bahnkurve zu bestimmen, wenn der Pol \mathfrak{P} , der Winkel ω , der Wendekreis w und der Rückkehrkreis ψ und damit auch die Punkte U und Z gegeben sind; denn A ergibt sich unmittelbar als Schnittpunkt von g_A mit der Bahnnormale n_A , die zur Geraden $N_w A_w$ parallel ist. Will man jedoch — bei Verwendung der in Art. 9 mitgeteilten Konstruktion von g_A — den Wendekreis überhaupt nicht benutzen, so ziehe man durch den Schnittpunkt \mathfrak{X}_1 von $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ mit dem Kreise \mathfrak{z} die Gerade $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$ parallel zu $\mathfrak{P}N$ bis \mathfrak{z} ; dann ist $\angle \mathfrak{X}_2 A_1 \mathfrak{P} = \omega$, also $n_A \parallel A_1\mathfrak{X}_2$ (Fig. 5).

Wir können jetzt aber auch umgekehrt zu einem gegebenen Krümmungsmittelpunkt B die zugehörigen Systempunkte B, B^* konstruieren, indem wir die bereits gefundene Gerade g_B mit dem Kreise \mathfrak{t}_B schneiden, der

durch \mathfrak{P} geht und in B die Bahnnormale des mit B zusammenfallenden Systempunktes berührt. Trifft $\mathfrak{P}B$ den Wendekreis in B_w oder den Rückkehrkreis in B_ψ und bedeutet \mathfrak{N}_ψ den Schnittpunkt des Rückkehrkreises mit der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$, so ist jene Bahnnormale parallel zu $\mathfrak{N}_w B_w$ und zu $\mathfrak{N}_\psi B_\psi$. Wollen wir jedoch, wie in Fig. 6, die Kreise w und ψ überhaupt nicht zeichnen, so ziehen wir durch den Schnittpunkt \mathfrak{Y}_1 der Polbahnnormale mit u die Gerade $\mathfrak{Y}_1 \mathfrak{Y}_2 \parallel \mathfrak{P}\mathfrak{N}$ bis u . Dann schneiden sich die Parallelen durch \mathfrak{P} zu $\mathfrak{Y}_1 B_1$ und durch B zu $\mathfrak{Y}_2 B_1$ im Mittelpunkte B_m von \mathfrak{f}_B ; denn es ist $\angle \mathfrak{Y}_1 B_1 \mathfrak{P} = \angle \mathfrak{P} B_1 \mathfrak{Y}_2 = 90^\circ - \omega$.

12. Der Krümmungsmittelpunkt \bar{B} der Bahnkurve, die der Punkt B in der Ebene S beschreibt, ist der Schnittpunkt ihrer Normale \bar{n}_B mit der Geraden \bar{g}_B , die dem Punkte B bei der umgekehrten Bewegung in S reziprok entspricht. Nun sind nach Art. 2 die Größen $d\vartheta$, $d\lambda$ im Fall der umgekehrten Bewegung zu ersetzen durch $-d\vartheta$, $-d\lambda$; zufolge den Gleichungen (1), (11) und (12) tritt also an Stelle von ω , χ , l bzw. $180^\circ + \omega$, $-\chi$, $-l$. Da ferner der Punkt B zum Systempunkt geworden ist, so erhalten wir aus (17) und (18) die Gleichungen von \bar{n}_B und \bar{g}_B , wenn wir überdies x mit ξ und y mit η vertauschen und darauf x und y als laufende Koordinaten betrachten. Dann verwandelt sich aber (17) in die Gleichung der Normale der Bahnkurve, die der augenblicklich mit B zusammenfallende Punkt von S in der Ebene Σ beschreibt, während Gleichung (18) überhaupt keine Änderung erleidet; d. h. die Gerade \bar{g}_B ist identisch mit der Geraden g_B , die bereits vorher dem Krümmungsmittelpunkt B in S zugeordnet war. *Die reziproke Verwandtschaft, die zwischen den Ebenen S und Σ bei der ursprünglichen Bewegung besteht, gilt also unverändert für die umgekehrte Bewegung.*

13. In Fig. 6 ergibt sich der Krümmungsmittelpunkt \bar{B} als Schnittpunkt von g_B mit der Tangente des Kreises \mathfrak{f}_B in B . Nehmen wir jetzt an, der Punkt B liege auf dem Rückkehrkreis ψ , so ist \bar{B} unendlich fern, also g_B parallel zu jener Tangente. Nun schneidet aber g_B den Kreis \mathfrak{f}_B in den Punkten B und B^* , die B zum Krümmungsmittelpunkt haben; gegenwärtig ist also $BB = B^*B$. D. h.: *Der Rückkehrkreis ist der Ort aller Krümmungsmittelpunkte, denen je zwei Systempunkte mit zusammenfallenden Krümmungskreisen entsprechen.*

Aber nicht jedem Punkte von ψ ist in S ein reelles Punktpaar zugeordnet¹⁾; z. B. dem Punkte Z entsprechen in S die imaginären Kreispunkte \mathfrak{S}_1 , \mathfrak{S}_2 als Schnittpunkte der unendlich fernen Geraden g_Z mit dem Kreise \mathfrak{f}_Z .

1) Näheres in Art. 35.

$= 90^\circ$; die Gerade $\mathfrak{P}Z_m$ steht daher senkrecht auf $\mathfrak{P}\mathfrak{U}$, und der Kreis \mathfrak{k}_Z berührt $\mathfrak{P}\mathfrak{U}$ in \mathfrak{P} .

Schneidet ferner die auf $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ senkrechte Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ den Rückkehrkreis in \mathfrak{X}_ψ , so ist $\angle \mathfrak{P}Z\mathfrak{X}_\psi = \angle \mathfrak{X}\mathfrak{P}\mathfrak{X}_\psi = 90^\circ - \omega$, d. h. der Punkt Z_m liegt auf $Z\mathfrak{X}_\psi$.

Dem Mittelpunkt \mathfrak{M}_ψ des Rückkehrkreises entsprechen in S die Punkte \mathfrak{X}_ψ und Z_m . Beweis: Nach der Bemerkung am Schluß des Art. 10 ist dem Punkte Z , wenn er dem System S zugewiesen wird, die Mittelsenkrechte von $\mathfrak{P}Z$, d. h. die Gerade $\mathfrak{M}_\psi Z_m$ reziprok zugeordnet. Dem Punkte \mathfrak{M}_ψ der Ebene Σ entspricht daher eine Gerade g , die durch Z geht und mit $Z\mathfrak{M}_\psi$ — in demselben Sinne wie $U\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ — den Winkel χ bildet, d. h. $Z\mathfrak{X}_\psi$. Ferner ist $\angle \mathfrak{M}_\psi \mathfrak{X}_\psi \mathfrak{P} = \angle \mathfrak{X}_\psi \mathfrak{P} \mathfrak{M}_\psi = \omega$, und ebenso groß ist $\angle \mathfrak{M}_\psi Z_m \mathfrak{P}$ als Hälfte des Winkels an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks $\mathfrak{P}ZZ_m$; die Bahnnormalen der Systempunkte \mathfrak{X}_ψ und Z_m gehen also durch \mathfrak{M}_ψ .

Hiernach ist ψ der Krümmungskreis der Bahnkurve von \mathfrak{X}_ψ . Soll überhaupt einem Systempunkt $A(r, \varphi)$ ein Krümmungskreis entsprechen, der durch \mathfrak{P} geht, so müssen die Dreiecke $\mathfrak{P}AA$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{X}_\psi \mathfrak{M}_\psi$ gleichsinnig ähnlich sein, es ist also nach der anfangs festgesetzten Vorzeichenregel der Krümmungsradius

$$r = -\frac{r}{2 \cos \omega}.$$

Durch Einsetzung dieses Wertes in Gleichung (13) ergibt sich

$$r \sin(\chi + \omega) + l \sin \varphi = 0,$$

d. h. die Gleichung von ψ . Der Rückkehrkreis ist also der Ort aller Systempunkte, deren Krümmungskreise durch den Pol gehen.¹⁾

14. Jedem Punkte des Wendekreises w entspricht in Σ der unendlich ferne Punkt seiner Verbindungslinie mit \mathfrak{N}_w . Einem unendlich fernen Punkte A_∞ ist in Σ ein unendlich ferner Punkt A_∞ zugeordnet, dessen Richtung mit der Richtung von A_∞ den Winkel χ bildet, und zwar in demselben Sinne wie $Z\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ (Art. 8). Man erhält also die Richtung von A_∞ , indem man den Schnittpunkt von UA_∞ und w mit \mathfrak{N}_w verbindet.

Dem Punkte A_∞ entspricht in S außer A_∞ noch der Schnittpunkt von $\mathfrak{N}_w A_\infty$ mit w .

15. Die zu Anfang abgeleiteten Formeln erstrecken sich nicht auf die Krümmung der Bahnkurve, die der Pol \mathfrak{P} als Systempunkt betrachtet beschreibt, diese Kurve erfordert vielmehr eine besondere Untersuchung unter Hinzunahme einer vierten Phase S''' .²⁾ Da für $x = y = 0$ die

1) Grouard a. a. O. S. 124.

2) Vgl. Art. 42.

durch Gleichung (17) dargestellte Gerade n unbestimmt wird, so entspricht dem Systempunkte \mathfrak{P} in Σ jeder Punkt der Geraden $g_{\mathfrak{P}}$, d. h. von $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$, aber selbstverständlich nicht als Krümmungsmittelpunkt, sondern nur als Mittelpunkt eines Kreises durch die zusammenfallenden Lagen \mathfrak{P} und \mathfrak{P}' und die folgende Lage \mathfrak{P}'' . Wird aber \mathfrak{P} der Ebene Σ zugewiesen, so ergibt sich in S als Schnitt von $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ mit dem Nullkreis $\mathfrak{f}_{\mathfrak{P}}$ nur wieder derselbe Punkt \mathfrak{P} .

Jedem beliebigen Punkt A der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ ist in S einerseits der Punkt \mathfrak{P} zugeordnet, doch immer nur in der eben erwähnten Bedeutung, d. h. als Schnittpunkt einer durch \mathfrak{P} gehenden Geraden g_A mit dem zugehörigen Kreise \mathfrak{f}_A . Aber dem Punkte \mathfrak{N}_w der Ebene Σ entspricht zweimal der Punkt \mathfrak{P} . Dann fällt nämlich \mathfrak{f} mit w und g mit $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ zusammen; denn es ist $U\mathfrak{N}_w \# \mathfrak{P}\mathfrak{Z}$, also $Z\mathfrak{N}_w \# \mathfrak{P}\mathfrak{U}$ und folglich $L(Z\mathfrak{N}_w, \mathfrak{P}\mathfrak{X}) = \chi$.

Nach Art. 8 ist dem Schnittpunkte \mathfrak{H} der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ mit dem Kreise $U\mathfrak{P}\mathfrak{Z}$ in Σ wohl wie in S die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ reziprok zugeordnet. Legen wir durch \mathfrak{P} und \mathfrak{H} die Kreise k und x , die bzw. $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{Y}$ berühren, und verstehen unter \mathfrak{H}_1 und \mathfrak{H}_2 ihre Schnittpunkte mit $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$, so ist $L\mathfrak{H}\mathfrak{H}_1\mathfrak{P} = L\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}\mathfrak{P} = \omega$; dem Punkte \mathfrak{H} entspricht also in S der Punkt \mathfrak{H}_1 und in Σ der Punkt \mathfrak{H}_2 .

16. Zu einem Krümmungsmittelpunkte $A(\xi\eta)$ gehören in S zwei zusammenfallende Punkte A und A^* , wenn die Gerade g_A den Kreis \mathfrak{f}_A berührt. Bilden wir die Bedingung dafür, daß der Mittelpunkt des Kreises \mathfrak{f}_A

$$(x^2 + y^2) \sin \omega - (\xi \sin \omega - \eta \cos \omega)x - (\xi \cos \omega + \eta \sin \omega)y = 0$$

von der Geraden g_A

$$\begin{aligned} &(\xi \sin \chi - \eta \cos \chi - l \sin \omega)x + (\xi \cos \chi + \eta \sin \chi - l \cos \omega)y \\ &+ l(\xi \sin \omega - \eta \cos \omega) = 0 \end{aligned}$$

eine Entfernung hat, deren Quadrat dem Quadrat des Radius gleich ist, so folgt

$$\begin{aligned} &\{(\xi \sin \chi - \eta \cos \chi - l \sin \omega)(\xi \sin \omega - \eta \cos \omega) + (\xi \cos \chi + \eta \sin \chi - l \cos \omega) \cdot \\ &\quad \cdot (\xi \sin \omega - \eta \cos \omega) + 2l \sin \omega (\xi \sin \omega - \eta \cos \omega)\}^2 \\ &= (\xi^2 + \eta^2) \{(\xi \sin \chi - \eta \cos \chi - l \sin \omega)^2 + (\xi \cos \chi + \eta \sin \chi - l \cos \omega)^2\}, \end{aligned}$$

mithin

$$(20) \quad \begin{aligned} &\{(\xi^2 + \eta^2) \cos(\chi - \omega) + l\xi\}^2 \\ &- (\xi^2 + \eta^2) \{\xi^2 + \eta^2 + 2l\xi \cos(\chi + \omega) + 2l\eta \sin(\chi + \omega) + l^2\} = 0 \end{aligned}$$

oder

$$(21) \quad \begin{aligned} &(\xi^2 + \eta^2)^2 \sin^2(\chi - \omega) \\ &+ 2l(\xi^2 + \eta^2) \{-2\xi \sin \chi \sin \omega + \eta \sin(\chi + \omega)\} + l^2 \eta^2 = 0 \end{aligned}$$

als Gleichung einer *Kurve vierter Ordnung* σ , deren Punkten vereinigte Paare entsprechen; wir nennen sie *die Übergangskurve der Ebene* Σ . Sie teilt Σ in zwei Gebiete Σ_1 und Σ_2 , so daß zu jedem Punkte von Σ_1 zwei reelle, zu jedem Punkte von Σ_2 zwei konjugiert imaginäre Punkte der Ebene S gehören. Die Krümmungsmittelpunkte aller Bahnstellen, die von den Punkten der Ebene S momentan durchlaufen werden, erfüllen also das Gebiet Σ_1 , das sie doppelt überdecken.¹⁾

17. Wird jedem Systempunkte A der zu demselben Krümmungsmittelpunkt A gehörende Systempunkt A^* als entsprechend zugewiesen, so entstehen *zwei involutorisch verwandte Systeme* S und S^* . Bezeichnen wir die Koordinaten der Punkte A , A^* und A bzw. mit xy , x^*y^* und $\xi\eta$, so ist nach (15), (16) und (13)

$$(22) \quad \xi = - \frac{(x^2 + y^2)(x \cos \chi - y \sin \chi) \sin \omega + lxy}{(x^2 + y^2) \sin(\chi - \omega) - ly}$$

und

$$(23) \quad \eta = - \frac{(x^2 + y^2)(x \sin \chi + y \cos \chi) \sin \omega + ly^2}{(x^2 + y^2) \sin(\chi - \omega) - ly},$$

und wir erhalten x^* und y^* , wenn wir in den Gleichungen (17) des Kreises \mathfrak{f}_A und (18) der Geraden \mathfrak{g}_A x , y durch x^* , y^* und ξ , η durch die eben gefundenen Werte ersetzen. Schreiben wir noch für x^* und y^* bzw. $\xi + x$ und $\eta + y$, so geht nach einfacher Rechnung die Gleichung von \mathfrak{f}_A über in

$$\begin{aligned} & \{(x^2 + y^2) \sin(\chi - \omega) - ly\} (\xi^2 + \eta^2) \sin \omega \\ & + \{(x^2 + y^2)[x \sin(\chi - \omega) - y \cos(\chi - \omega)] \sin \omega - ly(x \sin \omega + y \cos \omega)\} \xi \\ & + \{(x^2 + y^2)[x \cos(\chi - \omega) + y \sin(\chi - \omega)] \sin \omega + ly(x \cos \omega - y \sin \omega)\} \eta = 0, \end{aligned}$$

und die Gleichung von \mathfrak{g}_A lautet

$$\begin{aligned} & \{(x^2 + y^2)y \sin \omega - ly(x \sin \chi - y \cos \chi) \\ & \quad - l(x^2 + y^2) \sin \omega \sin(\chi - \omega) + l^2y \sin \omega\} \xi \\ & - \{(x^2 + y^2)x \sin \omega + ly(x \cos \chi + y \sin \chi) \\ & \quad - l(x^2 + y^2) \cos \omega \sin(\chi - \omega) + l^2y \cos \omega\} \eta = 0. \end{aligned}$$

Der Punkt A^* fällt mit A zusammen, wenn der Kreis \mathfrak{f}_A die Gerade \mathfrak{g}_A berührt, wenn also die Faktoren von ξ und η in beiden Gleichungen einander proportional sind. Daraus ergibt sich schließlich als *Ort der Punkte A , die mit ihren zugeordneten Punkten A^* zusammenfallen, eine Kurve sechster Ordnung s mit der Gleichung*

$$(24) \quad \begin{aligned} & (x^2 + y^2)^3 \sin^2 \omega \sin(\chi - \omega) \\ & - l(x^2 + y^2)^2 \{x \sin \chi \sin(\chi - \omega) + y[2 \sin \omega - \cos \chi \sin(\chi - \omega)]\} \sin \omega \\ & + l^2y(x^2 + y^2)(x \sin \chi - 3y \cos \chi) \sin \omega - l^3y^3 = 0. \end{aligned}$$

1) Weiteres über die Kurve σ Art. 35.

II. Die Verwandtschaft zwischen den Systempunkten und den zugehörigen Krümmungsmittelpunkten.

18. Die Gleichungen (17) und (18) und die daraus abgeleiteten Konstruktionen definieren nach Art. 7 *eine ein-zweideutige Verwandtschaft zwischen den Ebenen S und Σ* : Jedem Punkte von S entspricht ein Punkt von Σ und jedem Punkte von Σ ein Punktepaar in S .

Eine Ausnahme machen aber außer dem Punkte \mathfrak{P} (Art. 15) noch die imaginären Kreispunkte \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 . Da nämlich \mathfrak{S}_1 als Systempunkt betrachtet fest bleibt, so wird n unbestimmt, und es entspricht ihm jeder Punkt von $g = Z\mathfrak{S}_1$ (Art. 8). Rechnen wir \mathfrak{S}_1 jedoch zu Σ , so zerfällt der zugehörige Kreis \mathfrak{k} in $\mathfrak{P}\mathfrak{S}_1$ und die unendlich ferne Gerade, dann entspricht also \mathfrak{S}_1 sich selbst als einziger Schnittpunkt von \mathfrak{k} mit $g = U\mathfrak{S}_1$. Daraus folgt: *Jedem der Punkte \mathfrak{P} , \mathfrak{S}_1 , \mathfrak{S}_2 der Ebene S ist in Σ nicht wieder ein Punkt, sondern eine Gerade zugeordnet, nämlich dem Punkte \mathfrak{P} die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{R}$ und jedem der imaginären Kreispunkte seine Verbindungslinie mit Z . Werden diese Ausnahmepunkte aber der Ebene Σ zugewiesen, so entspricht jedem von ihnen kein anderer Punkt außer ihm selbst.*

Jeder Punkt der imaginären Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{S}_2$ entspricht zu S gerechnet sich selbst, weil die zugehörige Gerade g durch ihn hindurchgeht. Rechnen wir ihn jedoch zu Σ , so ist ihm in S noch ein zweiter Punkt zugeordnet.

19. *Die Geraden der Ebene S .* Sei d eine Gerade von S , von der wir zunächst voraussetzen, daß sie nicht durch \mathfrak{P} geht. Dann gibt es in Σ einen Punkt Δ , dessen reziprok zugeordnete Gerade g_Δ mit d zusammenfällt; ihm entspricht auf d ein reelles oder konjugiert imaginäres Punktepaar D, D^* . Konstruiert man zu den Punkten $A, B \dots$ von d die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte $A, B \dots$ mittels der Normalen $n_A, n_B \dots$ und der Geraden $g_A, g_B \dots$, so bilden diese ein Strahlenbüschel um Δ , jene das dazu projektive Tangentenbüschel einer Parabel; beide erzeugen also als Ort der Punkte $A, B \dots$ *eine Kurve dritter Ordnung δ mit dem Doppelpunkt Δ* , und zwar ist Δ ein Knotenpunkt oder ein isolierter Punkt der Kurve, je nachdem er sich im Gebiet Σ_1 oder Σ_2 befindet. Den sechs Schnittpunkten von d mit der Kurve s (Art. 17) entsprechen sechs Berührungspunkte von δ mit der Übergangskurve σ .

Liegt aber Δ auf σ , gehört also d zu den Geraden, die den Punkten von σ reziprok zugeordnet sind, so hat die Kurve δ in Δ einen Rückkehrpunkt. Dann entspricht jeder Geraden von S , die den zugehörigen Punkt D der Kurve s enthält, eine Kurve dritter Ordnung

die σ in Δ berührt, mit einem Doppelpunkt auf der durch Δ gehenden Geraden g_D . Für die Kurve δ fällt dieser Doppelpunkt mit Δ zusammen und wird, wie bereits erwähnt, zum Rückkehrpunkt, mithin ist g_D die zugehörige Tangente.

20. Geht d durch den Punkt \mathfrak{B} , so entspricht diesem allein bereits die Gerade $\mathfrak{B}\mathfrak{N}$, die Kurve δ verwandelt sich also in eine Hyperbel, deren unendlich ferne Punkte dem Schnittpunkt F von d mit w und dem unendlich fernen Punkte von d entsprechen (Fig. 9). Jetzt sind

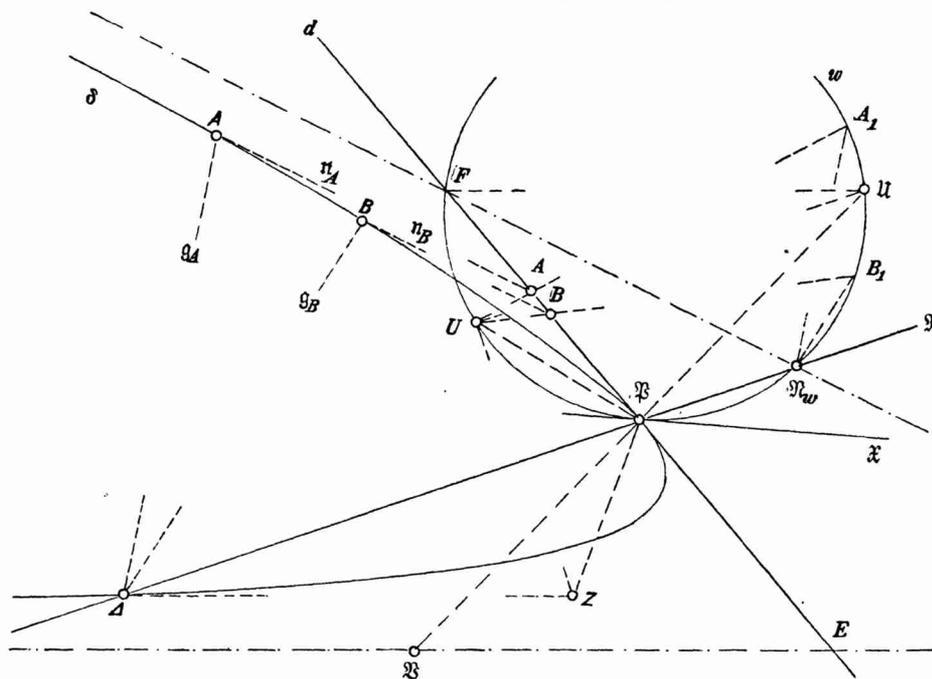


Fig. 9.

die Bahnnormalen $n_A, n_B \dots$ der Punkte $A, B \dots$ von d parallel zu $\mathfrak{N}_w F$, und der vorher mit Δ bezeichnete Punkt liegt auf $\mathfrak{B}\mathfrak{N}$. Ziehen wir wie früher $U\mathfrak{U} \parallel \mathfrak{B}\mathfrak{N}$ bis w , so ist $\angle U\mathfrak{U}F = \chi$, mithin $Z\Delta \parallel U\mathfrak{U}$ (Art. 8). Bedeutet ferner A_1 den Schnittpunkt von w mit UA , so ist auch $\angle \mathfrak{N}_w A_1 U = \chi$; die Gerade g_A geht demnach durch Δ parallel zu $\mathfrak{N}_w A_1$. — Die Gerade $\mathfrak{N}_w F$ ist die Bahnnormale von F , folglich eine Asymptote von δ . Unter den durch Δ gehenden Strahlen $g_A, g_B \dots$ gehört ΔZ zum unendlich fernen Punkte von d , ist also parallel zur zweiten Asymptote.

Die Hyperbel δ berührt die Gerade d in \mathfrak{B} ; denn jedem andern Punkte von d entspricht ein Krümmungsmittelpunkt, der außerhalb d liegt. Machen wir daher auf d die Strecke $\mathfrak{B}E = F\mathfrak{B}$, so geht die

zweite Asymptote durch E , und da sie zu $F\mathfrak{U}$ parallel ist, so schneidet sie $\mathfrak{B}\mathfrak{U}$ in einem festen Punkte \mathfrak{B} , der sich ergibt, wenn wir $\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ um sich selbst über \mathfrak{B} hinaus verlängern.

Von den Asymptoten aller Hyperbeln, die den Strahlen des Büschels um \mathfrak{B} in der Ebene Σ entsprechen, geht also immer die eine durch \mathfrak{N}_w , die andere durch \mathfrak{B} , und da beide den konstanten Winkel $\chi - \omega$ bilden, so schneiden sie sich auf dem Kreise durch \mathfrak{B} , \mathfrak{N}_w und \mathfrak{B} . Die Hyperbeln sind also einander ähnlich und haben den Punkt \mathfrak{B} entsprechend gemein, demnach liegen auch ihre Scheitel und ihre Brennpunkte auf Kreisen durch \mathfrak{B} .

Die Hyperbel, die der Geraden $\mathfrak{B}\mathfrak{X}$ entspricht, zerfällt in die Geraden $\mathfrak{B}\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{U}$. *Der Polbahntangente $\mathfrak{B}\mathfrak{X}$ entspricht also in Σ die Gerade $\mathfrak{B}\mathfrak{U}$ — und außerdem, für den Punkt \mathfrak{B} , die doppelt zählende Gerade $\mathfrak{B}\mathfrak{N}$.*

21. *Die Geraden der Ebene Σ .* Wir bezeichnen mit ε irgendeine, nicht durch \mathfrak{B} gehende Gerade von Σ , mit E den ihr in S reziprok zugeordneten Punkt. Konstruieren wir zu den Punkten $A, B \dots$ von ε die entsprechenden Paare $AA^*, BB^* \dots$ mittels der Geraden $g_A, g_B \dots$ und der Kreise $k_A, k_B \dots$, so bilden $g_A, g_B \dots$ ein Strahlenbüschel um E und die Kreismittelpunkte $A_m, B_m \dots$ eine zu $A, B \dots$ ähnliche Punktreihe, die Kreise $k_A, k_B \dots$ also ein Büschel, dessen einer Grundpunkt \mathfrak{B} ist. Beide Büschel sind projektiv und erzeugen demnach als Ort der Punkte $AA^*, BB^* \dots$ eine zirkuläre Kurve dritter Ordnung e , die durch E und \mathfrak{B} geht, und zwar entsprechen die imaginären Kreispunkte \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 und der Punkt \mathfrak{B} der Kurve e bzw. den Schnittpunkten von ε mit den Geraden $Z\mathfrak{S}_1, Z\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{N}$. Dem unendlich fernen Punkt von ε ist in S einerseits ein Punkt auf dem Wendekreis w zugeordnet. Da nun w mit e im übrigen nur noch die Punkte $\mathfrak{B}, \mathfrak{S}_1$ und \mathfrak{S}_2 gemein haben kann, so muß entweder \mathfrak{B} für drei, oder jeder der imaginären Kreispunkte für zwei Schnittpunkte zählen. Das letzte ist aber unmöglich; denn lassen wir ε mit der Geraden $\mathfrak{B}\mathfrak{U}$ zusammenfallen, so entspricht ihr nach dem Vorigen in S einerseits die Gerade $\mathfrak{B}\mathfrak{X}$, die mit w den Punkt \mathfrak{B} bereits doppelt zählend gemein hat, während dem unendlich fernen Punkt von $\mathfrak{B}\mathfrak{U}$ außer dem unendlich fernen von $\mathfrak{B}\mathfrak{X}$ auch noch ein Punkt von w — auf der Parallelen durch \mathfrak{N}_w zu $\mathfrak{B}\mathfrak{U}$ — zugeordnet ist. *Die Kurve e hat daher in \mathfrak{B} drei zusammenfallende Punkte mit dem Wendekreis gemein, dieser oskuliert also im allgemeinen die Kurve im Punkte \mathfrak{B} .*

Bezeichnen wir mit ε' eine Gerade, die den Punkt Z enthält, so entsprechen diesem als Schnitt der unendlich fernen Geraden g_Z mit

dem Kreise \mathfrak{k}_Z die Punkte \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 ; die zugehörige Kurve c' berührt also in den imaginären Kreispunkten den Kreis \mathfrak{k}_Z und folglich auch die Geraden $Z_m\mathfrak{S}_1$ und $Z_m\mathfrak{S}_2$. Ist nun ε eine beliebige, nicht durch Z gehende Gerade, so haben die Kurven e und e' nur die Punkte \mathfrak{P} , \mathfrak{S}_1 , \mathfrak{S}_2 , sowie das dem Schnittpunkt von ε und ε' zugeordnete Paar miteinander gemein; dabei zählt \mathfrak{P} für drei, aber jedenfalls auch nicht mehr Schnittpunkte, wie man sofort erkennt, wenn man ε' durch die unendlich ferne Gerade ersetzt. Die Kurven e und e' berühren sich also in \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 , d. h. *der Punkt Z_m ist das gemeinschaftliche Fokalzenträum aller Kurven dritter Ordnung, die den Geraden von Σ entsprechen.*

22. Schneidet die Gerade ε die Übergangskurve σ in Δ , so berührt die Kurve e die Gerade g_Δ im entsprechenden Punkte D der Kurve s . Der Geraden g_Δ der Ebene S entspricht in Σ eine Kurve dritter Ordnung δ , die Δ zum Rückkehrpunkt hat mit der Tangente g_D (Art. 19 Schluß). Von Δ abgesehen hat ε mit δ noch einen Punkt A gemein, und diesem entspricht in S der Schnittpunkt A der Kurve e mit ihrer Tangente g_Δ . Ersetzen wir nun die beliebige Gerade ε durch g_D , so fällt A mit Δ , also für die entsprechende Kurve in S der Punkt A mit D zusammen. *Jeder Geraden g_D von Σ , die einem Punkte D der Kurve s reziprok zugeordnet ist, entspricht demnach in S eine Kurve, die in D einen Wendepunkt hat mit g_Δ als Wendetangente.*

Dem Strahlenbüschel um Δ entspricht ein ihm projektives Büschel von Kurven dritter Ordnung, die in D die Gerade g_Δ berühren. Die Krümmungsmittelpunkte dieser Kurven im Punkte D bilden daher eine Punktreihe, die dem Strahlenbüschel projektiv ist. — Eine Ausnahme macht jedoch die Tangente τ der Kurve σ in Δ . Ist nämlich ε eine beliebige durch Δ gehende Gerade, so entspricht von den beiden Punkten, die auf ε dem Punkte Δ beiderseits benachbart sind, dem einen in S ein reelles, dem andern ein imaginäres Punktpaar, dagegen sind für die Gerade τ — wenn nicht Δ ein Wendepunkt von σ ist — die betreffenden Paare gleichzeitig reell oder imaginär. *Der Tangente τ von σ entspricht also in S eine Kurve dritter Ordnung t , die in D einen Doppelpunkt hat, ohne g_Δ zu berühren.* Ist aber Δ ein Wendepunkt von σ , so hat die Kurve t in D einen Rückkehrpunkt und berührt an dieser Stelle die Kurve s .

Aus Art. 21 folgt weiter:

a) Allen durch Z gehenden Geraden entsprechen in S Kurven dritter Ordnung, die in \mathfrak{P} und in jedem der imaginären Kreispunkte drei zusammenfallende Punkte miteinander gemein haben.

b) Den durch den Mittelpunkt \mathfrak{M}_ψ des Rückkehrkreises gehenden Geraden entspricht in S ein Büschel von Fokalkurven dritter Ordnung — denn dem Punkte \mathfrak{M}_ψ ist nach Art. 13 einerseits der Punkt Z_m zugeordnet; wir erhalten also zirkulare Kurven dritter Ordnung, die durch ihr Fokalzentrum gehen.

c) Der Geraden $\mathfrak{B}\mathfrak{U}$ entspricht in S einerseits die Gerade $\mathfrak{B}\mathfrak{X}$, andererseits der Kreis \mathfrak{I}_Z . Zu einem Punkte A von $\mathfrak{B}\mathfrak{U}$ gehören als A und A^* die Schnittpunkte von $\mathfrak{B}\mathfrak{X}$ mit der Parallelen durch A zu $\mathfrak{B}\mathfrak{N}$ und von \mathfrak{I}_Z mit der Geraden AZ .

23. Geht die Gerade ε durch \mathfrak{B} , so hat die entsprechende Kurve e in \mathfrak{B} einen Doppelpunkt mit den Tangenten ε und $\mathfrak{B}\mathfrak{X}$. Da nämlich der mit ε zusammenfallenden Geraden der Ebene S eine Hyperbel entspricht, die ε in \mathfrak{B} berührt, so müssen sich auch ε und e in demselben Punkte berühren. Der Wendekreis schneidet ferner die Kurve e in dem Punkte, der dem unendlich fernen von ε zugeordnet ist, hat also mit ihr in \mathfrak{B} drei zusammenfallende Punkte gemein, d. h. er berührt sie an dieser Stelle, ohne sie zu oskulieren — wenn nicht etwa ε mit $\mathfrak{B}\mathfrak{N}$ zusammenfällt. Denn dem unendlich fernen Punkte von $\mathfrak{B}\mathfrak{N}$ ist auf w der Punkt \mathfrak{B} zugeordnet; der Geraden $\mathfrak{B}\mathfrak{N}$ entspricht also in S eine zirkulare Kurve dritter Ordnung, die in ihrem Doppelpunkt \mathfrak{B} einerseits von $\mathfrak{B}\mathfrak{N}$ berührt, andererseits von w oskuliert wird.

Die der Geraden $\mathfrak{B}\mathfrak{X}$ zugeordnete Kurve hat in \mathfrak{B} einen Rückkehrpunkt mit der Tangente $\mathfrak{B}\mathfrak{X}$, und der Geraden $\mathfrak{B}\mathfrak{Y}$ entspricht eine Fokalkurve mit einem Doppelpunkt in \mathfrak{B} und den Tangenten $\mathfrak{B}\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{X}$.¹⁾

Definieren wir die Gerade ε durch die Gleichung

$$\xi \cos \theta + \eta \sin \theta = 0,$$

bezeichnen also mit θ den Winkel, den die Normale zu ε mit $\mathfrak{B}\mathfrak{X}$ bildet, so erhalten wir aus den Gleichungen (22) und (23) als Gleichung der Kurve e

$$(x^2 + y^2) \{ x \cos(\chi - \theta) - y \sin(\chi - \theta) \} \sin \omega + ly(x \cos \theta + y \sin \theta) = 0.$$

Dann sind, wie man leicht erkennt,

$$x^2 + y^2 - \frac{l \cos \theta}{\sin \chi \sin \omega} (x \cos \theta + y \sin \theta) = 0$$

und

$$x^2 + y^2 + \frac{l \cos \theta}{\sin \omega \cos(\chi - \theta)} y = 0$$

die Gleichungen der Krümmungskreise von e , die in \mathfrak{B} bzw. die Ge-

1) Vgl. Art. 22, b.

raden ε und $\mathfrak{B}\mathfrak{X}$ berühren. Werden ihre Mittelpunkte mit \mathfrak{E} und \mathfrak{E}' bezeichnet, so folgt

$$(25) \quad \mathfrak{B}\mathfrak{E} = \frac{l \cos \theta}{2 \sin \chi \sin \omega}$$

und

$$(26) \quad \mathfrak{B}\mathfrak{E}' = -\frac{l \cos \theta}{2 \sin \omega \cos(\chi - \theta)}$$

Nun ist nach Art. 13

$$\mathfrak{B}Z_m = \frac{l}{2 \sin \omega}$$

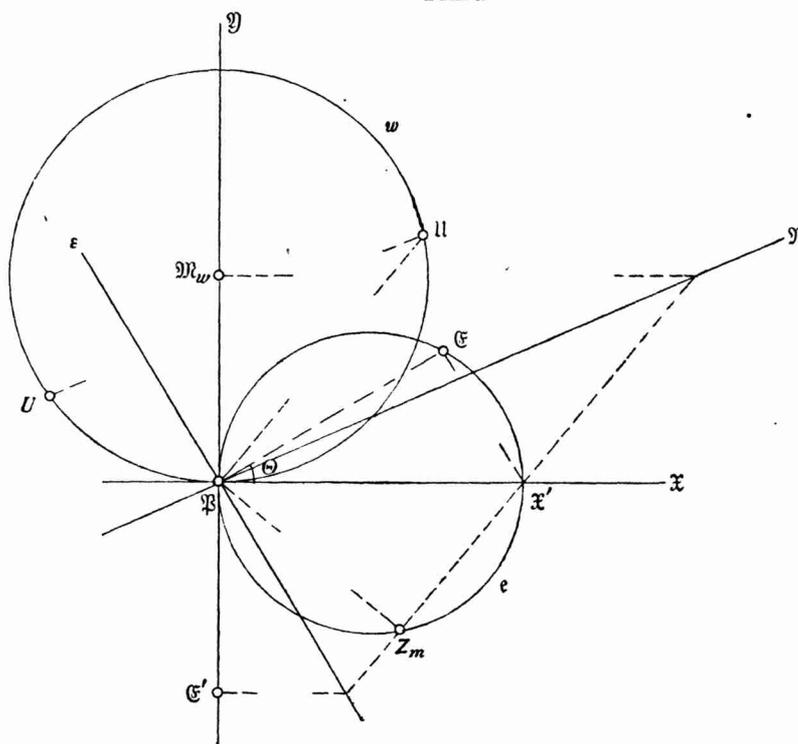


Fig. 10.

und $\angle X B Z_m = 90^\circ - \chi$. Ziehen wir daher in Fig. 10 die Gerade $Z_m X$ parallel zu $B U$ bis $B X$, so wird

$$\mathfrak{B}X' = \frac{l}{2 \sin \chi \sin \omega},$$

folglich ist \mathfrak{E} der Fußpunkt des Lotes von \mathfrak{B} auf die durch X' zu ε gezogene Parallele. Für jede durch \mathfrak{B} gehende Gerade ε liegt also der Krümmungspunkt \mathfrak{E} der entsprechenden Kurve e auf dem durch \mathfrak{B} und Z_m gelegten Kreise e , der $\mathfrak{B}\mathfrak{Y}$ in \mathfrak{B} berührt.

Nach Gleichung (26) erhalten wir ferner den Krümmungsmittelpunkt \mathfrak{E}' , indem wir aus dem Schnittpunkt von $Z_m X'$ mit ε ein Lot auf $\mathfrak{B}\mathfrak{Y}$

fällen. — Ersetzen wir die Gerade ε durch $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$, so fällt \mathfrak{C}' mit dem Mittelpunkt \mathfrak{M}_w des Wendekreises zusammen; die Gerade $Z_m\mathfrak{X}'$ geht folglich durch den Schnittpunkt von $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ mit der Parallelen durch \mathfrak{M}_w zu $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$.

24. Den Geraden ε , die in der Ebene Σ durch denselben Punkt von $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$, aber nicht durch \mathfrak{P} gehen, entspricht in S ein Büschel von Kurven e , die in \mathfrak{P} vier aufeinanderfolgende Punkte miteinander gemein haben; ihre Evoluten oskulieren also einander im Punkte \mathfrak{M}_w . Das gilt jedoch nicht von der Kurve, die der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ entspricht; denn diese hat in ihrem Doppelpunkte \mathfrak{P} mit den übrigen Kurven des Büschels zwar vier zusammenfallende, aber nur drei aufeinanderfolgende Punkte gemein. — Ziehen wir die Geraden ε durch den Schnittpunkt \mathfrak{N}_w von $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ mit w , so zählt \mathfrak{P} für fünf gemeinsame Punkte der entsprechenden Kurven e ; die zugehörigen Evoluten haben daher in \mathfrak{M}_w eine vierpunktige Berührung und oskulieren dabei die Evolute der Kurve, die der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ zugeordnet ist. — Den Parallelen zu $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ entspricht in S ein Büschel von Kurven dritter Ordnung, die in \mathfrak{P} mit dem Wendekreis vier aufeinanderfolgende Punkte gemein haben.

25. *Die Kurven der Ebene S.* Wir bezeichnen mit a eine Kurve n ter Ordnung von S , die weder die imaginären Kreispunkte, noch den Punkt \mathfrak{P} enthält, mit α die entsprechende Kurve von Σ . Ziehen wir in Σ irgendeine Gerade ε , so wird die zugeordnete Kurve e von a in $3n$ Punkten geschnitten, und diesen entsprechen auf ε ebensoviele Punkte von α . *Die Kurve α ist also von der Ordnung $3n$.*

Geht aber a durch \mathfrak{P} , so entspricht diesem Punkte allein bereits die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$. Dann hat die Kurve a mit jeder Kurve e , die einer beliebigen Geraden ε zugeordnet ist, in \mathfrak{P} entweder einen Punkt oder zwei oder drei zusammenfallende Punkte gemein, je nachdem sie den Wendekreis schneidet oder berührt oder oskuliert. Dabei entspricht dem Punkte \mathfrak{P} von e der jeweilige Schnittpunkt von ε mit $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$, also im allgemeinen kein Schnittpunkt von α mit ε ; die Kurve α trifft folglich jede Gerade ε bzw. nur in $3n - 1$, $3n - 2$ oder $3n - 3$ Punkten. *Jeder Durchgang der Kurve a durch \mathfrak{P} vermindert also die Ordnung der entsprechenden Kurve α um eins, zwei oder drei, je nachdem a mit dem Wendekreis in \mathfrak{P} einen Punkt oder zwei oder drei zusammenfallende Punkte gemein hat.* Eine weitere Verminderung jener Ordnungszahl vermag der einmalige Durchgang durch \mathfrak{P} aber nicht zu bewirken, weil a nicht zugleich alle Kurven e mehr als dreipunktig berühren kann.

26. Geht nun die Kurve a durch \mathfrak{P} , ohne w zu oskulieren, so berührt sie an dieser Stelle diejenige Kurve e , die der Tangente von a im Punkte \mathfrak{P} entspricht, und schneidet sie außerdem, da e in \mathfrak{P} einen

Doppelpunkt hat, noch in $3n - 3$ Punkten. Die Kurve $3n - 1$ ter Ordnung α trifft jene Tangente in den zugeordneten Punkten und berührt sie demnach überdies in \mathfrak{P} . Wenn also die Kurve a in \mathfrak{P} den Wendekreis schneidet, so wird sie von der entsprechenden Kurve α in demselben Punkte berührt.

Wir untersuchen noch die Beziehung zwischen den Krümmungsmittelpunkten \mathfrak{C} und \mathfrak{C}_1 der Kurven a und α im Punkte \mathfrak{P} . Zu dem Zwecke bestimmen wir für den zugehörigen Krümmungskreis c der Kurve a die entsprechende Kurve γ in Σ ; ihr Krümmungsmittelpunkt an der Stelle \mathfrak{P} ist der gesuchte Punkt \mathfrak{C}_1 . Bezeichnen wir mit A einen beliebigen Punkt von c und setzen $\angle A\mathfrak{P}\mathfrak{X} = \varphi$, $\mathfrak{P}\mathfrak{C} = \mathfrak{R}$ und $\angle \mathfrak{C}\mathfrak{P}\mathfrak{X} = \theta$, so ist $\mathfrak{P}A = 2\mathfrak{R} \cos(\theta - \varphi)$, mithin sind die rechtwinkligen Koordinaten von A $x = 2\mathfrak{R} \cos(\theta - \varphi) \cos \varphi$, $y = 2\mathfrak{R} \cos(\theta - \varphi) \sin \varphi$. Wir erhalten demnach aus (17) und (18) für den entsprechenden Punkt A die Gleichungen

$$\begin{aligned} & (\xi \cos \omega + \eta \sin \omega - 2\mathfrak{R} \sin \omega \sin \theta) \sin \varphi \\ & + (\xi \sin \omega - \eta \cos \omega - 2\mathfrak{R} \sin \omega \cos \theta) \cos \varphi = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & 2\mathfrak{R} \cos(\theta - \varphi) \{ \xi \sin(\chi + \varphi) - \eta \cos(\chi + \varphi) + l \sin(\varphi - \omega) \} \\ & + l(\xi \sin \omega - \eta \cos \omega) = 0. \end{aligned}$$

Aus beiden folgt durch Elimination von φ als Gleichung der Kurve γ

$$\begin{aligned} & 2\mathfrak{R} \{ \xi \cos(\theta + \omega) + \eta \sin(\theta + \omega) \} \cdot \\ (27) \quad & \cdot [(\xi^2 + \eta^2) \sin(\chi - \omega) + 2\mathfrak{R} \sin \omega \{ \xi \cos(\theta + \chi) + \eta \sin(\theta + \chi) \}] \\ & + l \{ \xi^2 + \eta^2 - 2\mathfrak{R}(\xi \cos \theta + \eta \sin \theta) \} (\xi \sin \omega - \eta \cos \omega - 2\mathfrak{R} \cos \theta \sin \omega) = 0, \end{aligned}$$

oder in Polarkoordinaten, wenn $\xi = \rho \cos \varphi$, $\eta = \rho \sin \varphi$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} & 2\mathfrak{R} \rho \cos(\theta + \omega - \varphi) \{ \rho \sin(\chi - \omega) + 2\mathfrak{R} \sin \omega \cos(\theta + \chi - \varphi) \} \\ (28) \quad & + l \{ \rho - 2\mathfrak{R} \cos(\theta - \varphi) \} \{ \rho \sin(\omega - \varphi) - 2\mathfrak{R} \cos \theta \sin \omega \} = 0. \end{aligned}$$

Um den Krümmungsmittelpunkt \mathfrak{C}_1 der Kurve γ im Punkte \mathfrak{P} zu ermitteln, suchen wir ihre Schnittpunkte mit einem sie in \mathfrak{P} berührenden Kreise von vorläufig noch unbestimmtem Radius \mathfrak{R}_1 , setzen also in (28)

$$(29) \quad \rho = 2\mathfrak{R}_1 \cos(\theta - \varphi)$$

und erhalten für φ die Gleichung

$$\begin{aligned} & \cos(\theta - \varphi) [2\mathfrak{R} \mathfrak{R}_1 \cos(\theta + \omega - \varphi) \{ \mathfrak{R}_1 \cos(\theta - \varphi) + \mathfrak{R} \sin \omega \cos(\theta + \chi - \varphi) \} \\ & + l(\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}) \{ \mathfrak{R}_1 \cos(\theta - \varphi) \sin(\omega - \varphi) - \mathfrak{R} \cos \theta \sin \omega \}] = 0. \end{aligned}$$

Nun ist $\cos(\theta - \varphi) = 0$ für $\varphi = 90^\circ + \theta$, also für die Tangente von c und γ in \mathfrak{P} . Die eckige Klammer verschwindet für zwei Werte von

φ , und soll der Kreis (29) die Kurve γ oskulieren, so muß sich unter ihnen der Wert $\varphi = 90^\circ + \theta$ befinden. Daraus ergibt sich für den Radius \mathfrak{R}_1 die Bedingung

$$2\mathfrak{R}\mathfrak{R}_1 \sin \omega \sin \chi - l(\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}) \cos \theta = 0$$

oder

$$(30) \quad \left(\frac{1}{\mathfrak{R}} - \frac{1}{\mathfrak{R}_1}\right) \cos \theta = \frac{2 \sin \chi \sin \omega}{l}.$$

Nach Art. 23 ist aber $\frac{l}{2 \sin \chi \sin \omega}$ der Durchmesser des Kreises e , der durch Z_m geht und $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ in \mathfrak{P} berührt. Die Krümmungsmittelpunkte \mathfrak{C} und \mathfrak{C}_1 stehen also in derselben Beziehung wie ein Paar entsprechender Krümmungsmittelpunkte, wenn S ein starres System und wenn \mathfrak{P} der Pol und e der Wendekreis wäre. Dies stimmt überein mit dem in Art. 23 gefundenen Satze, wonach für die Kurve e , die einer durch \mathfrak{P} gehenden Geraden ε entspricht, der Krümmungsmittelpunkt \mathfrak{C} sich auf dem Kreise e befindet.

Zufolge den Gleichungen (1), (11) und (12) ist

$$\frac{2 \sin \chi \sin \omega}{l} = \frac{2 d\lambda}{ds},$$

also gleich Null für *starre* Systeme. Dann wird nach Gleichung (30) $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}$, d. h. der Punkt \mathfrak{C}_1 fällt mit \mathfrak{C} zusammen. Im Falle eines starren Systems entspricht also jeder durch den Pol gehenden, den Wendekreis nicht berührenden Kurve a eine Kurve α , die jene in \mathfrak{P} oskuliert.¹⁾

27. Berührt die Kurve a in \mathfrak{P} den Wendekreis, ohne ihn zu oskulieren, so oskuliert sie an dieser Stelle eine der Kurven, die den durch \mathfrak{P} gehenden Geraden der Ebene Σ entsprechen, hat also mit ihr außerdem noch $3n-4$ Punkte gemein, denen ebenso viele von \mathfrak{P} verschiedene Schnittpunkte von α mit der zugehörigen Geraden zugeordnet sind. Nun ist α von der Ordnung $3n-2$, berührt also jene Gerade überdies noch in \mathfrak{P} . Wenn demnach die Kurve a den Wendekreis in \mathfrak{P} berührt, aber nicht oskuliert, so geht die entsprechende Kurve α durch \mathfrak{P} , ohne im allgemeinen a zu berühren. Das letzte ist nur der Fall, wenn a in \mathfrak{P} den Krümmungsradius Null hat; dann oskuliert nämlich a die

1) Dies ergibt sich auch unmittelbar in folgender Weise: Ist S ein starres System, so entspricht dem zweiten Schnittpunkt des Krümmungskreises c mit der Polbahntangente $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ in Σ der Punkt \mathfrak{P} ; die zirkuläre Kurve dritter Ordnung γ hat also in \mathfrak{P} einen Doppelpunkt und berührt in ihm c und $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$. Die Kurven c und γ haben jedoch außer \mathfrak{P} und den imaginären Kreispunkten überhaupt keinen Punkt gemein, weil jedem Punkt von c ein von ihm verschiedener Punkt des betreffenden Polstrahls entspricht; sie oskulieren sich also in \mathfrak{P} . Vgl. Art. 31.

Kurve, die der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ von Σ entspricht. — Hat a in \mathfrak{P} einen Wendepunkt mit der Tangente $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$, so berührt a in \mathfrak{P} die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{U}$.

Nehmen wir endlich an, *der Wendekreis oskuliere die Kurve a in \mathfrak{P}* , und verstehen unter ε eine beliebige durch \mathfrak{P} gehende Gerade, nur nicht $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$, so zählt \mathfrak{P} für drei Schnittpunkte der zugeordneten Kurve e mit a ; beide Kurven treffen sich also außerdem noch in $3n-3$ Punkten. Diesen entsprechen $3n-3$ von \mathfrak{P} verschiedene Schnittpunkte der Geraden ε mit der Kurve $3n-3$ ter Ordnung α , d. h. *α geht nicht durch \mathfrak{P}* . — Unter den ∞^2 Kurven dritter Ordnung, die den Geraden der Ebene Σ entsprechen, gibt es jetzt ein Büschel von Kurven, die a in \mathfrak{P} vierpunktig berühren; die ihnen zugeordneten Geraden von Σ gehen durch einen bestimmten Punkt A der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ (Art. 24). Dann entspricht dem Punkt \mathfrak{P} von a auf α der Punkt A , und α berührt in A die Gerade, deren entsprechende Kurve in \mathfrak{P} fünf zusammenfallende Punkte mit a gemein hat. — Hat insbesondere a eine vierpunktige Berührung mit dem vom Wendekreis oskulierten Teil der Kurve, die der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ der Ebene Σ entspricht, und folglich mit allen Kurven des Büschels, das in S den durch \mathfrak{N}_w gehenden Geraden zugeordnet ist, so berührt α in \mathfrak{N}_w die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$, weil die entsprechende Kurve in \mathfrak{P} fünf zusammenfallende Punkte mit a gemein hat. Nur wenn a eine der übrigen, und folglich alle übrigen Kurven jenes Büschels in \mathfrak{P} fünfpunktig berührt, trifft α jede durch \mathfrak{N}_w gehende Gerade an dieser Stelle in zwei zusammenfallenden Punkten. Dann hat α in \mathfrak{N}_w einen Rückkehrpunkt und berührt in ihm die Gerade, deren zugeordnete Kurve von a sechspunktig berührt wird.

28. Geht die Kurve a durch einen der imaginären Kreispunkte, etwa \mathfrak{S}_1 , so zerfällt die entsprechende Kurve in die Gerade $Z\mathfrak{S}_1$ und einen Rest α . Dann hat die Kurve a mit allen Kurven dritter Ordnung e , die den Geraden ε von Σ entsprechen, in \mathfrak{S}_1 entweder einen oder zwei zusammenfallende Punkte gemein, je nachdem sie von der Geraden $Z_m\mathfrak{S}_1$ an dieser Stelle geschnitten oder berührt wird, und wir schließen genau wie in Art. 25: *Jeder Durchgang der Kurve a durch einen der imaginären Kreispunkte vermindert die Ordnung der entsprechenden Kurve um eins; die gleichzeitige Berührung seiner Verbindungslinie mit Z_m bewirkt eine weitere Verminderung der Ordnungszahl um eins.*

Die Kurve a schneidet, vom Punkte \mathfrak{S}_1 abgesehen, die unendlich ferne Gerade noch in $n-1$, den Wendekreis in $2n-1$ Punkten, und diesen entsprechen im ganzen $3n-2$ unendlich ferne Punkte von α . Ist demnach α von der Ordnung $3n-1$, so enthält sie außerdem noch den Punkt \mathfrak{S}_1 . *Die Kurve α geht also durch \mathfrak{S}_1 oder nicht durch \mathfrak{S}_1 ,*

je nachdem die Kurve a an dieser Stelle mit der Geraden $Z_m \mathfrak{S}_1$ einen oder zwei zusammenfallende Punkte gemein hat.

Nach Art. 13 ist dem Punkte Z_m der Ebene S in Σ der Mittelpunkt \mathfrak{M}_ν des Rückkehrkreises zugeordnet. Den Geraden $Z_m \mathfrak{S}_1$ und $Z_m \mathfrak{S}_2$ entsprechen also in Σ zwei imaginäre durch \mathfrak{M}_ν gehende Geraden ι_1 und ι_2 — nämlich die Verbindungslinien von \mathfrak{M}_ν mit den zugeordneten der Punkte, in denen der Wendekreis jene Geraden zum zweiten Male schneidet.

Bezeichnen wir mit \mathfrak{S}_1 den unendlich fernen Punkt der Geraden $x + iy = 0$, so lautet die Gleichung von $Z_m \mathfrak{S}_1$

$$x - \frac{l \sin \chi}{2 \sin \omega} + i \left(y + \frac{l \cos \chi}{2 \sin \omega} \right) = 0.$$

Eliminieren wir x und y zwischen dieser Gleichung und den Gleichungen (17) und (18), so erhalten wir als Gleichung der Geraden ι_1

$$(31) \quad 2 \{ 2 \sin \chi \sin \omega - i \sin(\chi - \omega) \} \xi - 2 \eta \sin(\chi + \omega) - l = 0,$$

wofür wir auch schreiben können

$$4 \sin \chi (\xi \sin \omega - \eta \cos \omega) - \{ 2i(\xi + i\eta) \sin(\chi - \omega) + l \} = 0;$$

die Gerade ι_1 geht also durch den Schnittpunkt von $\mathfrak{P}\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{M}_\nu \mathfrak{S}_1$.

29. Sei a eine reelle Kurve, die durch \mathfrak{S}_1 und folglich auch durch \mathfrak{S}_2 geht, jedoch ohne die Geraden $Z_m \mathfrak{S}_1$ und $Z_m \mathfrak{S}_2$ zu berühren. Dann enthält die entsprechende Kurve α gleichfalls die Punkte \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 , und es fragt sich, ob sie in ihnen die Kurve a berührt oder schneidet.

Jedenfalls entspricht dem Punkte von a , der zu \mathfrak{S}_1 unendlich benachbart ist, in Σ der dem Punkte \mathfrak{S}_1 unendlich benachbarte Punkt von α ; bezeichnet also b irgendeine Kurve von S , die a in den imaginären Kreispunkten berührt, so steht die entsprechende Kurve β zu α in derselben Beziehung. Sind daher \mathfrak{F} und \mathfrak{F}' die Fokalzentren zweier einander zugeordneten Kurven a und α , so entsprechen allen Kurven von S , die \mathfrak{F} zum Fokalzentrum haben, in Σ Kurven mit dem Fokalzentrum \mathfrak{F}' . Zwei in dieser Weise einander zugeordnete Punkte der Ebenen S und Σ mögen ein Paar entsprechender Fokalzentra heißen.

Um die Beziehung zwischen den Punkten der Ebene S und den ihnen in diesem Sinne entsprechenden Punkten von Σ zu untersuchen, dürfen wir jene als die Mittelpunkte von Kreisen betrachten, die wir überdies durch \mathfrak{P} gehen lassen. Sind \mathfrak{R}, θ die Polarkoordinaten eines Punktes \mathfrak{F} von S , so entspricht dem durch \mathfrak{P} gehenden Kreise c , der \mathfrak{F} zum Mittelpunkt hat, nach Art. 26 eine Kurve dritter Ordnung γ mit der Gleichung (27). Die Koordinaten \mathfrak{R}', θ' ihres Fokalzentrums \mathfrak{F}'

werden gefunden, indem wir die Bedingung bilden, unter der die Gerade $\mathfrak{F}'\mathfrak{S}_1$ oder

$$\xi - \Re' \cos \theta' + i(\eta - \Re' \sin \theta') = 0,$$

die Kurve γ im Punkte \mathfrak{S}_1 berührt. Wir setzen also in (27) $\eta = i(\xi - \Re' e^{i\theta'})$; dadurch entsteht eine Gleichung zweiten Grades in ξ , und zwar lautet der Faktor von ξ^2

$$4\Re e^{i(\theta+\omega)} \{ \Re' e^{i\theta'} \sin(\chi - \omega) + \Re \sin \omega e^{i(\theta+\chi)} \} - 2il e^{i\omega} (\Re' e^{i\theta'} - \Re e^{i\theta}).$$

Er verschwindet, wenn

$$\Re' e^{i\theta'} \{ 2\Re e^{i\theta} \sin(\chi - \omega) - il \} + \Re e^{i\theta} \{ 2\Re e^{i(\theta+\chi)} \sin \omega + il \} = 0$$

ist. Setzen wir noch $\Re e^{i\theta} = \mathfrak{z}$, $\Re' e^{i\theta'} = \mathfrak{z}'$, so erhalten wir zur Bestimmung des Fokalzentrums \mathfrak{F}' die Gleichung

$$(32) \quad \mathfrak{z}' = - \frac{\mathfrak{z}(2\mathfrak{z} e^{i\chi} \sin \omega + il)}{2\mathfrak{z} \sin(\chi - \omega) - il}.$$

Wird also jedem Punkt der Ebene S das entsprechende Fokalzentrum in Σ zugeordnet, so ergibt sich eine konforme Abbildung der Ebene S auf die Ebene Σ .

Soll in Gleichung (32) $\mathfrak{z}' = \mathfrak{z}$ sein, so folgt

$$\mathfrak{z}^2 \sin \chi e^{i\omega} = 0.$$

Der Punkt \mathfrak{P} ist demnach der einzige Punkt der Ebene S , der mit seinem entsprechenden Fokalzentrum zusammenfällt. Hieraus ergibt sich als Ergänzung des zweiten Satzes in Art. 28: *Jeder zirkularen Kurve von S , die weder \mathfrak{P} noch Z_m zum Fokalzentrum hat, entspricht in Σ eine zirkuläre Kurve, die jene in den imaginären Kreispunkten durchschneidet. Hat jedoch die erste Kurve den Punkt \mathfrak{P} zum Fokalzentrum, so berühren sich beide Kurven in den imaginären Kreispunkten.* Der letzte Satz folgt übrigens auch sofort aus dem Schluß des Art. 18; denn wenn die Kurve a die Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{S}_2$ in \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 berührt, so entsprechen auch die beiden Punkte von a , die den Punkten \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 unendlich benachbart sind, sich selbst.

Führen wir in Gleichung (32) an Stelle von l , χ , ω die anfangs benutzten unendlich kleinen Größen ein, so geht sie über in

$$\mathfrak{z}' = - \frac{2\mathfrak{z}^2(d\omega + id\lambda) + i\mathfrak{z}ds}{2\mathfrak{z}(d\theta - d\omega) - ids}.$$

Ist das System starr, also $d\lambda = d\omega = 0$, so wird

$$\mathfrak{z}' = - \frac{i\mathfrak{z}ds}{2\mathfrak{z}d\theta - ids}$$

oder

$$\frac{1}{\mathfrak{z}'} = \frac{1}{\mathfrak{z}} + \frac{2i}{b_w};$$

die Beziehung zwischen den beiden Systemen entsprechender Fokalzentra verwandelt sich also in eine *Kreisverwandtschaft*.¹⁾

30. *Die Kurven der Ebene Σ .* Ist β eine Kurve ν ter Ordnung in Σ , b die ihr in S entsprechende Kurve, d eine beliebige Gerade von S und δ die zugehörige Kurve dritter Ordnung von Σ , so sind den 3ν Schnittpunkten von β und δ in S ebenso viele Schnittpunkte von b und d zugeordnet, d. h. b ist von der Ordnung 3ν .

Geht die Kurve β weder durch \mathfrak{P} , noch durch die imaginären Kreispunkte, so entsprechen ihren ν Schnittpunkten mit den Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$, $Z\mathfrak{S}_1$, $Z\mathfrak{S}_2$ einerseits ν mal bzw. die Punkte \mathfrak{P} , \mathfrak{S}_1 , \mathfrak{S}_2 . Den ν Schnittpunkten von β mit jeder der Geraden ι_1 , ι_2 sind in S ν von \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 verschiedene Schnittpunkte der Kurve b mit den Geraden $Z_m\mathfrak{S}_1$, $Z_m\mathfrak{S}_2$ zugeordnet; jeder der imaginären Kreispunkte zählt also für 2ν Schnittpunkte von b bzw. mit $Z_m\mathfrak{S}_1$ und $Z_m\mathfrak{S}_2$, d. h. b berührt in jedem der imaginären Kreispunkte ν mal seine Verbindungslinie mit dem Punkte Z_m . — Den ν unendlich fernen Punkten von β entsprechen einerseits ν von \mathfrak{P}_1 , \mathfrak{S}_1 , \mathfrak{S}_2 verschiedene Schnittpunkte des Wendekreises mit b , da aber w und b im ganzen 6ν Punkte miteinander gemein haben müssen, so folgt, daß der Wendekreis die Kurve b ν mal in \mathfrak{P} oskuliert.

Geht aber β einmal durch \mathfrak{P} , so hat b in \mathfrak{P} einen $\nu + 1$ fachen Punkt und berührt an dieser Stelle ν mal die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ und einmal die Kurve β , hat aber mit dem Wendekreis wieder nicht mehr als 3ν zusammenfallende Punkte gemein; nur wenn β den unendlich fernen Punkt von $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ enthält, zählt \mathfrak{P} für $3\nu + 1$ Schnittpunkte von b mit w . Ist endlich β eine zirkuläre Kurve, so sind \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 $\nu + 1$ fache Punkte von b , doch zählt z. B. \mathfrak{S}_1 nur für 2ν Schnittpunkte von b mit der Geraden $Z_m\mathfrak{S}_1$ — wenn nicht β den Schnittpunkt von ι_1 mit der Geraden $Z\mathfrak{S}_1$ enthält.

31. Aus allen diesen Darlegungen folgt: *Zwischen den Punkten der bewegten Ebene S und den entsprechenden Krümmungsmittelpunkten in der festen Ebene Σ besteht eine ein-zweideutige Verwandtschaft dritten Grades.*

Bei starren Systemen ist die Verwandtschaft zwischen den in derselben Weise einander entsprechenden Punkten bekanntlich ein-eindeutig vom zweiten Grade. Einer Geraden des einen Systems entspricht im anderen ein Kegelschnitt, der den Wendekreis in \mathfrak{P} oskuliert. Der einzige Ausnahmepunkt ist der Pol \mathfrak{P} ; ihm ist in beiden Systemen

1) R. Müller, Über die Momentanbewegung eines starren ebenen Systems, Zeitschrift für Math. u. Phys. 1906, Bd. 54, S. 100.

jeder Punkt von $\mathfrak{B}\mathfrak{X}$ zugeordnet. Jeder der imaginären Kreispunkte und jeder Punkt seiner Verbindungslinie mit \mathfrak{B} entspricht sich selbst. Darum vermindert nur der Durchgang einer Kurve durch \mathfrak{B} die Ordnung der zugeordneten Kurve: Geht eine Kurve n ter Ordnung a durch \mathfrak{B} , ohne den Wendekreis w zu berühren, so ist die entsprechende Kurve α von der Ordnung $2n - 1$ und oskuliert a in \mathfrak{B} . Berührt aber a den Wendekreis in \mathfrak{B} , so ist α eine Kurve $2n - 2$ ter Ordnung, die gleichfalls w berührt, ohne a zu oskulieren. Ist endlich w der Krümmungskreis von a in \mathfrak{B} , so geht die Kurve $2n - 3$ ter Ordnung α überhaupt nicht mehr durch \mathfrak{B} .

32. Ist f eine Gerade in S , die weder durch \mathfrak{B} , noch durch einen der imaginären Kreispunkte geht, φ die ihr zugeordnete Kurve dritter Ordnung in Σ , so entspricht dieser in der bewegten Ebene außerdem eine Kurve achter Ordnung f^* . Die in Art. 17 erwähnte involutorische Verwandtschaft der Systeme S und S^* ist also vom achten Grade. Die Kurve f^* schneidet f in den beiden Punkten F und F^* , die dem Doppelpunkte Φ von φ entsprechen, und in den sechs Schnittpunkten von f mit der Kurve s .

Sind D und D^* zwei einander zugeordnete Punkte der Systeme S und S^* , so entspricht dem Strahlenbüschel um D ein Büschel von Kurven achter Ordnung mit den Grundpunkten D^* , \mathfrak{B} , \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 ; ihre Tangenten im Punkte D^* sind also projektiv zu dem Strahlenbüschel um D . Liegt nun D auf der Kurve s , so fällt D^* mit D zusammen. Ziehen wir dann durch D die Strahlen $f_1, f_2 \dots$ und an die entsprechenden Kurven $f_1^*, f_2^* \dots$ in demselben Punkte die Tangenten $h_1, h_2 \dots$, so bilden die Strahlenpaare $f_1 h_1, f_2 h_2 \dots$ eine Involution, deren einer Doppelstrahl die Tangente in D an s ist. Den Strahlen $f_1, f_2 \dots$ entsprechen in Σ die Kurven dritter Ordnung $\varphi_1, \varphi_2 \dots$, welche die Übergangskurve σ im Punkte Δ berühren; ihre Doppelpunkte $\Phi_1, \Phi_2 \dots$ liegen auf der durch Δ gehenden Geraden g_D , die dem Punkte D reziprok zugeordnet ist. Wird die Gerade g_D der Ebene Σ zugewiesen, so entspricht ihr nach Art. 22 in S eine Kurve dritter Ordnung mit einem Wendepunkte in D und g_D als Wendetangente. Die Strahlen $f_1, f_2 \dots$ schneiden sich mit ihren zugeordneten Kurven $f_1^*, f_2^* \dots$ auf dieser Kurve dritter Ordnung in den Punktepaaren $F_1 F_1^*, F_2 F_2^* \dots$. Für den Strahl g_D des Büschels $f_1, f_2 \dots$ fällt aber das betreffende Paar mit dem Punkte D zusammen; die zugehörige Kurve achter Ordnung berührt also g_D in D , mithin ist g_D der zweite Doppelstrahl der von den Paaren $f_1 h_1, f_2 h_2 \dots$ gebildeten Involution.

Allen Kurven der Ebene Σ , die in Δ die Übergangskurve berühren,

entsprechen in der Ebene S Kurven mit einem Doppelpunkte in D (Art. 22). Ihre zugehörigen Tangenten sind Paare jener Involution.

33. Sei a eine Kurve n ter Ordnung von S , die weder durch \mathfrak{P} noch durch die imaginären Kreispunkte geht und keine Doppelpunkte besitzt. Ihr entspricht in Σ eine Kurve $3n$ ter Ordnung α und in S^* eine Kurve $8n$ ter Ordnung a^* , die, von \mathfrak{P} und den imaginären Kreispunkten abgesehen, keine mehrfachen Punkte enthält. Diese geht durch die $6n$ Schnittpunkte von a mit s und schneidet a überdies in $8n^2 - 6n$ Punkten, von denen immer je zwei einander involutorisch entsprechen, also zu einem Doppelpunkte der Kurve α gehören. *Die Kurve α hat daher $4n^2 - 3n$ Doppelpunkte*, was übrigens auch daraus folgt, daß die eindeutig aufeinander bezogenen Kurven a und α von gleichem Geschlecht sein müssen.

Schneidet a die Kurve s an irgendeiner Stelle D in der Richtung der zugehörigen Gerade g_Δ , so befindet sich unter den $4n^2 - 3n$ Doppelpunkten von α der Rückkehrpunkt Δ .

Man übersieht leicht, in welcher Weise sich die Anzahl der Doppelpunkte der Kurve α ändert, wenn a die imaginären Kreispunkte oder den Punkt \mathfrak{P} enthält.

34. Nach Art. 27 und 28 *entspricht jedem Kreis a , der $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ in \mathfrak{P} berührt, in Σ ein Kreis α , der durch \mathfrak{P} geht, ohne $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ zu berühren* (Fig. 11). Die Bahnnormalen aller Punkte von a gehen durch den zweiten Schnittpunkt A von a mit der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$, und die reziprok zugeordneten Geraden g bilden ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung, das dem Normalenbüschel projektiv ist und mit ihm den Strahl $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ gemein hat. Der Kreis α geht also gleichfalls durch A , und beide Kreise sind aus A perspektiv aufeinander bezogen. Konstruieren wir zu A den entsprechenden Punkt A als Schnittpunkt der Geraden n_A und g_A , so ist n_A die Tangente von a in A und g_A die Parallele durch \mathfrak{P} zur Verbindungslinie von \mathfrak{N}_w mit dem Punkte A_1 , in dem $\mathcal{U}A$ den Wendekreis schneidet. Dann ist $\angle A\mathfrak{P}A_1 = \angle \mathfrak{N}_w A_1 \mathfrak{P} = \omega$, also $= \angle A A \mathfrak{P}$, d. h. $\mathfrak{P}A_1$ berührt α in \mathfrak{P} . Wir erhalten daher den Mittelpunkt \mathfrak{M}_α von α ohne vorhergehende Bestimmung von A als Schnittpunkt der Lote in \mathfrak{P} zu $\mathfrak{P}A_1$ und vom Mittelpunkt \mathfrak{M}_α des Kreises a auf die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$.

Bestimmen wir in dieser Weise zu allen Kreisen a, b, \dots , die $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ in \mathfrak{P} berühren, die entsprechenden Kreise α, β, \dots , so ist das Parallelstrahlenbüschel $\mathfrak{M}_\alpha \mathfrak{M}_\alpha, \mathfrak{M}_\beta \mathfrak{M}_\beta \dots$ projektiv zu der auf $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ liegenden Punktreihe $AB \dots$, also zum Strahlenbüschel $U(A_1 B_1 \dots)$, folglich auch projektiv zum Büschel $\mathfrak{P}(A_1 B_1 \dots)$ und zum Büschel $\mathfrak{P}(\mathfrak{M}_\alpha \mathfrak{M}_\beta \dots)$.

Wir erhalten demnach als Ort der Kreismittelpunkte $\mathcal{M}_\alpha, \mathcal{M}_\beta \dots$ eine Hyperbel m ; diese geht durch den unendlich fernen Punkt von $\mathfrak{B}\mathfrak{I}$

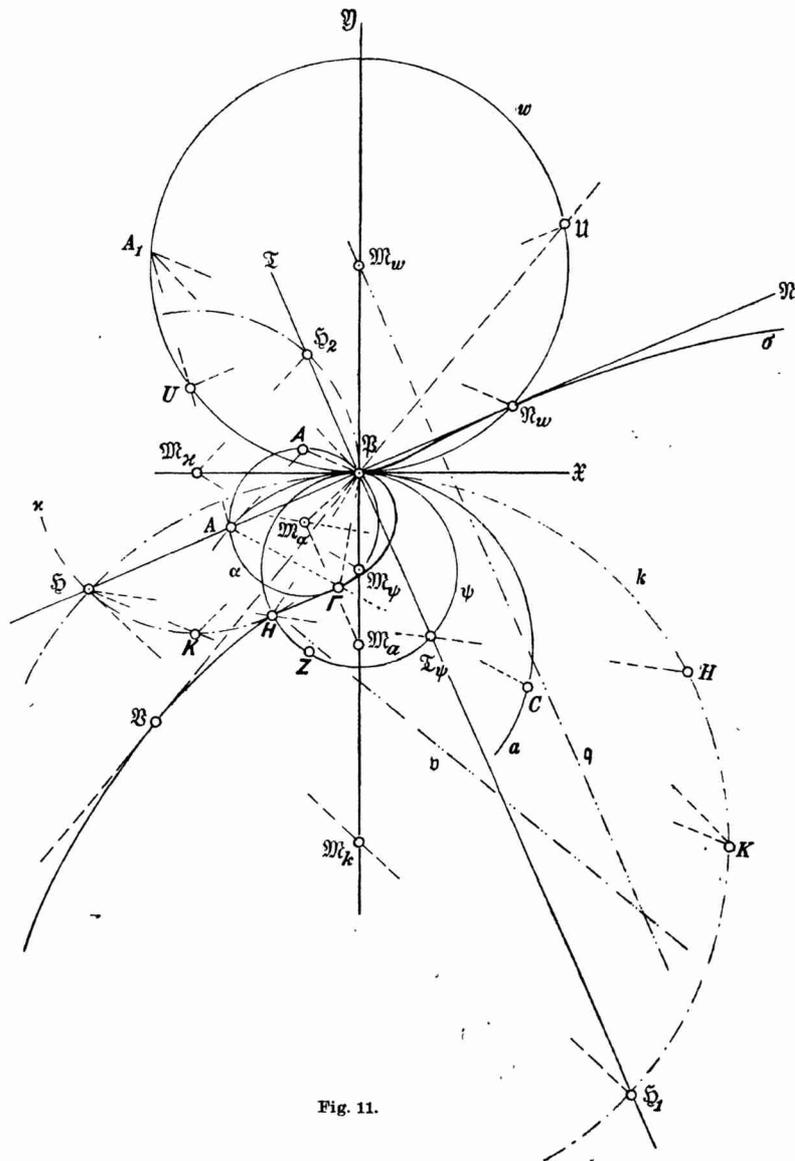


Fig. 11.

und durch \mathfrak{B} . Fällt \mathcal{M}_α mit \mathfrak{B} zusammen, so gilt dasselbe von \mathcal{M}_α , und die Gerade $\mathfrak{B}\mathcal{M}_\alpha$ wird identisch mit $\mathfrak{B}\mathfrak{Y}$; die Hyperbel m berührt also $\mathfrak{B}\mathfrak{Y}$ in \mathfrak{B} . Geht a in den Wendekreis über, so wird \mathcal{M}_α der unendlich ferne Punkt des Lotes q von \mathcal{M}_w auf $\mathfrak{B}\mathfrak{N}$; q ist daher eine

Asymptote von m . Zu dem Kreisbüschel $ab\dots$ gehört auch die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$, der in Σ die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{U}$ entspricht; die andere Asymptote v der Hyperbel m ist folglich senkrecht zu $\mathfrak{P}\mathfrak{U}$. Machen wir wie in Fig. 9 auf $\mathfrak{P}\mathfrak{U}$ die Strecke $\mathfrak{P}\mathfrak{B} = \mathfrak{U}\mathfrak{B}$, so ist v die Mittelsenkrechte von $\mathfrak{P}\mathfrak{B}$. Die Hyperbel m ist also konzentrisch mit dem durch \mathfrak{P} , \mathfrak{N}_ω und \mathfrak{B} gehenden Kreise.

Der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{Y}$ von S entspricht nach Art. 20 in Σ eine Hyperbel μ , die $\mathfrak{P}\mathfrak{Y}$ in \mathfrak{P} berührt und die Lote in \mathfrak{N}_ω zu $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$, sowie in \mathfrak{B} zu $\mathfrak{P}\mathfrak{U}$ zu Asymptoten hat. Die Hyperbeln m und μ sind demnach im Verhältnis 1:2 einander homothetisch ähnlich für \mathfrak{P} als Ähnlichkeitspunkt.

Gebrauchen wir die Bezeichnungen \mathfrak{H} , \mathfrak{H}_1 , \mathfrak{H}_2 , k und \varkappa in derselben Bedeutung wie in Fig. 8, so ist dem Kreise k von S der Kreis \varkappa zugeordnet, denn den Punkten \mathfrak{H}_1 und \mathfrak{H} von k entsprechen in Σ die Punkte \mathfrak{H} und \mathfrak{H}_2 von \varkappa . Dabei ist

$$\mathfrak{P}\mathfrak{H} = \frac{l}{\cos \chi},$$

also

$$\mathfrak{P}\mathfrak{M}_k = -\frac{l}{2 \cos \chi \sin \omega}$$

und ferner

$$\mathfrak{P}\mathfrak{M}_\omega = \frac{l}{2 \sin(\chi - \omega)}, \quad \mathfrak{P}\mathfrak{M}_\psi = -\frac{l}{2 \sin(\chi + \omega)},$$

folglich

$$\frac{2}{\mathfrak{P}\mathfrak{M}_k} = \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{M}_\omega} + \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{M}_\psi},$$

d. h. \mathfrak{M}_k ist der vierte harmonische Punkt zu \mathfrak{M}_ω , \mathfrak{M}_ψ und \mathfrak{P} . — Bedeutet K einen beliebigen Punkt von k , so schneidet die Gerade $\mathfrak{H}K$ den Kreis \varkappa im entsprechenden Krümmungsmittelpunkt K . Dann ist $\angle \mathfrak{H}K\mathfrak{P} = \omega$ und $\angle K\mathfrak{P}K$ ein Rechter, also besteht zwischen dem Krümmungsradius und dem radius vector des Punktes K die einfache Beziehung

$$KK = \frac{\mathfrak{P}K}{\cos \omega}.$$

Geisenheimer nennt k den *ausgezeichneten Kreis* der betrachteten Systemphase.¹⁾

35. Die Übergangskurve σ . Durch jeden Punkt Γ der Ebene Σ gehen im allgemeinen zwei Kreise α und β , die den Punkt \mathfrak{P} enthalten, und deren Mittelpunkte der Hyperbel m angehören. Ihnen entsprechen in S zwei Kreise a und b , die $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ in \mathfrak{P} berühren; auf jedem von ihnen liegt einer der dem Punkte Γ zugeordneten Punkte C und C^* . Berührt

1) a. a. O. S. 154.

aber die Mittelsenkrechte der Strecke $\mathfrak{P}\Gamma$ die Hyperbel m , so fällt α mit β , also auch a mit b und C mit C^* zusammen, und dann befindet sich Γ auf der Übergangskurve σ . Man erhält also σ , indem man jedes der von \mathfrak{P} auf die Tangenten von m gefällten Lote über seinen Fußpunkt hinaus um sich selbst verlängert, d. h. die Übergangskurve σ ist die Fußpunktkurve der Hyperbel μ , die der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ von S entspricht, für \mathfrak{P} als Lotpunkt.

Hieraus ergibt sich folgende Konstruktion der Kurve σ und der ihr in S entsprechenden Kurve s : Man zeichne zunächst die Hyperbel m aus ihren Asymptoten q und v und dem Punkte \mathfrak{P} . Ist \mathfrak{M}_α ein Punkt von m , so fälle man von \mathfrak{P} auf die zugehörige Tangente ein Lot und bestimme seinen Schnittpunkt Γ mit dem Kreise α , der durch \mathfrak{P} geht und \mathfrak{M}_α zum Mittelpunkt hat. Dann berührt α die Kurve σ in Γ . Man lege ferner durch den Schnittpunkt A von $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ und α den Kreis a , der $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ in \mathfrak{P} berührt; dieser trifft die Gerade $A\Gamma$ im Punkte C der Kurve s .

Wie sich bereits in Art. 16 ergab, ist σ eine bizirkulare Kurve vierter Ordnung. Sie hat in \mathfrak{P} einen Rückkehrpunkt mit der Tangente $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$. — Eine beliebig durch \mathfrak{P} gezogene Gerade schneidet die beiden auf ihr senkrechten Tangenten der Hyperbel μ in zwei Punkten von σ . Für jede der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{U}$ fallen die beiden Tangenten mit einer Asymptote von μ zusammen; die Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{U}$ berühren demnach die Kurve σ bzw. in \mathfrak{N}_w und in \mathfrak{U} .

In der Kinematik wird gezeigt, daß man die Fußpunktkurve σ durch einen Zwillingenkurbelmechanismus erzeugen kann, dessen festes Glied durch die Brennpunkte der Hyperbel m begrenzt wird und dessen Arme dieselbe Länge haben wie die Hauptachse dieser Hyperbel.¹⁾ Bei jedem Kurbelmechanismus sind ferner die Endpunkte des festen Gliedes zwei Fokalzentra der erzeugten Koppelkurven.²⁾ Die Fokalzentra der Kurve σ fallen demnach zusammen mit den Brennpunkten der Hyperbel m .

In der Gleichung (20) der Übergangskurve kann der letzte Klammerausdruck auch auf die Form gebracht werden

$$[\xi + l \cos(\chi + \omega)]^2 + [\eta + l \sin(\chi + \omega)]^2.$$

Gleich Null gesetzt, stellt er die Geraden dar, die den Punkt Z mit den imaginären Kreispunkten \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 verbinden; diese Geraden sind also Tangenten von σ . Nun ist σ von der Klasse $4 \cdot 3 - 3 - 2 \cdot 2 = 5$, folglich gehen aus den Doppelpunkten \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 keine weiteren Tan-

1) Vgl. z. B. Burmester Kinematik S. 304.

2) Satz von Roberts, on Three-bar Motion in Plane Space, Proceedings of the London Math. Soc. Vol. VII p. 14.

genten an die Kurve als die Geraden $Z\mathfrak{S}_1$ und $Z\mathfrak{S}_2$. Der Punkt Z ist also, von den Fokalzentren abgesehen, der einzige Brennpunkt von σ .

Die imaginären Geraden ι_1 und ι_2 , die in der Ebene Σ den Verbindungslinien der imaginären Kreispunkte mit dem Punkte Z_m entsprechen, sind Doppeltangenten der Übergangskurve (Art. 19).

Bringen wir Gleichung (21) in die Form

$$\begin{aligned} & \{(\xi^2 + \eta^2) \sin(\chi + \omega) + l\eta\}^2 \\ & - 4(\xi^2 + \eta^2) \{(\xi^2 + \eta^2) \cos \chi \cos \omega + l\xi\} \sin \chi \sin \omega = 0, \end{aligned}$$

so erkennen wir, daß der Rückkehrkreis ψ

$$(\xi^2 + \eta^2) \sin(\chi + \omega) + l\eta = 0$$

die Kurve σ in dem Punkte H schneidet, in dem sie von dem Kreise κ

$$(\xi^2 + \eta^2) \cos \chi \cos \omega + l\xi = 0$$

berührt wird. Da die Kreise k und κ aus \mathfrak{H} perspektiv aufeinander bezogen sind, so entspricht dem Krümmungsmittelpunkt H der Schnittpunkt H von \mathfrak{H} mit k , und dann liegt H auf s . Nun ist $\angle H H \mathfrak{P} = \omega$ und $\mathfrak{P} H \perp \mathfrak{P} H$, also $\angle \mathfrak{P} H H = 90^\circ - \omega$; die Gerade $\mathfrak{H} H$ geht demnach durch den Punkt \mathfrak{X}_ψ .

Die Punkte \mathfrak{P} und H teilen den Rückkehrkreis in zwei Bögen; dem einen, der den Punkt Z enthält, entsprechen in S konjugiert imaginäre, dem andern reelle Punktpaare.

Die Gerade $\mathfrak{P} H$ ist senkrecht auf $\mathfrak{M}_\psi \mathfrak{M}_\kappa$. Bezeichnen wir also mit φ_H den spitzen Winkel, den $H \mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{P} \mathfrak{X}$ bildet, so ist auch $\angle \mathfrak{M}_\kappa \mathfrak{M}_\psi \mathfrak{P} = \varphi_H$, folglich

$$\tan \varphi_H = \frac{\mathfrak{P} \mathfrak{M}_\kappa}{\mathfrak{P} \mathfrak{M}_\psi} = \frac{l}{2 \cos \chi \cos \omega} : \frac{l}{2 \sin(\chi + \omega)}$$

oder

$$(33) \quad \tan \varphi_H = \tan \chi + \tan \omega.$$

36. Die Kurve s . Aus Gleichung (24) folgt: Die Kurve sechster Ordnung s geht dreimal durch die imaginären Kreispunkte. Sie hat ferner in \mathfrak{P} einen dreifachen Punkt mit der Tangente $\mathfrak{P} \mathfrak{X}$. Setzen wir in (24)

$$x^2 + y^2 = qy,$$

so folgt

$$\begin{aligned} & y^2 [\{ q^3 \sin^2 \omega \sin(\chi - \omega) \\ & - q^2 l \sin \omega (2 \sin^2 \chi \sin \omega - \sin \chi \cos \chi \cos \omega + 3 \cos^2 \chi \sin \omega) \\ & - 3 q l^2 \cos \chi \sin \omega - l^3 \} y - q l \sin \chi \sin \omega \{ q \sin(\chi - \omega) - l \} x] = 0; \end{aligned}$$

der Punkt \mathfrak{P} zählt demnach für fünf Schnittpunkte des betrachteten Kreises mit der Kurve s . Für $q = \frac{l}{\sin(\chi - \omega)}$, d. h. für den Wendekreis w fällt auch der sechste Schnittpunkt mit \mathfrak{P} zusammen. Die Singularität, welche die Kurve s im Punkte \mathfrak{P} besitzt, ist also aufzufassen als die Vereinigung eines Rückkehrpunkts mit der Tangente $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ und dem Krümmungsradius Null und eines einfachen Durchgangs durch \mathfrak{P} mit w als Krümmungskreis (Fig. 12).

Die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ schneidet s noch in dem Punkte \mathfrak{B}' , der dem Berührungspunkte \mathfrak{B} von $\mathfrak{P}\mathfrak{U}$ mit σ zugeordnet ist. Da der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{U}$

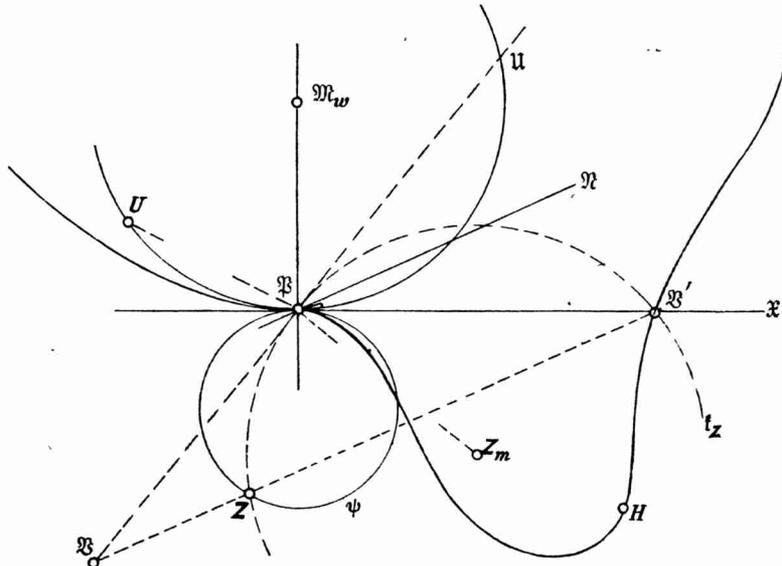


Fig. 12.

der Ebene Σ außer der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ noch der Kreis \mathfrak{f}_Z entspricht, so liegt \mathfrak{B}' auch auf \mathfrak{f}_Z , und die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{B}'$ geht durch Z und ist parallel zu $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ (Art. 22c).

Um die Fokalzentra der Kurve s zu bestimmen, setzen wir in Gleichung (24) $y = i(x - \mathfrak{z})$. Dann ergibt sich eine Gleichung dritten Grades in x , und zwar hat x^3 den Faktor

$$(2\mathfrak{z} \sin \omega + il e^{ix}) \{ 4\mathfrak{z}^2 \sin \omega \sin(\chi - \omega) - 4il\mathfrak{z} \sin \omega + l^2 e^{-ix} \}.$$

Der erste Klammerausdruck verschwindet für

$$\mathfrak{z} = \frac{l}{2 \sin \omega} e^{i\left(\frac{3\pi}{2} + \chi\right)},$$

und zu diesem Wert von \mathfrak{z} gehört nach Art. 13 der Punkt Z_m als Fokalzentrum von s . In der Tat entspricht nach Art. 30 einer bi-

zirkularen Kurve vierter Ordnung von Σ eine Kurve zwölfter Ordnung in S , die jeden der imaginären Kreispunkte $4 + 2 = 6$ mal enthält und in ihm mit der nach Z_m gehenden Geraden $2 \cdot 4 = 8$ zusammenfallende Punkte gemein hat. Ersetzen wir aber die erste Kurve durch σ , so zählt die entsprechende doppelt, und deshalb reduziert sich jede der angegebenen Zahlen auf die Hälfte.

Setzen wir im zweiten Klammersausdruck

$$\mathfrak{z} = r e^{i\varphi} + \frac{il}{2 \sin(\chi - \omega)} = r e^{i\varphi} + i \cdot \mathfrak{M}_w,$$

so erhalten wir zur Bestimmung der beiden andern Fokalzentra von s die Gleichung

$$4r^2 e^{2i\varphi} \sin \omega \sin^2(\chi - \omega) + l^2 \sin \chi e^{-i(\chi - \omega)} = 0$$

oder

$$r e^{i\varphi} = \pm \frac{l}{2 \sin(\chi - \omega)} \sqrt{\frac{\sin \chi}{\sin \omega}} e^{\frac{i}{2}(\pi - \chi + \omega)}.$$

Die gesuchten Punkte liegen also auf der Parallelen durch \mathfrak{M}_w zur Halbierungslinie des Winkels $U\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ und haben von \mathfrak{M}_w den Abstand $\pm \mathfrak{M}_w \sqrt{\frac{\sin \chi}{\sin \omega}}$.

III. Die Krümmungsmittelpunkte der von den Systemkurven erzeugten Hüllbahnkurven.

37. In Fig. 13 bedeuten \mathfrak{P} und \mathfrak{Q} wie früher die Pole der unendlich benachbarten Phasen S und S' , a eine Systemkurve in der Phase S , A den Gleitpunkt, in dem sie ihre Hüllbahnkurve berührt, O den Krümmungsmittelpunkt von a an der Stelle A , a' , A' , O' die Lagen von a , A , O in der Phase S' . Dann ist der spitze Winkel zwischen AO und $\mathfrak{P}A$ gleich ω , $\angle A\mathfrak{P}A' = d\vartheta$ und $\mathfrak{P}A' = \mathfrak{P}A(1 + d\lambda)$. Die Dreiecke $\mathfrak{P}OA$ und $\mathfrak{P}O'A'$ sind einander ähnlich, und dasselbe gilt von den Dreiecken $\mathfrak{P}OO'$ und $\mathfrak{P}AA'$. Die Hüllbahnkurve wird von a' in einem Punkte B' berührt; seine Normale $B'O'$ bildet mit $\mathfrak{Q}B'$ den Winkel $\omega + d\omega$.

Die Normalen AO und $B'O'$ schneiden sich im Krümmungsmittelpunkte A_1 der Hüllbahnkurve. Um den zugehörigen Krümmungsradius AA_1 zu berechnen, bedienen wir uns der Bezeichnungen $AO = R$, $\mathfrak{P}A = r$, $\mathfrak{P}O = r_1$, $\angle A\mathfrak{P}\mathfrak{X} = \varphi$, $\angle O\mathfrak{P}\mathfrak{X} = \varphi_1$, $\angle O\mathfrak{P}A = \varphi_1 - \varphi = \gamma$, $\angle B'A_1A = d\mu$, $\angle B'O'A' = d\beta$, $\angle \mathfrak{Q}O'\mathfrak{P} = d\kappa$. Unter Vernachlässigung unendlich kleiner Größen höherer Ordnung dürfen wir setzen

$$AA_1 = \frac{AA' + A'B'}{d\mu};$$

dabei ist $AA' = r\sqrt{d\vartheta^2 + d\lambda^2}$ und $A'B' = A'O' \cdot d\beta = R(1 + d\lambda)d\beta$, also $= Rd\beta$. Nun ergibt sich aus der Figur

$$d\beta = d\kappa + \sphericalangle B'O'\Omega - \sphericalangle A'O'\mathfrak{P}$$

und $\sphericalangle A'O'\mathfrak{P} = \sphericalangle AO\mathfrak{P} = \omega - \gamma$; daher ist $\sphericalangle B'O'\Omega = \omega + d\omega - (\gamma + d\gamma)$ und folglich

$$d\beta = d\kappa + d\omega - d\gamma.$$

Ferner ist $d\mu = d\beta - \sphericalangle(AO, A'O')$. Aber die Gerade AO bildet mit $A'O'$ denselben Winkel wie $\mathfrak{P}A$ mit $\mathfrak{P}A'$, d. h. den Winkel $d\vartheta$; demnach wird

$$d\mu = d\beta - d\vartheta = d\kappa - d\gamma + d\omega - d\vartheta.$$

Wir finden also

$$(34) \quad AA_1 = \frac{r\sqrt{d\vartheta^2 + d\lambda^2} + R(d\kappa - d\gamma + d\omega)}{d\kappa - d\gamma + d\omega - d\vartheta}.$$

Hier sind noch die Werte von $d\kappa$ und $d\gamma$ zu ermitteln. Aus dem Dreieck $\mathfrak{P}\Omega O'$ ergibt sich nach dem Sinussatz

$$(35) \quad d\kappa = \frac{ds \sin \varphi_1}{r_1}$$

und aus dem Dreieck $\mathfrak{P}OA$

$$(36) \quad r_1 \sin \gamma = R \sin \omega,$$

also durch Differentiation

$$r_1 \cos \gamma d\gamma + dr_1 \sin \gamma = R \cos \omega d\omega + dR \sin \omega.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} dr_1 &= \Omega O' - r_1 = \mathfrak{P}O' - ds \cos \varphi_1 - r_1 \\ &= r_1(1 + d\lambda) - ds \cos \varphi_1 - r_1 \\ &= r_1 d\lambda - ds \cos \varphi_1 \end{aligned}$$

und $dR = Rd\lambda$, mithin erhalten wir aus der vorigen Gleichung

$$r_1 \cos \gamma d\gamma = ds \cos \varphi_1 \sin \gamma + R \cos \omega d\omega + d\lambda(R \sin \omega - r_1 \sin \gamma)$$

oder nach (36)

$$d\gamma = \frac{ds \cos \varphi_1 \sin \gamma + R \cos \omega d\omega}{r_1 \cos \gamma}.$$

Daher ist nach (35)

$$d\kappa - d\gamma = \frac{ds \sin(\varphi_1 - \gamma) - R \cos \omega d\omega}{r_1 \cos \gamma} = \frac{ds \sin \varphi - R \cos \omega d\omega}{r_1 \cos \gamma};$$

Gleichung (34) geht also über in

$$AA_1 = \frac{rr_1 \cos \gamma \sqrt{d\vartheta^2 + d\lambda^2} + R(ds \sin \varphi - R \cos \omega d\omega + r_1 \cos \gamma d\omega)}{ds \sin \varphi - R \cos \omega d\omega - r_1 \cos \gamma (d\vartheta - d\omega)}.$$

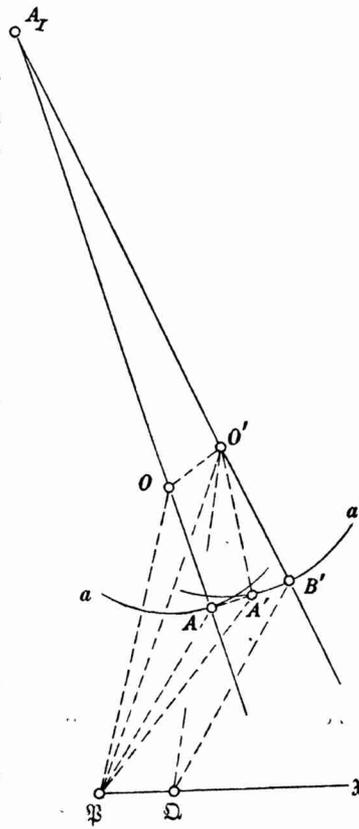


Fig. 13.

Aus dem Dreieck $\mathfrak{B}OA$ folgt aber

$$(37) \quad r_1 \cos \gamma = r + R \cos \omega,$$

also wird

$$AA_1 = \frac{r^2 \sqrt{d\vartheta^2 + d\lambda^2} + R ds \sin \varphi + Er (\cos \omega \sqrt{d\vartheta^2 + d\lambda^2} + d\omega)}{ds \sin \varphi - r(d\vartheta - d\omega) - R d\vartheta \cos \omega}.$$

Multiplizieren wir endlich Zähler und Nenner mit $\frac{d\lambda}{\sqrt{(d\vartheta^2 + d\lambda^2)(d\omega^2 + d\lambda^2)}}$, so gelangen wir mit Rücksicht auf die Gleichungen (1), (11), und (12) zu dem Ergebnis

$$(38) \quad AA_1 = \frac{r^2 \sin \chi + R \{ l \sin \varphi + r \sin(\chi + \omega) \}}{l \sin \varphi - r \sin(\chi - \omega) - R \sin \chi \cos^2 \omega}.$$

Für $R = 0$ folgt hieraus die Formel (13) für den Krümmungsradius r der Bahnkurve, die der Punkt A durchläuft.

Schreiben wir Gleichung (38) in der Form

$$AA_1 = \frac{(r + R \cos \omega)^2 \sin \chi}{l \sin \varphi - r \sin(\chi - \omega) - R \sin \chi \cos^2 \omega} + R$$

und setzen nach (13)

$$l \sin \varphi - r \sin(\chi - \omega) = \frac{r^2 \sin \chi}{r},$$

so erhalten wir mit Rücksicht auf (37) die zur Konstruktion bequemere Formel¹⁾

$$(39) \quad OA_1 = \frac{r_1^2 \cos^2 \gamma}{r^2 - R \cos^2 \omega}.$$

38. Die Krümmungsmittelpunkte der von den Systemgeraden erzeugten Hüllbahnkurven. Ersetzen wir in Fig. 14 die Kurve a durch eine Gerade, so wird $R = \infty$, und Gleichung (38) verwandelt sich in

$$(40) \quad AA_1 = - \frac{l \sin \varphi + r \sin(\chi + \omega)}{\sin \chi \cos^2 \omega}.$$

Dabei sagt das negative Vorzeichen aus, daß A_1 auf derselben Seite von a liegt wie der Punkt \mathfrak{B} . Schneidet nun $\mathfrak{B}A$ den Rückkehrkreis ψ in A_ψ , so ist nach (10)

$$\mathfrak{B}A_\psi = - \frac{l \sin \varphi}{\sin(\chi + \omega)},$$

also

$$AA_\psi = - \frac{l \sin \varphi + r \sin(\chi + \omega)}{\sin(\chi + \omega)},$$

folglich

$$\frac{AA_1}{AA_\psi} = \frac{\sin(\chi + \omega)}{\sin \chi \cos^2 \omega},$$

1) In andrer Weise abgeleitet von Geisenheimer a. a. O. S. 149.

d. h. konstant für alle Geraden a in der Phase S . Demnach ist auch das Dreieck $AA_\psi A_I$, das bei A den Winkel ω enthält, für alle Gleitpunkte A von unveränderlicher Gestalt.¹⁾ Bezeichnen wir den konstanten Außenwinkel bei A_ψ mit ν , so folgt

$$\frac{\sin \nu}{\sin(\nu - \omega)} = \frac{AA_I}{AA_\psi} = \frac{\sin(\chi + \omega)}{\sin \chi \cos^2 \omega}$$

oder

$$\frac{\tan \nu}{\tan \nu - \tan \omega} = \frac{\tan \chi + \tan \omega}{\tan \chi},$$

d. h.

$$\tan \nu = \tan \chi + \tan \omega.$$

Nach Art. 35, Gleichung (33) ist also ν gleich dem Winkel φ_H der Geraden $H\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{X}$; die Gerade $A_\psi A_I$ geht daher durch den früher ermittelten Schnittpunkt H des Rückkehrkreises mit der Übergangskurve σ .

Um für die Systemgerade a den Krümmungsmittelpunkt A_I ihrer Hüllbahnkurve zu konstruieren, fälle man vom Schnittpunkt \mathfrak{N}_ψ der Geraden $\mathfrak{B}\mathfrak{N}$ mit ψ ein Lot auf a , das ψ in A_ψ schneidet. Dann bestimmt die Gerade $\mathfrak{B}A_\psi$ auf a den Gleitpunkt A , und A_I ist der Schnittpunkt von HA_ψ mit der Normale in A zu a .

Geht a durch \mathfrak{X}_ψ , so fallen die Punkte A , A_ψ und A_I mit dem Schnittpunkte von a und ψ zusammen. Die zugehörige Hüllbahnkurve hat folglich in A den Krümmungsradius Null, d. h. im allgemeinen einen Rückkehrpunkt. Wie bei starren Systemen ist demnach der Rückkehrkreis der Ort aller Rückkehrpunkte, die momentan von Systemgeraden erzeugt werden, und diese Geraden gehen durch den Punkt \mathfrak{X}_ψ des Rückkehrkreises.

39. Wir können jeden Punkt A der Ebene S als momentanen Gleitpunkt einer Systemgeraden betrachten und den Krümmungsmittelpunkt A_I der zugehörigen Hüllbahnkurve konstruieren. Dann ergibt sich auch umgekehrt zu jedem Krümmungsmittelpunkt B_I eindeutig ein

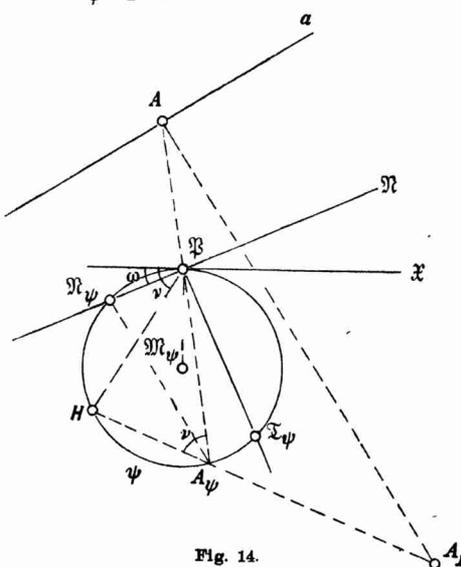


Fig. 14.

1) Vgl. Grouard a. a. O. S. 84 u. Geisenheimer a. a. O. S. 152.

Wir bezeichnen jetzt mit d irgendeine nicht durch \mathfrak{P} oder einen der imaginären Kreispunkte gehende Gerade des Systems S . Konstruieren wir zu den Punkten $A, B \dots$ von d die entsprechenden $A_I, B_I \dots$, so bilden die Geraden $AA_I, BB_I \dots$ das Tangentenbüschel einer Parabel, das zu dem Strahlenbüschel $\mathfrak{P}(A_\psi B_\psi \dots)$ und folglich auch zu $H(A_\psi B_\psi \dots)$ projektiv ist; beide Büschel erzeugen also als Ort der Punkte $A_I, B_I \dots$ eine Kurve dritter Ordnung d_I . Dabei entspricht den zwei Schnittpunkten von d mit dem Kreise h zweimal der Punkt H und dem Schnittpunkt von d mit $\mathfrak{P}\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{S}_2$ bzw. der Punkt \mathfrak{S}_1 oder \mathfrak{S}_2 . Die Kurve d_I hat also mit dem Kreise p_I den Punkt H doppelt zählend, sowie die Punkte \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 , aber sonst keinen Punkt gemein; denn jedem andern Punkt von p_I entspricht in S nur der Punkt \mathfrak{P} , den die Gerade d nicht enthält. Daraus folgt, daß d_I den Kreis p_I in den imaginären Kreispunkten berührt. *Jeder Geraden von S , die weder durch \mathfrak{P} , noch durch einen der imaginären Kreispunkte geht, entspricht also in S_I eine zirkuläre Kurve dritter Ordnung mit dem Fokalzentrum M_I und einem Doppelpunkt in H .*

Ebenso entspricht jeder Geraden von S_I , die weder die imaginären Kreispunkte, noch den Punkt H enthält, in S eine zirkuläre Kurve dritter Ordnung mit dem Fokalzentrum M und einem Doppelpunkte in \mathfrak{P} .

Die Systeme S und S_I stehen daher in einer rationalen Verwandtschaft dritten Grades.

40. Konstruiert man zu den Punkten $A, B \dots$ eines durch \mathfrak{P} gehenden Kreises c die zugeordneten Punkte $A_I, B_I \dots$, so treffen sich die Normalen $AA_I, BB_I \dots$ in einem Punkte E von c (Fig. 16). Dann ist $\angle HA_I E = \angle HB_I E = \dots = \nu - \omega$; die Punkte $A_I, B_I \dots$ liegen daher auf einem Kreise c_I durch H und E sowie durch den Schnittpunkt D von c mit ψ . *Jedem durch \mathfrak{P} gehenden Kreise des Systems S entspricht also in S_I ein Kreis durch H .*

Sind \mathfrak{C} und \mathfrak{C}' die Mittelpunkte von c und c_I , so ist $\angle \mathfrak{C}M_\psi \mathfrak{C}' = 180^\circ - \angle HD\mathfrak{P} = 180^\circ - \nu$ und $\angle \mathfrak{C}'\mathfrak{C}M_\psi = 180^\circ - \angle \mathfrak{P}DE = \omega$, folglich $\triangle \mathfrak{C}M_\psi \mathfrak{C}' \sim \triangle AA_\psi A_I$. *Die Kreismittelpunkte \mathfrak{C} und \mathfrak{C}' bilden demnach zwei ähnliche Systeme mit M_ψ als selbstentsprechendem Punkt.*

Den Kreisen, die ψ in \mathfrak{P} berühren, entspricht hiernach in S_I das Kreisbüschel mit den Grundpunkten \mathfrak{P} und H . Insbesondere ist dem „ausgezeichneten“ Kreis k der Fig. 11 (Art. 34) als k_I der Kreis κ zugeordnet; denn die zugehörigen Mittelpunkte M_k, M_κ bilden mit M_ψ ein Dreieck, das bei M_k den Winkel ω , bei M_ψ den Außenwinkel $\varphi_H = \nu$ enthält. *Dem „ausgezeichneten“ Kreis k entspricht also im System*

S_I derselbe Kreis κ , wie im System Σ der Krümmungsmittelpunkte der Bahnkurven.¹⁾

41. Wir schließen analog wie früher bei der Verwandtschaft der Systeme S und Σ : Jeder Kurve n ter Ordnung a , die weder \mathfrak{P} noch die imaginären Kreispunkte enthält, entspricht in S_I eine Kurve $3n$ ter

Ordnung a_I , die $2n$ mal durch H geht und in \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 n mal die Geraden $M_I\mathfrak{S}_1$ und $M_I\mathfrak{S}_2$ berührt.

Geht jedoch a durch \mathfrak{P} , so wird die Ordnung von a_I um zwei vermindert. Es gibt aber keine Durchgangsrichtung durch \mathfrak{P} , die eine weitere Verminderung der Ordnung von a_I zur Folge hätte; denn jedem durch \mathfrak{P} gehenden Kreise entspricht in S_I wieder ein Kreis und keinem eine Gerade. Gegenwärtig hat die Kurve a_I in H einen $2n-1$ fachen Punkt. Sie geht nur dann durch \mathfrak{P} , wenn a den Kreis ψ in diesem Punkte berührt.

Enthält a die imaginären Kreispunkte, so entsprechen diesen bereits ihre Verbindungslinien mit H , und a_I ist von der Ordnung $3n-2$.

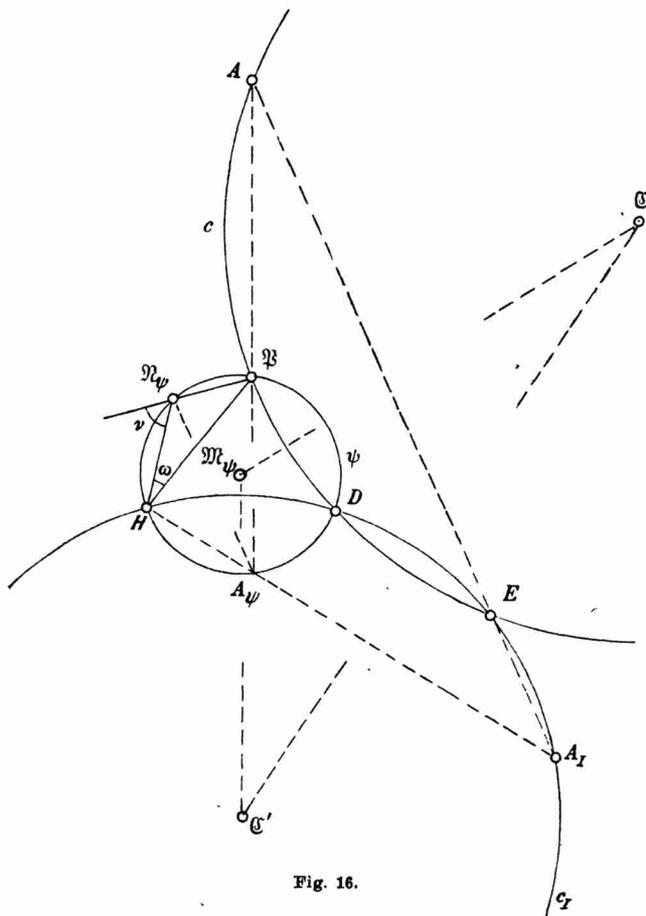


Fig. 16.

Die Kurve a schneidet den Kreis h außer in $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ noch $2n-2$ mal, folglich ist H ein $2n-2$ facher Punkt von a_I . Ferner trifft a die unendlich ferne Gerade, von $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ abgesehen, in $n-2$ Punkten; dasselbe gilt also von a_I , folglich hat a_I in jedem der imaginären Kreispunkte einen n fachen Punkt. Von den $6n-4$ Schnittpunkten des Kreises p_I mit a_I kommen $2n-2$ auf H , also die übrigen $4n-2$ auf die ima-

1) Grouard a. a. O. S. 125, Geisenheimer a. a. O. S. 154.

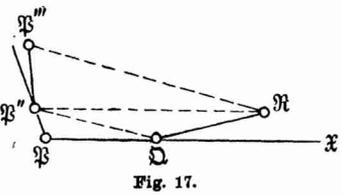
ginären Kreispunkte. Die Gerade $M_I \mathfrak{S}_1$ hat daher in \mathfrak{S}_1 $2n - 1$ Punkte mit a_I gemein, d. h. sie berührt a_I $n - 1$ mal in \mathfrak{S}_1 . Diese $n - 1$ Durchgänge von a_I durch \mathfrak{S}_1 entsprechen den $n - 1$ von \mathfrak{S}_1 verschiedenen Schnittpunkten von a mit der Geraden $\mathfrak{P} \mathfrak{S}_1$. Dem Punkte \mathfrak{S}_1 der Kurve a ist ein weiterer Durchgang von a_I durch \mathfrak{S}_1 zugeordnet, aber nicht in der Richtung $M_I \mathfrak{S}_1$. Ist nämlich \mathfrak{C} das Fokalzentrum von a und konstruieren wir wie in Fig. 16 das Dreieck $\mathfrak{C} \mathfrak{M}_\nu \mathfrak{C}'$, das bei \mathfrak{C} und \mathfrak{M}_ν bzw. die Winkel ω und $180^\circ - \nu$ enthält, so ist \mathfrak{C}' ein Fokalzentrum von a_I , und dem Punkte \mathfrak{S}_1 von a entspricht auf a_I derselbe Punkt mit der Tangente $\mathfrak{C}' \mathfrak{S}_1$.

Hat aber die Kurve a den Punkt M zum Fokalzentrum, so schneidet sie alle Kurven dritter Ordnung, die den Geraden von S_I entsprechen, außer in \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 noch in $3n - 4$ Punkten. Ebenso oft trifft also die Kurve a_I die Geraden des Systems S_I , d. h. a_I ist von der Ordnung $3n - 4$. Von den imaginären Kreispunkten abgesehen, hat also a mit dem Kreise h noch $2n - 4$, und mit der unendlich fernen Geraden noch $n - 2$ Punkte gemein; daraus ergibt sich wie oben, daß die Kurve a_I den Punkt H $2n - 4$ mal und jeden der imaginären Kreispunkte $n - 1$ mal enthält. Der Kreis p_I schneidet a_I in $6n - 8$ Punkten, von denen $2n - 4$ auf H , also je $2n - 2$ auf \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 entfallen; der Punkt M_I zählt daher $n - 1$ mal als Fokalzentrum von a_I .

Für $n = 2$ folgt hieraus: *Jedem Kreis um M ist in S_I ein Kreis um M_I zugeordnet.* Demnach entsprechen einander in S und S_I die Geraden, die einen der imaginären Kreispunkte mit M und M_I verbinden.

IV. Die Bewegung des Systems durch vier und durch fünf unendlich benachbarte Phasen.

42. *Der Pol als Systempunkt.* Der Systempunkt, der in der Phase S mit \mathfrak{P} zusammenfällt, bleibt in der Phase S' an derselben Stelle und gelangt in den Phasen S'' , $S''' \dots$ bzw. in die Lagen \mathfrak{P}'' , $\mathfrak{P}''' \dots$ (Fig. 17). Sind \mathfrak{D} und \mathfrak{R} die Pole für den Übergang des Systems aus S' in S'' und aus S'' in S''' , so ist $\angle \mathfrak{P} \mathfrak{D} \mathfrak{P}'' = d\vartheta + d^2\vartheta$, $\angle \mathfrak{P}'' \mathfrak{R} \mathfrak{P}''' = d\vartheta + 2d^2\vartheta + d^3\vartheta$ und $\mathfrak{P}'' \mathfrak{D} = \mathfrak{P} \mathfrak{D} (1 + d\lambda + d^2\lambda)$, $\mathfrak{P}''' \mathfrak{R} = \mathfrak{P}'' \mathfrak{R} (1 + d\lambda + 2d^2\lambda + d^3\lambda)$. Wir setzen der Einfachheit wegen $\mathfrak{D} \mathfrak{R} = \mathfrak{P} \mathfrak{D} = ds$, betrachten also die Bogenlänge der Polbahn als unabhängige Variable.¹⁾



1) Der singuläre Fall, daß \mathfrak{D} mit \mathfrak{P} identisch ist, wird dadurch von der Betrachtung ausgeschlossen.

Der Krümmungsradius r der Bahnkurve des Punktes \mathfrak{P} ist gleich dem Radius des dem Dreieck $\mathfrak{P}\mathfrak{P}''\mathfrak{P}'''$ umgeschriebenen Kreises; bedeutet demnach $d\iota$ den Außenwinkel bei \mathfrak{P}'' , so folgt

$$(41) \quad r = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{P}''}{2d\iota}.$$

Um $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'''$ und $d\iota$ zu berechnen, bezeichnen wir den Kontingenzwinkel der Polbahn bei \mathfrak{Q} mit $d\tau$ und schreiben zur Abkürzung $\angle \mathfrak{P}''\mathfrak{P}\mathfrak{Q} = \alpha$, $\angle \mathfrak{P}'''\mathfrak{P}''\mathfrak{R} = \beta$, $\angle \mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{P}'' = d\delta$, $\angle \mathfrak{P}''\mathfrak{R}\mathfrak{P}''' = d\varepsilon$, $\angle \mathfrak{R}\mathfrak{P}''\mathfrak{Q} = d\kappa$. Dann ist unter Vernachlässigung unendlich kleiner Größen dritter Ordnung

$$\mathfrak{P}\mathfrak{P}'' = ds\sqrt{d\vartheta^2 + d\lambda^2}$$

und

$$\mathfrak{P}''\mathfrak{R} = \mathfrak{Q}\mathfrak{R} + \mathfrak{P}''\mathfrak{Q} = ds(2 + d\lambda),$$

folglich

$$\mathfrak{P}''\mathfrak{P}''' = \mathfrak{P}''\mathfrak{R}\sqrt{d\vartheta^2 + d\lambda^2} = 2ds\sqrt{d\vartheta^2 + d\lambda^2},$$

mithin

$$\mathfrak{P}\mathfrak{P}''' = \mathfrak{P}\mathfrak{P}'' + \mathfrak{P}''\mathfrak{P}''' = 3ds\sqrt{d\vartheta^2 + d\lambda^2}.$$

Ferner ergibt sich

$$\begin{aligned} d\iota &= 180^\circ - \angle \mathfrak{Q}\mathfrak{P}''\mathfrak{P} - d\kappa - \beta = \alpha + d\delta - d\kappa - \beta \\ &= d\vartheta + d^2\vartheta - d\kappa + (\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Im Dreieck $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}\mathfrak{P}''$ ist aber nach dem Sinussatz

$$d\kappa = \frac{ds \sin(d\delta + d\tau)}{\mathfrak{P}''\mathfrak{R}} = \frac{d\vartheta + d\tau + d^2\vartheta}{2 + d\lambda} = \frac{1}{2}(d\vartheta + d\tau) - \frac{1}{4}d\lambda(d\vartheta + d\tau) + \frac{1}{2}d^2\vartheta.$$

Aus dem Dreieck $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{P}''$ folgt weiter

$$\mathfrak{P}\mathfrak{P}'' \sin \alpha = \mathfrak{P}''\mathfrak{Q} \sin d\delta$$

und

$$\mathfrak{P}\mathfrak{P}'' \cos \alpha = \mathfrak{P}\mathfrak{Q} - \mathfrak{P}''\mathfrak{Q} \cos d\delta;$$

ebenso ist

$$\mathfrak{P}''\mathfrak{P}''' \sin \beta = \mathfrak{P}'''\mathfrak{R} \sin d\varepsilon$$

und

$$\mathfrak{P}''\mathfrak{P}''' \cos \beta = \mathfrak{P}''\mathfrak{R} - \mathfrak{P}'''\mathfrak{R} \cos d\varepsilon,$$

also

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}\mathfrak{P}'' \cdot \mathfrak{P}''\mathfrak{P}''' \sin(\alpha - \beta) &= \mathfrak{P}''\mathfrak{Q} \sin d\delta (\mathfrak{P}''\mathfrak{R} - \mathfrak{P}'''\mathfrak{R} \cos d\varepsilon) \\ &\quad - \mathfrak{P}'''\mathfrak{R} \sin d\varepsilon (\mathfrak{P}\mathfrak{Q} - \mathfrak{P}''\mathfrak{Q} \cos d\delta) \\ &= \mathfrak{P}''\mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{P}''\mathfrak{R} \sin d\delta - \mathfrak{P}\mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{P}'''\mathfrak{R} \sin d\varepsilon \\ &\quad + \mathfrak{P}''\mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{P}'''\mathfrak{R} \sin(d\varepsilon - d\delta) \\ &= \mathfrak{P}\mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{P}''\mathfrak{R} \{ (1 + d\lambda + d^2\lambda) \sin(d\vartheta + d^2\vartheta) \\ &\quad - (1 + d\lambda + 2d^2\lambda + d^3\lambda) \sin(d\vartheta + 2d^2\vartheta + d^3\vartheta) \\ &\quad + (1 + d\lambda + d^2\lambda)(1 + d\lambda + 2d^2\lambda + d^3\lambda) \cdot \\ &\quad \cdot \sin(d^2\vartheta + d^3\vartheta) \}. \end{aligned}$$

Setzen wir hier für $\mathfrak{P}\mathfrak{P}''$, $\mathfrak{P}''\mathfrak{P}'''$ und $\mathfrak{P}''\mathfrak{R}$ die vorhin erhaltenen Werte und entwickeln die rechte Seite bis auf unendlich kleine Größen vierter Ordnung, so finden wir nach einfacher Rechnung

$$2(d\vartheta^2 + d\lambda^2) \sin(\alpha - \beta) = 2(d\lambda d^2\vartheta - d\vartheta d^2\lambda) + d\vartheta^2 d^2\vartheta + 3d\lambda^2 d^2\vartheta - d\vartheta d\lambda d^2\lambda + 2(d\lambda d^3\vartheta - d\vartheta d^3\lambda),$$

also nach Gleichung (2)

$$\alpha - \beta = -d\omega + \frac{1}{2(d\vartheta^2 + d\lambda^2)} \{d^2\vartheta(d\vartheta^2 + 3d\lambda^2) - d\vartheta d\lambda d^2\lambda + 2(d\lambda d^3\vartheta - d\vartheta d^3\lambda)\}.$$

Hieraus folgt endlich

$$2d\iota = (d\vartheta - d\tau - 2d\omega) + \frac{1}{2}d\lambda(d\vartheta + d\tau) + \frac{1}{d\vartheta^2 + d\lambda^2} \{d^2\vartheta(d\vartheta^2 + 3d\lambda^2) - d\vartheta d\lambda d^2\lambda + 2(d\lambda d^3\vartheta - d\vartheta d^3\lambda)\}.$$

Auf der rechten Seite der Gleichung (41) ist demnach der Zähler eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung, der Nenner eine solche erster Ordnung, und demnach wird $r = 0$. Der mit dem Pol \mathfrak{P} zusammenfallende Systempunkt beschreibt daher im allgemeinen eine Spitze vom Krümmungsradius Null. Eine Ausnahme bildet aber der Fall

$$d\tau = d\vartheta - 2d\omega;$$

dann ist nämlich auch $d\iota$ unendlich klein von der zweiten Ordnung, und der Punkt \mathfrak{P} erzeugt eine Schnabelspitze von nicht verschwindendem Krümmungsradius

$$r = \frac{3ds\sqrt{(d\vartheta^2 + d\lambda^2)^3}}{d\vartheta d\lambda(d\vartheta^2 + d\lambda^2) + d^2\vartheta(2d\vartheta^2 + 5d\lambda^2) - 2d\vartheta d\lambda d^2\lambda + 2(d\lambda d^3\vartheta - d\vartheta d^3\lambda)}.$$

Wir kommen auf diesen Sonderfall noch mehrfach zurück. — Ist das System *starr*, also $d\lambda = d^2\lambda = d^3\lambda = d\omega = 0$, und ist zugleich $d\tau = d\vartheta$, so erhält die letzte Gleichung die einfache Form

$$r = \frac{3dsd\vartheta \cdot 1}{2d^2\vartheta}.$$

43. Die Punkte stationärer Krümmung. Bezeichnen wir mit A , A' , A'' , A''' die Lagen eines Systempunkts in den Phasen S bis S''' , mit r und $r + d\tau$ die Krümmungsradien seiner Bahnkurve in A und A' , so ist nach Gleichung (14)

$$r = \frac{\mu r^2}{r - b_w \sin \varphi},$$

wenn zur Abkürzung die Konstante

$$(42) \quad \frac{\sin \chi}{\sin(\chi - \omega)} = \frac{\sqrt{d\vartheta^2 + d\lambda^2}}{d\vartheta - d\omega} = -\mu$$

1) R. Müller, Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1897, Bd. 42, S. 256.

gesetzt wird. Soll der Punkt A''' auf dem durch A, A', A'' bestimmten Kreise liegen, so muß $dr = 0$ sein, und hieraus ergibt sich für die Koordinaten r, φ des Punktes A die Bedingung

$$(43) \quad (r - \mathfrak{b}_w \sin \varphi)(2\mu dr + r d\mu) - \mu r(dr - \mathfrak{b}_w \cos \varphi d\varphi - d\mathfrak{b}_w \sin \varphi) = 0.$$

Nun ist in Fig. 18

$$r + dr = \mathfrak{D}A' = \mathfrak{P}A' - ds \cos \varphi = r(1 + d\lambda) - ds \cos \varphi,$$

folglich

$$(44) \quad dr = r d\lambda - ds \cos \varphi.$$

Ferner ist $\angle A' \mathfrak{D} \mathfrak{R} = \varphi + d\varphi$; bezeichnen wir also den Winkel $\mathfrak{D}A'\mathfrak{P}$ wie in Art. 1 mit $d\kappa$, so folgt aus der Figur

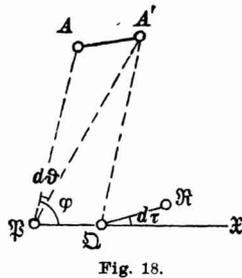


Fig. 18.

$$\text{also} \quad \varphi + d\varphi + d\tau = \varphi - d\vartheta + d\kappa,$$

$$d\varphi = d\kappa - (d\vartheta + d\tau).$$

Hier ist aber

$$d\kappa = \frac{ds \sin \varphi}{r},$$

mithin ergibt sich

$$(45) \quad r d\varphi = ds \sin \varphi - r(d\vartheta + d\tau).$$

Mit Rücksicht auf (44) und (45) geht Gleichung (43) über in

$$\begin{aligned} & r^2(\mu d\lambda + d\mu) \\ & - r\{\mu[ds + \mathfrak{b}_w(d\vartheta + d\tau)] \cos \varphi + [\mathfrak{b}_w(2\mu d\lambda + d\mu) - \mu d\mathfrak{b}_w] \sin \varphi\} \\ & + \mathfrak{P}\mu \mathfrak{b}_w ds \cos \varphi \sin \varphi = 0. \end{aligned}$$

Setzen wir noch

$$(46) \quad \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{b}_w} \left(\frac{d\lambda}{ds} + \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{ds} \right) = \mathfrak{E},$$

$$(47) \quad \frac{1}{\mathfrak{P}} \left(\frac{1}{\mathfrak{b}_w} + \frac{d\vartheta + d\tau}{ds} \right) = \mathfrak{F},$$

$$(48) \quad \frac{1}{\mathfrak{P}} \left(2 \frac{d\lambda}{ds} + \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{ds} - \frac{1}{\mathfrak{b}_w} \frac{d\mathfrak{b}_w}{ds} \right) = \mathfrak{G},$$

so erhalten wir für den Ort der Punkte mit stationärem Krümmungskreis, oder für die *Kreispunktkurve* c der Phase S die Gleichung

$$(49) \quad \mathfrak{E}r^2 - r(\mathfrak{F} \cos \varphi + \mathfrak{G} \sin \varphi) + \cos \varphi \sin \varphi = 0,$$

oder in rechtwinkligen Koordinaten

$$(50) \quad \mathfrak{E}(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)(\mathfrak{F}x + \mathfrak{G}y) + xy = 0.$$

Die Kreispunktkurve ist also eine bizirkulare Kurve vierter Ordnung; sie hat in \mathfrak{P} einen Doppelpunkt mit den Tangenten $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{Y}$.¹⁾

Bestimmen wir den Übergang des Systems aus der Phase S in die unendlich benachbarte S' durch Angabe des Pols \mathfrak{P} und des Winkels ω , die folgende Phase S'' durch die Polbahntangente $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ und die Durchmesser \mathfrak{d}_w und \mathfrak{d}_v des Wende- und Rückkehrkreises, so können wir jede bizirkulare Kurve vierter Ordnung, die in \mathfrak{P} die Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{Y}$ berührt, als Kreispunktkurve betrachten und hierdurch eine vierte Phase S''' definieren.

Der Kurve c entspricht in der festen Ebene Σ als Ort der zugehörigen Krümmungsmittelpunkte eine Kurve γ von der Ordnung $3 \cdot 4 - 3 - 2 \cdot 2 = 5$. Sie berührt in ihrem Doppelpunkt \mathfrak{P} die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{Y}$, aber nicht $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$, hat ferner die imaginären Kreispunkte zu Doppelpunkten und überdies einen reellen unendlich fernen Punkt, der dem Schnittpunkte W von c mit dem Wendekreise entspricht.

Für $\mathfrak{C} = 0$ spaltet sich die Kreispunktkurve in die unendlich ferne Gerade und eine Fokalkurve dritter Ordnung. Dieser Fall liegt z. B. vor bei der Bewegung eines starren Systems; dann ist nämlich $d\lambda = d\omega = 0$, $\mathfrak{d}_w = \frac{ds}{d\vartheta}$, also nach (42) $\mu = -1$ und $d\mu = 0$, folglich $\mathfrak{C} = 0$, $\mathfrak{F} = \frac{2d\vartheta + d\tau}{3ds}$ und $\mathfrak{G} = \frac{d^2\vartheta}{3dsd\vartheta}$. Die Kurve kann ferner ausarten in zwei Kreise, die sich in \mathfrak{P} rechtwinklig durchschneiden ($\mathfrak{C} = \mathfrak{F}\mathfrak{G}$), oder in die unendlich ferne Gerade, die Polbahntangente und einen Kreis, der $\mathfrak{P}\mathfrak{Y}$ in \mathfrak{P} berührt ($\mathfrak{C} = \mathfrak{F} = 0$), usw.

44. Die durch Gleichung (50) dargestellte Kurve c ist das Erzeugnis der projektiven Kreisbüschel

$$x^2 + y^2 - \mathfrak{d}y = 0$$

und

$$x^2 + y^2 - \mathfrak{d}'x = 0,$$

deren Parameter \mathfrak{d} und \mathfrak{d}' durch die Gleichung verbunden sind

$$(51) \quad \mathfrak{C}\mathfrak{d}\mathfrak{d}' - \mathfrak{F}\mathfrak{d} - \mathfrak{G}\mathfrak{d}' + 1 = 0.$$

Trifft ein Kreis des ersten Büschels die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{Y}$ in \mathfrak{A} und der zugeordnete des zweiten die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ in \mathfrak{A}' , so schneiden sich beide Kreise im Fußpunkt A des von \mathfrak{P} auf $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ gefällten Lotes, und dann liegt A auf c . Die Kreisbüschel bestimmen auf $\mathfrak{P}\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ zwei pro-

1) Vgl. Rodenberg, Über die während der Bewegung projektiv veränderlicher und starrer Systeme beschriebenen Kurven und Flächen. Göttinger Nachrichten 1888, S. 181.

denen $\mathfrak{P}\mathfrak{Y}$ den ersten und $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ den zweiten dieser Krümmungskreise schneidet, und durch den Punkt \mathfrak{Y}_c , so ist $\mathfrak{R}\mathfrak{L}'$ die perspektive Achse der projektiven Punktreihen $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \dots$ und $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}' \dots$, folglich $\mathfrak{Y}_c\mathfrak{X}_c \parallel \mathfrak{R}\mathfrak{L}'$.

Der Schnittpunkt W des Wendekreises w mit c beschreibt momentan eine Bahnstelle mit vierpunktig berührender Tangente; wir nennen ihn wie bei starren Systemen den *Ballschen Punkt* der Phase S . Konstruieren wir zum Punkte \mathfrak{Y}_w , in dem w die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{Y}$ schneidet, den entsprechenden Punkt \mathfrak{Y}'_w der Punktreihe $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}' \dots$, so ist W der Fußpunkt des Lotes von \mathfrak{P} auf $\mathfrak{Y}_w\mathfrak{Y}'_w$.

Im Sonderfall $d\tau = d\vartheta - 2d\omega$ wird nach Gleichung (47) $\mathfrak{F} = \frac{1}{\mathfrak{b}_w}$, folglich $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{b}_w$. Beschreibt also der Punkt \mathfrak{P} eine Schnabelspitze von endlicher Krümmung, so oskuliert der Wendekreis die Kreispunktkurve in \mathfrak{P} , d. h. \mathfrak{P} ist zugleich der *Ballsche Punkt* der betrachteten Phase.

45. Durch die Kreispunktkurve sind auch die *Krümmungsradien* p und π der Polkurve — in der Ebene S — und der Polbahn — in der Ebene Σ — im Punkte \mathfrak{P} bestimmt. Da nämlich $d\tau$ den Kontingenzwinkel der Polbahn im Punkte \mathfrak{Q} bedeutet, so ist

$$(54) \quad \frac{1}{\pi} = \frac{d\tau}{ds}.$$

Sind ferner Q und R die Punkte der Polkurve, die nacheinander mit den Punkten \mathfrak{Q} und \mathfrak{R} der Polbahn zusammenfallen, so gelangt das Element QR aus der Lage $\mathfrak{Q}R'$ nach $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ durch eine Drehung um \mathfrak{Q} durch den Winkel $d\vartheta + d^2\vartheta$ und durch die entsprechende Vergrößerung, der Kontingenzwinkel der Polkurve bei Q ist also gleich $d\tau + d\vartheta + d^2\vartheta$; hieraus folgt

$$(55) \quad \frac{1}{p} = \frac{d\tau + d\vartheta}{ds}.$$

Nun ist nach (53) und (47)

$$(56) \quad \begin{aligned} \frac{3}{\mathfrak{b}_0} &= \frac{1}{\mathfrak{b}_w} + \frac{d\vartheta + d\tau}{ds} \\ &= \frac{1}{\mathfrak{b}_w} + \frac{1}{p}; \end{aligned}$$

machen wir daher in Fig. 19 auf $\mathfrak{P}\mathfrak{Y}$ die Strecke $\mathfrak{P}\mathfrak{R}_1 = \frac{2}{3}\mathfrak{P}\mathfrak{R}$ und bezeichnen mit M den Krümmungsmittelpunkt der Polkurve in \mathfrak{P} , so wird

$$\frac{2}{\mathfrak{P}\mathfrak{R}_1} = \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{Y}_w} + \frac{1}{\mathfrak{P}M},$$

d. h. M ist der vierte harmonische Punkt zu \mathfrak{P} , \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{Y}_w .

Aus (54) und (55) folgt weiter

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{\pi} = \frac{d\vartheta}{ds}$$

oder nach (7) und (8)

$$(57) \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{\pi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b_w} - \frac{1}{b_\psi} \right).$$

Für $b_\psi = -b_w$, also z. B. im Fall eines *starr*en Systems, ergibt sich hieraus die bekannte Formel

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{\pi} = \frac{1}{b_w}.$$

Nach Gleichung (57) läßt sich auch der Krümmungsradius π in einfacher Weise konstruieren.

Ist $d\tau = d\vartheta - 2d\omega$, so folgt aus (56) $p = \frac{1}{2}b_w$, dann *oskuliert also der Wendekreis auch die Polkurve im Punkte* \mathfrak{P} .

46. Soll die Bahnkurve des Punktes A mit ihrem Krümmungskreise *fünf* unendlich benachbarte Punkte gemein haben, so muß A nicht nur der Kurve c , sondern auch der Kreispunktkurve der Phase S' angehören; seine Koordinaten r, φ genügen also außer der Gleichung (49) noch der Bedingung

$$\frac{d}{ds} \{ \mathfrak{E}r^2 - r(\mathfrak{F} \cos \varphi + \mathfrak{G} \sin \varphi) + \cos \varphi \sin \varphi \} = 0$$

oder

$$(58) \quad r^2 \frac{d\mathfrak{E}}{ds} - r \left(\frac{d\mathfrak{F}}{ds} \cos \varphi + \frac{d\mathfrak{G}}{ds} \sin \varphi \right) + \frac{dr}{ds} (2\mathfrak{E}r - \mathfrak{F} \cos \varphi - \mathfrak{G} \sin \varphi) + \frac{d\varphi}{ds} \{ r(\mathfrak{F} \sin \varphi - \mathfrak{G} \cos \varphi) + \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \} = 0.$$

Hier ist nach (44) und (45)

$$\frac{dr}{ds} = r \frac{d\lambda}{ds} - \cos \varphi$$

und

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\sin \varphi}{r} - \frac{d\vartheta + d\tau}{ds}$$

oder nach (47)

$$= \frac{\sin \varphi}{r} + \frac{1}{b_w} - 3\mathfrak{F}.$$

Setzen wir noch zur Abkürzung

$$2\mathfrak{E} \frac{d\lambda}{ds} + \frac{d\mathfrak{E}}{ds} = \mathfrak{E}'$$

$$2\mathfrak{E} + \mathfrak{F} \frac{d\lambda}{ds} + \frac{b\mathfrak{F}}{ds} + \frac{\mathfrak{G}}{b_w} - 3\mathfrak{F}\mathfrak{G} = \mathfrak{F}'$$

$$\mathfrak{G} \frac{d\lambda}{ds} + \frac{d\mathfrak{G}}{ds} - \frac{\mathfrak{F}}{b_w} + 3\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{G}'$$

so geht Gleichung (58) über in

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}' r^3 - r^2 (\mathfrak{F}' \cos \varphi + \mathfrak{G}' \sin \varphi) + r \left\{ \left(\frac{1}{\mathfrak{d}_w} - 2\mathfrak{F} \right) \cos^2 \varphi + \left(4\mathfrak{F} - \frac{1}{\mathfrak{d}_w} \right) \sin^2 \varphi \right\} \\ (59) \quad + \sin \varphi (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = 0. \end{aligned}$$

Dabei sind \mathfrak{E}' , \mathfrak{F}' , \mathfrak{G}' drei Konstanten, die gerade ausreichen, um den Übergang des Systems aus der Phase S'' in die folgende Phase zu definieren. Bezeichnen wir wieder mit \mathfrak{d} den Durchmesser des durch den Punkt $A(r, \varphi)$ gehenden Kreises, der $\mathfrak{B}\mathfrak{X}$ in \mathfrak{B} berührt, setzen also in (49) und (59) $r = \mathfrak{d} \sin \varphi$, so ergibt sich durch Elimination von $\tan \varphi$ für \mathfrak{d} die Gleichung

$$\begin{aligned} \left\{ \mathfrak{E}' \mathfrak{d}^3 - \mathfrak{G}' \mathfrak{d}^2 + \left(4\mathfrak{F} - \frac{1}{\mathfrak{d}_w} \right) \mathfrak{d} - 1 \right\} (\mathfrak{F} \mathfrak{d} - 1)^2 - \mathfrak{F}' \mathfrak{d}^3 (\mathfrak{F} \mathfrak{d} - 1) (\mathfrak{E} \mathfrak{d} - \mathfrak{G}) \\ (60) \quad + \mathfrak{d}^2 (\mathfrak{E} \mathfrak{d} - \mathfrak{G})^2 \left\{ \left(\frac{1}{\mathfrak{d}_w} - 2\mathfrak{F} \right) \mathfrak{d} + 1 \right\} = 0, \end{aligned}$$

oder nach Potenzen von \mathfrak{d} geordnet

$$\left\{ \mathfrak{E}' \mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E} \mathfrak{F} \mathfrak{F}' + \mathfrak{E}^2 \left(\frac{1}{\mathfrak{d}_w} - 2\mathfrak{F} \right) \right\} \mathfrak{d}^5 + \dots + \left(6\mathfrak{F} - \frac{1}{\mathfrak{d}_w} \right) \mathfrak{d} - 1 = 0.$$

Es gibt also in der Phase S im allgemeinen fünf Punkte $A_1, A_2 \dots A_5$, von denen jeder eine Bahnstelle mit fünfpunktig berührendem Krümmungskreis beschreibt; entsprechend der bei starren Systemen eingeführten Bezeichnung¹⁾ nennen wir sie die *Burmesterschen Punkte* der betrachteten Phase.

Aus der letzten Gleichung folgt für ihre fünf Wurzeln $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2 \dots \mathfrak{d}_5$

$$\sum_{i=1}^{i=5} \frac{1}{\mathfrak{d}_i} = 6\mathfrak{F} - \frac{1}{\mathfrak{d}_w};$$

aber nach (53) ist $\mathfrak{F} = \frac{1}{\mathfrak{d}_0}$, mithin besteht zwischen den fünf Größen \mathfrak{d}_i , dem Durchmesser \mathfrak{d}_w des Wendekreises und dem Durchmesser \mathfrak{d}_0 des Krümmungskreises der Kreispunktkurve die einfache Beziehung

$$(61) \quad \sum_{i=1}^{i=5} \frac{1}{\mathfrak{d}_i} + \frac{1}{\mathfrak{d}_w} = \frac{6}{\mathfrak{d}_0}.$$

In dem wiederholt erwähnten Sonderfall $d\tau = d\vartheta - 2d\omega$ ist $\mathfrak{F} = \frac{1}{\mathfrak{d}_w}$, folglich $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_w$ eine Wurzel der Gleichung (60). Der Pol \mathfrak{B} , der momentan eine Schnabelspitze von endlicher Krümmung beschreibt,

1) R. Müller, Über die Bewegung eines starren ebenen Systems durch fünf unendlich benachbarte Lagen, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1892. Bd. 37, S. 145.

zählt also für einen der Burmesterschen Punkte, und für die übrigen vier gilt nach (61), da jetzt $b_0 = b_w$ ist, die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{i=4} \frac{1}{b_i} = \frac{4}{b_w}.$$

47. Multiplizieren wir Gleichung (49) mit $2 \cos \varphi$ und subtrahieren sie von (59), so erhalten wir für die Koordinaten der Burmesterschen Punkte die Gleichung

$$\begin{aligned} & \mathfrak{G}' r^3 - r^2 \{ (2\mathfrak{E} + \mathfrak{F}') \cos \varphi + \mathfrak{G}' \sin \varphi \} \\ & + r \left\{ \frac{1}{b_w} \cos^2 \varphi + 2\mathfrak{G} \cos \varphi \sin \varphi + \left(4\mathfrak{F} - \frac{1}{b_w} \right) \sin^2 \varphi \right\} - \sin \varphi = 0 \end{aligned}$$

oder in rechtwinkligen Koordinaten

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathfrak{E}'(x^2 + y^2) - (2\mathfrak{E} + \mathfrak{F}')x - \mathfrak{G}'y + \frac{1}{b_w} \right\} (x^2 + y^2) \\ (62) \quad & + \left\{ 2\mathfrak{G}x + 2\left(2\mathfrak{F} - \frac{1}{b_w} \right)y - 1 \right\} y = 0. \end{aligned}$$

Schreiben wir ferner die Gleichung der Kreispunktkurve in der Form

$$(63) \quad \left\{ \mathfrak{E}(x^2 + y^2) - \mathfrak{F}x - \mathfrak{G}y \right\} (x^2 + y^2) + xy = 0$$

und multiplizieren (62) mit x und (63) mit $2\mathfrak{G}x + 2\left(2\mathfrak{F} - \frac{1}{b_w} \right)y - 1$, so ergibt sich durch Subtraktion

$$(64) \quad x \left\{ \mathfrak{E}'(x^2 + y^2) - (2\mathfrak{E} + \mathfrak{F}')x - \mathfrak{G}'y + \frac{1}{b_w} \right\} - \left\{ 2\mathfrak{G}x + 2\left(2\mathfrak{F} - \frac{1}{b_w} \right)y - 1 \right\} \left\{ \mathfrak{E}(x^2 + y^2) - \mathfrak{F}x - \mathfrak{G}y \right\} = 0.$$

Die fünf Burmesterschen Punkte sind also die Schnittpunkte der Kreispunktkurve c mit der durch die letzte Gleichung dargestellten Kurve dritter Ordnung \mathfrak{h} , die mit c überdies die imaginären Kreispunkte und den Punkt \mathfrak{P} , sowie den Punkt \mathfrak{Q}_c ($x = 0, y = \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}$) gemein hat.

Die Kurve \mathfrak{h} schneidet \mathfrak{PQ} noch in einem Punkte \mathfrak{Z} , der durch die Gleichung bestimmt ist,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \cdot \mathfrak{PZ}} &= 2\mathfrak{F} - \frac{1}{b_w} \\ &= \frac{2}{b_0} - \frac{1}{b_w}. \end{aligned}$$

Bedeutet in Fig. 19 \mathfrak{Z}_1 den vierten harmonischen Punkt zu \mathfrak{P} , \mathfrak{R} und \mathfrak{Q}_w , so ist \mathfrak{Z} der Mittelpunkt von \mathfrak{PZ}_1 . — Die Gerade

$$(65) \quad \left(\frac{1}{b_w} - \mathfrak{F} \right) x - \mathfrak{G}y = 0$$

ist die Tangente von \mathfrak{h} in \mathfrak{P} . Um ihre geometrische Bedeutung zu erkennen, multiplizieren wir die Gleichung des Wendekreises w

$$\frac{1}{\mathfrak{b}_w}(x^2 + y^2) - y = 0$$

mit x und addieren sie zur Gleichung (63) der Kurve c . Dann folgt

$$\mathfrak{G}(x^2 + y^2) + \left(\frac{1}{\mathfrak{b}_w} - \mathfrak{F}\right)x - \mathfrak{G}y = 0$$

als Gleichung eines Kreises, der die Schnittpunkte \mathfrak{P} und W von w und c enthält. Er geht überdies durch \mathfrak{Y}_c und berührt in \mathfrak{P} die durch (65) dargestellte Gerade, und diese ist somit bestimmt als Tangente des durch die drei Punkte gegebenen Kreises. *Vier unendlich benachbarte Phasen liefern also für die Kurve dritter Ordnung \mathfrak{h} bereits sechs Daten, nämlich außer den imaginären Kreispunkten die Punkte \mathfrak{P} , \mathfrak{Y}_c und \mathfrak{Z} , sowie die Tangente \mathfrak{P} .* Definieren wir dann die Momentanbewegung des Systems für eine fünfte Phase durch drei der Burmesterschen Punkte, die wir auf der Kreispunktkurve beliebig annehmen dürfen, so ist \mathfrak{h} eindeutig bestimmt und damit auch der vierte und fünfte der Burmesterschen Punkte.

Bei starren Systemen ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}' = 0$, mithin spaltet sich die Kurve \mathfrak{h} in die unendlich ferne Gerade und einen durch \mathfrak{P} gehenden Kegelschnitt. Da gleichzeitig die Kreispunktkurve in die unendlich ferne Gerade und eine zirkuläre Kurve dritter Ordnung zerfällt, die in \mathfrak{P} einen Doppelpunkt hat, so reduziert sich die Anzahl der Burmesterschen Punkte auf vier. Für diese bleibt die Gleichung (61) bestehen, wenn $\mathfrak{b}_c = \infty$ gesetzt wird.

48. Bewegen sich zwei Punkte eines ähnlich veränderlichen Systems beständig auf zwei Geraden α und β , so ist der Kreis, der durch die augenblicklichen Lagen A und B der Punkte und durch den Schnittpunkt \mathfrak{X}_w von α und β gelegt wird, der Wendekreis w der betrachteten Phase S ; er enthält also den Pol \mathfrak{P} und den ihm unendlich benachbarten Punkt Q der Polkurve. Dann hat der Kreis der bewegten Ebene, der in der nächsten Phase S' zum Wendekreis wird, mit w die Punkte A , B und Q gemein, ist also mit w identisch, und dasselbe gilt von den Wendekreisen aller folgenden Phasen. Der Systemkreis w bleibt daher Wendekreis während des ganzen Verlaufs der Bewegung und ist zugleich der Ort aller Pole, also die Polkurve der bewegten Ebene. Alle Punkte von w bewegen sich auf Geraden durch \mathfrak{X}_w . Diese spezielle Bewegung eines ähnlich veränderlichen Systems wird von Burmester als *affine Bewegung* bezeichnet, weil alle nicht auf w liegenden Punkte affine Bahnen erzeugen, die \mathfrak{X}_w zum Affinitätspol haben.¹⁾

1) Burmester, Kinematik I, S. 886.

Gegenwärtig ist $p = \frac{1}{2} \mathfrak{b}_w$, also nach (55)

$$(66) \quad \frac{d\vartheta + d\tau}{ds} = \frac{2}{\mathfrak{b}_w}$$

und nach (47) $\mathfrak{F} = \frac{1}{\mathfrak{b}_w}$. Da der Wendekreis der Phase S' mit dem Kreise w' zusammenfällt, so ist ferner $d\mathfrak{b}_w = \mathfrak{b}_w d\lambda$, folglich nach (48)

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{3} \left(\frac{d\lambda}{ds} + \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{ds} \right),$$

mithin nach (46) $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}\mathfrak{G}$. Die Kreispunktkurve c zerfällt daher in den Wendekreis und einen Kreis v , der die Polbahnnormale $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ in \mathfrak{P} berührt, mit der Gleichung

$$(67) \quad \mathfrak{G}r - \cos \varphi = 0.$$

Systempunkte mit fünfpunktig berührenden Krümmungskreisen liegen nur auf v ; ihre Koordinaten r und φ genügen außer der Gleichung (67) noch der Bedingung

$$\frac{d}{ds}(\mathfrak{G}r - \cos \varphi) = r \frac{d\mathfrak{G}}{ds} + \mathfrak{G} \frac{dr}{ds} + \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds} = 0$$

oder nach (44), (45) und (66)

$$r^2 \left(\mathfrak{G} \frac{d\lambda}{ds} + \frac{d\mathfrak{G}}{ds} \right) - r \left(\mathfrak{G} \cos \varphi + \frac{2}{\mathfrak{b}_w} \sin \varphi \right) + \sin^2 \varphi = 0,$$

oder in rechtwinkligen Koordinaten

$$(x^2 + y^2)^2 \left(\mathfrak{G} \frac{d\lambda}{ds} + \frac{d\mathfrak{G}}{ds} \right) - (x^2 + y^2) \left(\mathfrak{G}x + \frac{2}{\mathfrak{b}_w} y \right) + y^2 = 0.$$

Setzen wir hier mit Rücksicht auf (67) $x^2 + y^2 = \frac{x}{\mathfrak{G}}$ und $y^2 = \frac{x}{\mathfrak{G}} - x^2$, so ergibt sich

$$\frac{x}{\mathfrak{G}} \left\{ \left(\frac{d\lambda}{ds} + \frac{1}{\mathfrak{G}} \frac{d\mathfrak{G}}{ds} - 2\mathfrak{G} \right) x - \frac{2}{\mathfrak{b}_w} y + 1 \right\} = 0;$$

Die Burmesterschen Punkte sind demnach die Schnittpunkte des Kreises v mit der Geraden

$$\left(\frac{d\lambda}{ds} + \frac{1}{\mathfrak{G}} \frac{d\mathfrak{G}}{ds} - 2\mathfrak{G} \right) x - \frac{2}{\mathfrak{b}_w} y + 1 = 0.$$

Bei der affinen Bewegung eines ähnlich veränderlichen Systems gibt es also in jeder Phase zwei Punkte mit fünfpunktig berührenden Krümmungskreisen; ihre Verbindungslinie geht durch den Mittelpunkt des Wendekreises.

Im Fall eines starren Systems erhalten wir die bekannte elliptische Bewegung, die auch durch das Rollen des Kreises w in einem doppelt so großen erzeugt wird. Dann geht der Kreis v in die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ über, und als einziger Burmesterscher Punkt bleibt daher der Mittelpunkt von w , der bekanntlich überhaupt einen Kreis durchläuft.

V. Bestimmung der Momentanbewegung des Systems durch die Bahnelemente dreier beliebigen Punkte.

49. Sind A, B, C die augenblicklichen Lagen dreier Systempunkte, n_A, n_B, n_C die zugehörigen Normalen ihrer Bahnkurven α, β, γ , so ergibt sich der Pol \mathfrak{P} im allgemeinen — und zwar eindeutig — aus der Bedingung, daß die Geraden $\mathfrak{P}A, \mathfrak{P}B, \mathfrak{P}C$ bzw. mit n_A, n_B, n_C denselben Winkel bilden. Hiernach ist \mathfrak{P} der gemeinsame Punkt der drei Kreise durch je zwei der gegebenen Punkte und durch den Schnittpunkt ihrer Normalen, und jener Winkel ist gleich ω nach der früher benutzten Bezeichnung; wir kennen also die Momentanbewegung des Systems für zwei unendlich benachbarte Phasen S und S' .

Zur Festlegung einer dritten Phase S'' , also des Wendekreises w und des Winkels χ , bedürfen wir der Krümmungsmittelpunkte A, B, Γ von α, β, γ in A, B und C . Ziehen wir in Fig. 3 die Gerade UA_w und verstehen unter \mathfrak{A}_2 ihren Schnittpunkt mit AA , so ist $\angle \mathfrak{P}A_w U = \chi - \omega$, also $\angle A\mathfrak{A}_2 U = \chi = \angle A\mathfrak{A}A_w$ und $\Delta \mathfrak{A}_2 AA_w \sim \Delta \mathfrak{A}AA$, mithin

$$\frac{A\mathfrak{A}_2}{AA_w} = \frac{A\mathfrak{A}}{AA}$$

Hierbei bedeutet \mathfrak{A} den Krümmungsmittelpunkt der Bahnkurve, die der Punkt A beschreiben würde, wenn das System starr und \mathfrak{P} der Pol, sowie w der Wendekreis wäre; demnach ist

$$A\mathfrak{A} \cdot AA_w = A\mathfrak{P}^2$$

und folglich

$$A\mathfrak{A}_2 = \frac{A\mathfrak{P}^2}{AA}$$

Ermitteln wir daher auf den Bahnnormalen $AA, BB, C\Gamma$ die Punkte $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{C}_2$ zufolge der letzten Gleichung, so erhalten wir U als den Punkt, dessen Verbindungslinien mit $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{C}_2$ die zugehörigen Normalen unter gleichen Winkeln schneiden. Damit ist der Winkel χ gefunden und zugleich der Wendekreis w ; denn dieser geht durch \mathfrak{P} und U und durch den Schnittpunkt A_w von $\mathfrak{P}A$ und $U\mathfrak{A}_2$.¹⁾

Die Bestimmung einer vierten Phase S''' , d. h. der Kreispunktkurve c , würde im allgemeinen die Kenntnis der Krümmung der Evoluten von α, β, γ erfordern, sie gestaltet sich aber sehr einfach, wenn sich die Punkte A, B, C gerade in Bahnstellen mit stationären Krümmungskreisen befinden, oder wenn sie sich überhaupt auf Kreisen bewegen.²⁾

1) Grouard a. a. O. S. 85, Geisenheimer a. a. O. S. 145.

2) In diesem interessanten Sonderfall bewegen sich alle übrigen Systempunkte — wie wir hier nur beiläufig erwähnen — auf Koppelkurven.

Dann sind die in A, B, C zu $\mathfrak{P}A, \mathfrak{P}B, \mathfrak{P}C$ errichteten Lote drei Tangenten des in Art. 44 erwähnten Kegelschnittes \mathfrak{f} , der außerdem die Geraden $\mathfrak{P}X$ und $\mathfrak{P}Y$ berührt, und c ergibt sich als die Fußpunktkurve von \mathfrak{f} für \mathfrak{P} als Lotpunkt.

50. Eine besondere Untersuchung erfordert der Fall, daß sich die Normalen n_A, n_B, n_C in einem Punkte treffen, der mit den Punkten A, B, C auf einem Kreise liegt.¹⁾ Wir bezeichnen diesen Kreis mit e und den Normalschnittpunkt mit Δ . Dann genügt jeder Punkt von e der für den Pol geltenden Bedingung der Gleichheit der Winkel zwischen Normale und Polstrahl. Um jetzt den Pol zu bestimmen, benutzen wir die Krümmungsmittelpunkte A, B, Γ der Kurven α, γ, β .

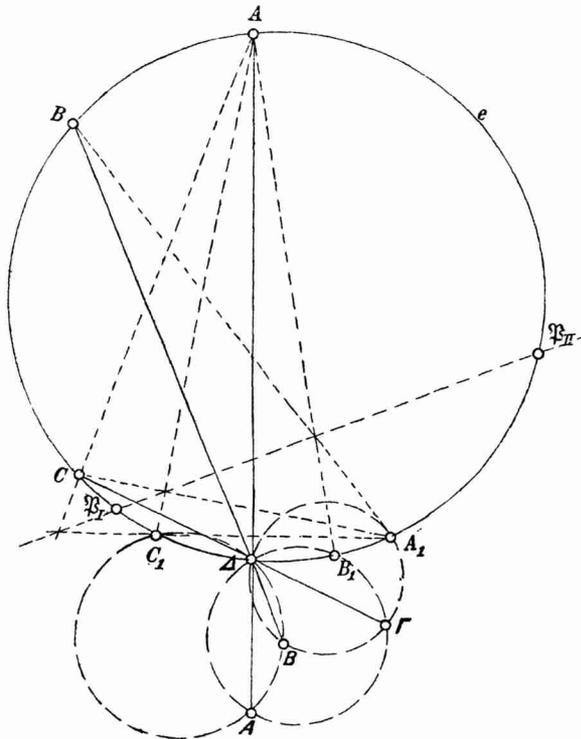


Fig. 20.

Wir wollen zunächst voraussetzen, daß nicht zugleich A, B, Γ und Δ auf einem Kreise liegen (Fig. 20). Denken wir uns auf e den Pol \mathfrak{P} bereits gefunden und zu allen Punkten von e die Krümmungsmittelpunkte ihrer Bahnen bestimmt, so gehen die zugehörigen Normalen sämtlich durch Δ , und die Krümmungsmittelpunkte erfüllen nach Art. 26 eine zirkuläre Kurve dritter Ordnung ε , die e in \mathfrak{P} berührt. Für den Krümmungsmittelpunkt Δ ist der früher mit \mathfrak{f}_Δ bezeichnete Kreis mit e identisch; dem Punkte Δ entsprechen also auf e zwei reelle oder konjugiert imaginäre Systempunkte, d. h. Δ ist ein Doppelpunkt von ε .

Nun bilden alle zirkulären Kurven dritter Ordnung, die durch A, B, Γ gehen und Δ zum Doppelpunkt haben, ein Büschel und schneiden

1) Schneiden sich die drei Normalen in einem Punkte, aber nicht auf dem Kreise ABC , so ist dieser Punkt der Pol und $\angle \omega = 0$.

daher e in den Punktpaaren einer Involution. Ihre Doppelpunkte entsprechen den Kurven des Büschels, die e berühren, liefern also auf e zwei reelle oder konjugiert imaginäre Lagen $\mathfrak{P}_I, \mathfrak{P}_{II}$ des gesuchten Pols.

Das Bündel enthält aber drei Kurven dritter Ordnung, deren jede in eine Gerade und einen Kreis zerfällt, nämlich die Gerade von Δ nach je einem der Punkte A, B, Γ in Verbindung mit dem Kreis durch die beiden andern Punkte und Δ . Wird demnach e von den Kreisen $B\Gamma\Delta, \Gamma A\Delta$ und $A B\Delta$ bzw. in A_1, B_1 und C_1 getroffen, so sind AA_1, BB_1, CC_1 drei Paare der Involution. Ihre Achse, die durch zwei dieser Paare bestimmt ist, schneidet e in \mathfrak{P}_I und \mathfrak{P}_{II} .¹⁾

Das ähnlich-veränderliche System kann sich also aus der betrachteten Phase auf zweierlei Weise weiter bewegen; wir sagen deshalb, es befinde sich in einer *Verzweigungsphase*.

Greifen wir unter den beiden gefundenen Polen den einen beliebig heraus und bezeichnen ihn kurz mit \mathfrak{P} , so wird die zugehörige Momentanbewegung durch die Krümmungsmittelpunkte A, B, Γ für zwei unendlich benachbarte Phasen bestimmt. Es ist nämlich $\angle \mathfrak{P}AA = \omega$, aber die im vorigen Artikel abgeleitete Konstruktion des Punktes U würde im vorliegenden Fall versagen, weil jetzt auch die Punkte $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{C}_2$ mit Δ auf einem Kreise liegen. Um daher den Wendekreis w und den Winkel χ zu ermitteln, müßten wir im allgemeinen die Krümmungsradien der Evoluten von α, β, γ zu Hilfe nehmen²⁾; wir beschränken uns jedoch im folgenden auf den einfachen Sonderfall, daß die Punkte A, B, C sich beständig auf Kreisen bewegen.

Dann hat die *Kreispunktkurve* c mit dem Kreise e außer ihrem Doppelpunkte \mathfrak{P} und den imaginären Kreispunkten noch die Punkte A, B, C gemein, sie zerfällt also in e und einen zweiten Kreis f , und zwar muß in \mathfrak{P} der eine von beiden Kreisen die Polbahntangente $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$, der andere die Polbahnnormale berühren. Nun kann der Kreis e nicht $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ zur Tangente haben; denn sonst entspräche ihm im System Σ der Krümmungsmittelpunkte nicht eine Kurve dritter Ordnung, sondern nach Art. 34 ein Kreis, d. h. die Punkte A, B, Γ lägen — entgegen unserer Voraussetzung — mit Δ auf einem Kreise. Die Polbahntangente $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ geht demnach durch den Mittelpunkt von e .

Wir bezeichnen jetzt die Entfernungen der Punkte A, B, C von

1) R. Müller, Polbestimmung für Verzweigungslagen bei der Bewegung eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems in seiner Ebene, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1907, Bd. 55, S. 141.

2) Vgl. R. Müller, Über die Momentanbewegung eines starren ebenen Systems. I. Bestimmung der Polbahntangente und der Kreispunktkurve für Verzweigungslagen. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1906, Bd. 54, S. 96.

\mathfrak{P} mit r_1, r_2, r_3 , den Winkel zwischen r_i und $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ mit φ_i und den Krümmungsradius der Bahnkurve des Punktes (r_i, φ_i) mit r_i . Dann ist nach Gleichung (14)

$$(i=1,2,3) \quad r_i = \frac{\sin \chi}{\sin(\chi - \omega)} \cdot \frac{r_i^2}{d_w \sin \varphi_i - r_i},$$

also

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_1^2(r_2 - d_w \sin \varphi_2)}{r_2^2(r_1 - d_w \sin \varphi_1)}.$$

Hieraus folgt

$$d_w = \frac{r_1 r_2 (r_1 r_2 - r_2 r_1)}{r_1 r_2^2 \sin \varphi_1 - r_2 r_1^2 \sin \varphi_2}$$

und

$$\frac{\sin \chi}{\sin(\chi - \omega)} = \frac{r_1 r_2 (r_2 \sin \varphi_1 - r_1 \sin \varphi_2)}{r_1 r_2^2 \sin \varphi_1 - r_2 r_1^2 \sin \varphi_2}.$$

Bedeutet d_e den Durchmesser von e , so ist $r_i = d_e \cos \varphi_i$, mithin

$$d_w = \frac{d_e \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 (r_1 \cos \varphi_2 - r_2 \cos \varphi_1)}{r_1 \sin \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 - r_2 \sin \varphi_2 \cos^2 \varphi_1}$$

und

$$\frac{\sin \chi}{\sin(\chi - \omega)} = \frac{r_1 r_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{d_e (r_1 \sin \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 - r_2 \sin \varphi_2 \cos^2 \varphi_1)}.$$

Wir können endlich auch den Durchmesser d_f des Kreises f berechnen. Da die Kreispunktkurve c in e und f zerfällt, so ist nach Art. 43 $\mathfrak{F} = \frac{1}{d_f}$, $\mathfrak{G} = \frac{1}{d_e}$ und $\mathfrak{E} = \mathfrak{F}\mathfrak{G}$. Nun sind A, B, C drei Burmestersche Punkte, also genügen ihre Koordinaten r_i, φ_i der Gleichung (59), die wir jetzt auch schreiben können

$$\begin{aligned} & \mathfrak{E}' d_e^2 \cos^3 \varphi_i - d_e^2 \cos^2 \varphi_i (\mathfrak{F}' \cos \varphi_i + \mathfrak{G}' \sin \varphi_i) \\ & + d_e \cos \varphi_i \left\{ \left(\frac{1}{d_w} - 2\mathfrak{F} \right) \cos^2 \varphi_i + \left(4\mathfrak{F} - \frac{1}{d_w} \right) \sin^2 \varphi_i \right\} \\ & + \sin \varphi_i (\cos^3 \varphi_i - \sin^3 \varphi_i) = 0 \end{aligned}$$

oder

$$(i=1,2,3) \quad \begin{aligned} & d_e \left(\mathfrak{E}' d_e^2 - \mathfrak{F}' d_e + \frac{1}{d_w} - 2\mathfrak{F} \right) + \tan \varphi_i \left(1 - \mathfrak{G}' d_e^2 \right) \\ & + \tan^3 \varphi_i \cdot d_e \left(4\mathfrak{F} - \frac{1}{d_w} \right) = \tan^3 \varphi_i. \end{aligned}$$

Wir haben also drei lineare Gleichungen mit den Unbekannten $d_e \left(\mathfrak{E}' d_e^2 - \mathfrak{F}' d_e + \frac{1}{d_w} - 2\mathfrak{F} \right)$, $1 - \mathfrak{G}' d_e^2$ und $d_e \left(4\mathfrak{F} - \frac{1}{d_w} \right)$. Für die letzte ergibt sich

$$d_e \left(4\mathfrak{F} - \frac{1}{d_w} \right) = \begin{vmatrix} 1 \tan \varphi_1 & \tan^3 \varphi_1 \\ 1 \tan \varphi_2 & \tan^3 \varphi_2 \\ 1 \tan \varphi_3 & \tan^3 \varphi_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 \tan \varphi_1 & \tan^2 \varphi_1 \\ 1 \tan \varphi_2 & \tan^2 \varphi_2 \\ 1 \tan \varphi_3 & \tan^2 \varphi_3 \end{vmatrix}.$$

Bezeichnen wir die rechte Seite dieser Gleichung mit Φ , so folgt

$$\frac{4}{d_f} = \frac{1}{d_w} + \frac{\Phi}{d_e}$$

51. Wir betrachten schließlich den Fall, daß die Bahnnormalen $AA, BB, C\Gamma$ in einem Punkte Δ des durch A, B, C gelegten Kreises e zusammentreffen, und daß gleichzeitig die Punkte A, B, Γ und Δ auf einem Kreise liegen (Fig. 21). Dann fallen die Punkte A_1, B_1, C_1 der vorigen Figur mit dem zweiten Schnittpunkte der beiden Kreise zusammen, und die früher benutzte Involution wird parabolisch. Der Pol \mathfrak{P} ist also eindeutig bestimmt als zweiter Schnittpunkt der durch A, B, C und A, B, Γ gehenden Kreise.

Gegenwärtig entspricht dem Kreis e in der ein-zweideutigen Verwandtschaft der Ebenen S und Σ der Kreis $AB\Gamma$, den wir deshalb mit ε bezeichnen. Die Polbahntangente $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ berührt demnach e in \mathfrak{P} , und $\mathfrak{P}\Delta$ ist die früher mit $\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ bezeichnete Gerade, die mit $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ den Winkel ω bildet.

Die Punktpaare $AA, BB, C\Gamma$ reichen wieder nicht aus, um die Bewegung des Systems für drei unendlich benachbarte Phasen zu bestimmen, sie sind vielmehr nur gleichbedeutend mit der Angabe des Pols \mathfrak{P} , des Winkels ω , der Polbahntangente $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ und des Krümmungsmittelpunkts der Bahnkurve für einen Systempunkt A . Um die Größen d_w und χ zu ermitteln, brauchen wir daher noch den Krümmungsmittelpunkt der Bahnkurve eines Punktes außerhalb des Kreises durch \mathfrak{P} und A mit der Tangente $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$.

Jetzt sind die Dreiecke $A\mathfrak{P}A, B\mathfrak{P}B$ und $C\mathfrak{P}\Gamma$ einander ähnlich. Lassen wir folglich das ähnlich-veränderliche System aus der gezeichneten Anfangsphase sich auf solche Weise bewegen, daß \mathfrak{P} fest bleibt, und daß A den Kreis um A beschreibt, so laufen die Punkte B und C auf den Kreisen um B und Γ . Nun ist aber die Bewegung des Systems durch die Bahnen dreier Punkte eindeutig bestimmt; daraus folgt: Beschreiben in Fig. 21 die Punkte A, B, C drei Kreise um A, B, Γ , so bewegt sich das System einförmig um den Punkt \mathfrak{P} .

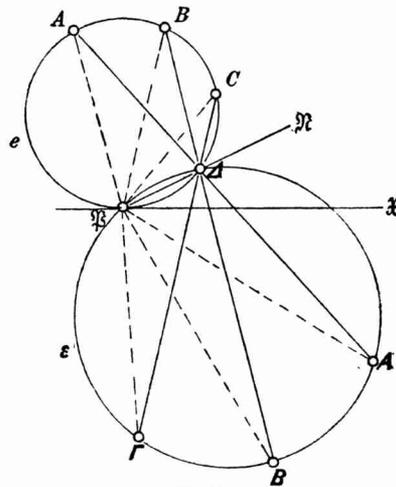


Fig. 21.