Werk

Titel: Eine Verallgemeinerung der infinitesimalen Paralleltransformation.

Autor: Engel, Friedrich

Jahr: 1910

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?37721857X_0019|log41

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

der Geometrie) e la geometria ellittica. Mi limiterò a considerare la geometria piana.

Si chiami *piano* un emisfero dell' ordinaria metrica in cui sia soppressa una metà della circonferenza terminatrice e della semicirconferenza conservata sia soppresso un estremo, conservato l'altro. In questo *piano* si chiamino *rette* le semicirconferenze massime e *non si faccia nessuna ipotesi atta a chiudere il sistema dei punti su ciascuna di queste rette* (l'ipotesi che queste rette-semicirconferenze si chiudano in sè si fa invece ordinariamente e naturalmente quando l'emisfero si considera come rappresentante della stella di raggi). È chiaro che sopra un tal *piano* sarà verificata la geometria projettiva, e la metrica sarà ellittica: ma cesseranno di verificarsi quelle proposizioni che chiedono l'omogeneità del piano: in particolare sopra ogni retta esiste un punto ed uno solo che non può essere interno a nessun segmento della retta medesima. Non sarà allora più vero che, a partire da un punto arbitrario, su una retta assegnata e in un verso assegnato possa portarsi un segmento uguale ad un segmento dato; un movimento non trasformerà cioè necessariamente un segmento in un segmento (potendo trasformarlo invece nell' insieme aperto e discontinuo dei prolungamenti di un segmento). Cadrà quindi il postulato d'Archimede nel suo enunciato ordinario, come si è osservato al n°. 3.

Eine Verallgemeinerung der infinitesimalen Paralleltransformation.

Von FRIEDRICH ENGEL in Greifswald.[1])

Zu jedem quadratischen Bogenelemente:

$$ds^2 = edx^2 + 2fdxdy + gdy^2$$

gehört eine infinitesimale Berührungstransformation, die allen Punkttransformationen gegenüber mit dem Bogenelemente invariant verknüpft ist, nämlich die infinitesimale Paralleltransformation, bei der jede Kurve in die eine der beiden unendlich benachbarten geodätischen Parallelkurven übergeht.[2]) Nun können aber die unendlich benachbarten geodätischen Parallelen einer gegebenen Kurve offenbar auch dadurch erhalten werden, daß man um alle Punkte der gegebenen Kurve Kreise

1) Vorgetragen auf der Königsberger Versammlung am 20. 9. 1910.

2) Vgl. meine Mitteilung: „Zur Flächentheorie", Leipziger Berichte 1901, S. 404—412.

von konstantem unendlich kleinem geodätischen Halbmesser beschreibt und die Einhüllende dieser Kreise sucht. Demnach kann eine solche, allen Punkttransformationen gegenüber kovariante infinitesimale Berührungstransformation überhaupt für jedes Bogenelement von der Form:

$$ds = w\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx \tag{1}$$

hergestellt werden. Ich werde zunächst diese Transformation ableiten.

§ 1.

Denkt man sich alle dem Punkte x, y unendlich benachbarten Punkte x_1, y_1 bestimmt, die von x, y den konstanten unendlich kleinen Abstand $ds = \delta t$ haben, so erhält man, unter p einen Parameter verstanden, die Gleichungen:

$$x_1 = x + \frac{\delta t}{w(x, y, p)}, \quad y_1 = y + \frac{p\,\delta t}{w(x, y, p)}, \tag{2}$$

die alle Punkte eines unendlich kleinen Kreises um den Punkt x, y darstellen. Läßt man jetzt x, y alle Punkte einer Kurve durchlaufen und sucht man die Einhüllende der zugehörigen Kreise, so hat man p als Funktion von x, y, y' aus der Gleichung:

$$\frac{dx_1}{dx}\frac{\partial y_1}{\partial p} - \frac{dy_1}{dx}\frac{\partial x_1}{\partial p} = 0,$$

also aus:

$$(y' - p) w_p + w(x, y, p) = 0 \tag{3}$$

zu bestimmen. Setzt man den gefundenen Wert von p in (2) ein, so erhält man zwei Gleichungen, die zusammen mit:

$$y_1' = y' + \frac{y' - p}{w^2}(w_x + y' w_y)\,\delta t$$

oder

$$y_1' = y' - \frac{w_x + y' w_y}{w w_p}\,\delta t, \tag{4}$$

die zu (1) kovariante infinitesimale Berührungstransformation bestimmen.[1]) Unter w ist hier immer die Funktion $w(x, y, p)$ zu verstehen, und p ist vermöge (3) durch x, y, y' auszudrücken.

Ist $w(x, y, p)$ in p linear, so versagt das Verfahren von vornherein. Wir wollen daher annehmen, daß w eine in p nicht lineare, analytische Funktion seiner Argumente ist. Das Vorhandensein der von uns aufgestellten infinitesimalen Berührungstransformation (2), (4) unterliegt dann keinem Zweifel, wohl aber kann der Fall eintreten, daß unsre infinitesimale Berührungstransformation nur in einem Teile des Wert-

1) Vgl. meine Diss.: „Zur Theorie der Berührungstransformationen", Math. Ann., Bd. **23**, S. 1 ff. (1884).

gebietes x, y, y' definiert ist, in dem das Bogenelement (1) definiert ist, sogar der Fall ist denkbar, daß die Transformation (2), (4) überhaupt nicht innerhalb des Definitionsgebietes des Bogenelements anwendbar ist. Nur wenn $w(x, y, p)$ in bezug auf das Argument p algebraisch ist, sind Möglichkeiten dieser Art ausgeschlossen.

Die hiermit gewonnene Verallgemeinerung der infinitesimalen Paralleltransformation kann allerdings nicht als neu gelten; sie steckt im Grunde schon in den auf Hamilton zurückgehenden Betrachtungen, die das Huygenssche Prinzip auf ein beliebiges Bogenelement anwenden. Nur die hier gegebene Ableitung der infinitesimalen Berührungstransformation (2), (4) scheint mir neu zu sein, wenigstens habe ich sie noch nirgends gefunden, auch nicht in der Arbeit von Vessiot: „Sur l'interprétation mécanique des transformations de contact infinitésimales."[1])

Eine wirklich neue Verallgemeinerung der infinitesimalen Paralleltransformation erhält man dagegen, wenn man beachtet, daß die Gruppe aller Punkttransformationen in keiner größeren Gruppe von Berührungstransformationen invariant ist, und daß also die invariante Beziehung, in der die infinitesimale Berührungstransformation (2), (4) zu dem Bogenelemente (1) steht, auch bei allen Berührungstransformationen erhalten bleiben muß.

Wir denken uns daher irgendeine endliche Berührungstransformation auf das Bogenelement (1) oder, wie wir es jetzt schreiben wollen:

$$ds = w(x, y, y')dx \tag{1'}$$

ausgeführt und erhalten dabei ein neues Bogenelement von der Form:

$$ds = (\alpha(x, y, y') + \beta(x, y, y')y'')dx. \tag{5}$$

Führen wir dann unter der Voraussetzung, daß das möglich ist, dieselbe endliche Berührungstransformation auf die infinitesimale (2), (4) aus, so erhalten wir eine neue infinitesimale Berührungstransformation, die gegenüber allen Berührungstransformationen mit dem Bogenelemente (5) invariant verknüpft ist.

Da nun umgekehrt jedes Bogenelement von der Form (5) durch Berührungstransformation auf die Form (1') gebracht werden kann, so ist die Frage berechtigt, ob man nicht zu einem vorgelegten Bogenelemente (5) unmittelbar die kovariante infinitesimale Berührungstransformation aufstellen kann, ohne erst durch eine endliche Berührungstransformation zu der Form (1') zurückkehren zu müssen. Freilich muß man dabei im Auge behalten, daß durch unsre Betrachtungen

1) Bulletin de la Société mathématique de France, Bd. **34**, S. 230—269 (1906).

keineswegs für jedes Bogenelement (5) die Existenz einer solchen kovarianten infinitesimalen Berührungstransformation sicher gestellt ist.

Führt man nämlich auf das Bogenelement (1′) eine Berührungstransformation aus, die in dem Definitionsgebiete der infinitesimalen Berührungstransformation (2), (4) nicht anwendbar ist, so ist es wenigstens denkbar, daß dabei die zu (1′) kovariante infinitesimale Berührungstransformation ganz verloren geht, daß man also zu dem aus (1′) hervorgehenden Bogenelemente (5) keine solche erhält.

Um die vorhin gestellte Frage beantworten zu können, müssen wir erst die zu (1′) kovariante infinitesimale Berührungstransformation (2), (4) etwas näher untersuchen.

§ 2.

Versteht man unter δx, δy, $\delta y'$ die Zuwachse, die x, y, y' bei der infinitesimalen Berührungstransformation (2), (4) erhalten, so gilt die Gleichung:

$$\delta y - p\,\delta x = 0\,, \tag{6}$$

die Größe p, die vermöge (3) durch x, y, y' ausgedrückt werden muß, bestimmt daher die Richtung $\delta x : \delta y$, in der der Punkt x, y des Linienelementes x, y, y' bei der infinitesimalen Berührungstransformation (2), (4) verschoben wird. Durch die Gleichung (3)[1]) wird daher eine Beziehung zwischen den Linienelementen x, y, y' und x, y, p des Punktes x, y bestimmt, oder, was auf dasselbe hinauskommt, eine Linienelementtransformation. Diese Transformation läßt jeden Punkt, diesen als Linienelementverein betrachtet, invariant, ist aber keine Berührungstransformation, da sie nicht mit der identischen Transformation zusammenfällt.

Betrachten wir nun weiter die eingliedrige Gruppe, die von der infinitesimalen Berührungstransformation (2), (4) erzeugt wird. Jedes Linienelement x, y, y' nimmt bei dieser eingliedrigen Gruppe ∞^1 verschiedene Lagen an, deren Punktort eine Kurve bildet. Es ist bekannt, daß diese Kurve eine Integralkurve der Differentialgleichung zweiter Ordnung ist:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}w(x, y, y') - \frac{\partial}{\partial y}w(x, y, y') = 0\,,$$

die die Variationsrechnung für das Bogenelement (1′) liefert, also kurz gesagt eine geodätische Linie oder besser eine *Extremale* dieses Bogen-

1) Nebenbei sei hier erwähnt, daß die Gleichung (3) in der Form:

$$dx\frac{\partial}{\partial \delta x}\left\{w\left(x, y, \frac{\delta y}{\delta x}\right)\delta x\right\} + dy\frac{\partial}{\partial \delta y}\left\{w\left(x, y, \frac{\delta y}{\delta x}\right)\delta x\right\} = 0$$

geschrieben werden kann, daß sie also durch Polarenbildung aus dem Bogenelement (1) entsteht.

elementes. Wir können jedoch diese Tatsache auch leicht durch Rechnung bestätigen.

In der Tat, die ∞^1 Lagen, die ein Linienelement x, y, y' bei der von (2), (4) erzeugten eingliedrigen Gruppe annimmt, werden durch Integration des simultanen Systems:

$$(7) \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{w(x, y, p)}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{p}{w(x, y, p)}, \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{w_x + y' w_y}{w w_p}$$

gefunden, wo p vermöge (3) zu eliminieren ist. Andrerseits aber wird für jede Lage x, y, y' des Linienelementes die Tangente in dem Punkte x, y seines Punktortes durch den aus (3) folgenden Wert von p bestimmt. Diese Punktörter werden daher durch das simultane System definiert, das man aus (7) erhält, wenn man y' vermöge (3) eliminiert. Aus (7) und (3) folgt aber:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{w_x + y' w_y}{w w_p} + \frac{d}{dt}\frac{w}{w_p}$$

also

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{w_x + y' w_y}{w w_p} - \frac{w}{w_p^2}\frac{d}{dt} w_p + \frac{1}{w_p}\left\{\frac{w_x}{w} + \frac{p w_y}{w} + w_p \frac{dp}{dt}\right\},$$

oder

$$w \frac{d}{dt} w_p - w_y = 0.$$

Benutzt man daher x als unabhängige Veränderliche, so erhält man zur Bestimmung jener Punktörter das simultane System:

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d}{dx} w_p - w_y = 0,$$

das heißt, die Differentialgleichung der Extremalen des Bogenelementes (1').

Erinnern wir uns jetzt der vorhin erwähnten, durch (3) definierten Linienelementtransformation, so können wir auch sagen:

Führt man auf die infinitesimale Berührungstransformation (2), (4) *die durch* (3) *definierte Linienelementtransformation aus, so erhält man in x, y, p eine infinitesimale Linienelementtransformation:*

$$(8) \qquad \delta x = \frac{\delta t}{w(x, y, p)}, \quad \delta y = \frac{p \delta t}{w(x, y, p)}, \quad \delta p = \pi \delta t,$$

wo π aus der Gleichung:

$$(9) \qquad w_{xp} + p w_{yp} - w_y + w w_{pp} \pi = 0$$

zu berechnen ist, und diese infinitesimale Transformation führt jedes Linienelement x, y, p in das unendlich benachbarte Linienelement der hindurchgehenden Extremalen des Bogenelements (1') *über.*

Außerdem bemerken wir noch, daß der Punkt des Linienelementes $x+\delta x,\ y+\delta y,\ p+\delta p$ von dem Punkte x, y die konstante Entfernung:

$$ds = w\left(x, y, \frac{\delta y}{\delta x}\right)\delta x = \delta t$$

hat, daß also δt die Bogenlänge der Extremalen zwischen diesen beiden unendlich benachbarten Linienelementen ist.

Das eben gewonnene Ergebnis will ich jetzt auf eine neue Weise begründen; wir werden dadurch in den Stand gesetzt werden, zu übersehen, wie sich alles gestaltet, wenn auf das Bogenelement (1′) eine beliebige endliche Berührungstransformation ausgeführt wird. Dazu muß ich jedoch an eine Eigenschaft der Extremalen erinnern, die ich vorm Jahre in meinem Salzburger Vortrage[1]) bewiesen habe.

Legt man nämlich durch zwei unendlich benachbarte Linienelemente x, y, p und $x+dx,\ y+dy,\ p+dp$ die hindurchgehenden Extremalen des Bogenelements (1′), so schneiden die einander stets in einem Punkte, und die auf beiden Extremalen bis zum Schnittpunkte hin berechneten Bogenlängen unterscheiden sich um die unendlich kleine Größe:

$$w(x, y, p)dx + w_p(dy - p\,dx)\,. \tag{10}$$

Führt man jetzt auf beide Linienelemente die infinitesimale Linienelementtransformation (8) aus, die jedes auf der hindurchgehenden Extremalen um das Bogenstückchen δt verschiebt, so bleibt der Unterschied der bis zum Schnittpunkte der Extremalen gerechneten Bogenlängen ungeändert. Demnach bleibt der Pfaffsche Ausdruck (10) bei der infinitesimalen Transformation (8) invariant. Außerdem erteilt die infinitesimale Transformation (8) den Größen x, y, p solche Zuwachse, daß der Ausdruck

$$w(x, y, p)\delta x + w_p(\delta y - p\,\delta x) \tag{10′}$$

den konstanten Wert δt erhält.

Es läßt sich zeigen, daß die infinitesimale Transformation (8) durch die hier angegebenen beiden Eigenschaften definiert ist.

In der Tat, da w in p nicht linear ist, so kann der Pfaffsche Ausdruck (10) nicht auf einen Ausdruck zurückgeführt werden, der bloß ein Differential enthält. Es gibt daher in x, y, p eine und nur eine infinitesimale Transformation, bei der der Pfaffsche Ausdruck (10) invariant bleibt und für die sich der Ausdruck (10′) auf die Konstante δt reduziert.[2]) Mit andern Worten:

1) „Über Kurvenscharen, die zu einem gegebenen Differentialausdrucke kovariant sind", Bd. **19** dieses Jahresberichts (1910), S. 113f.

2) Vgl. meine Abhandlung: „Die infinitesimalen Transformationen einer Pfaffschen Gleichung", Leipziger Bericht 1899, S. 296ff.

Läßt eine infinitesimale Transformation in x, y, p den Pfaffschen Ausdruck (10) *invariant und erhält sie x, y, p solche Zuwachse, daß der Ausdruck* (10′) *den konstanten Wert δt erhält, so hat sie die Form* (8) *und führt jedes Linienelement auf der hindurchgehenden Extremalen des Bogenelementes* (1′) *um ein unendlich kleines Bogenstück von der Länge δt fort.*

Führen wir jetzt auf die infinitesimale Transformation (8) die durch (3) definierte Linienelementtransformation aus, so erhalten wir in den Veränderlichen x, y, y' eine infinitesimale Transformation, bei der der Pfaffsche Ausdruck

$$w_p(dy - y'dx) \tag{11}$$

invariant bleibt, wo natürlich w_p durch x, y, y' auszudrücken ist. Diese neue infinitesimale Transformation ist daher eine infinitesimale Berührungstransformation. Den Veränderlichen x, y erteilt sie die Zuwachse:

$$\delta x = \frac{1}{[w(x,y,p)]}\delta t, \quad \delta y = \left[\frac{p}{w(x,y,p)}\right]\delta t,$$

wo die eckige Klammer andeutet, daß der aus (3) folgende Wert für p einzusetzen ist; ihre charakteristische Funktion lautet daher:

$$y'\frac{\delta x}{\delta t} - \frac{\delta y}{\delta t} = \left[\frac{y'-p}{w(x,y,p)}\right],$$

woraus ohne weiteres folgt, daß diese infinitesimale Berührungstransformation mit der früher gefundenen (2), (4) zusammenfällt.

Schließlich wollen wir noch für die durch (3) bestimmte Linienelementtransformation eine neue Definition geben.

Diese Transformation nämlich hat die beiden Eigenschaften, erstens jeden Verein invariant zu lassen, der von den Linienelementen eines Punktes gebildet wird, und zweitens den Pfaffschen Ausdruck (10) in den Ausdruck (11) überzuführen. Es liegt auf der Hand, daß sie durch diese beiden Eigenschaften vollständig bestimmt ist. Aber man braucht nicht einmal zu verlangen, daß sie den einen Pfaffschen Ausdruck in den andern überführt, es genügt schon, wenn sie von den Pfaffschen Gleichungen, die durch Nullsetzen dieser Ausdrücke entstehen, die eine in die andere überführt.

In der Tat, eine Linienelementtransformation, bei der jeder von den Elementen eines Punktes gebildete Verein invariant bleibt, hat notwendig die Form:

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad y' = \varphi(x, y, p).$$

Soll sie nun außerdem die Pfaffsche Gleichung: $w dx + w_p(dy - p dx) = 0$ in die Gleichung: $dy_1 - y' dx_1 = 0$ verwandeln, so muß werden:

$$w(x,y,p)\,dx + w_p(dy - p dx) = \varrho(x,y,y')(dy - y' dx),$$

folglich:

$$\varrho = w_p; \quad w_p(y' - p) + w(x, y, p) = 0;$$

was mit (3) übereinstimmt.

Fassen wir jetzt alles zusammen, so haben wir folgendes:

Zu jedem Bogenelemente:

$$(1') \qquad ds = w(x, y, y')dx,$$

bei dem w nicht linear in y' ist, gehört eine gewisse Linienelementtransformation, die dadurch definiert ist, daß sie jeden Verein, der von den Elementen eines Punktes gebildet wird, invariant läßt, und daß sie die Pfaffsche Gleichung:

$$(10'') \qquad w(x, y, p)\,dx + w_p(dy - p\,dx) = 0$$

in den Linienelementkoordinaten x, y, p in die Pfaffsche Gleichung:

$$(12) \qquad dy - y'dx = 0$$

überführt. Ferner gehört zu dem Bogenelemente eine infinitesimale Linienelementtransformation, die jedes Linienelement x, y, p auf der hindurchgehenden Extremalen um das unendlich kleine konstante Bogenstückchen δt verschiebt und die andrerseits auch dadurch definiert ist, daß sie den Pfaffschen Ausdruck (10) invariant läßt und den Veränderlichen x, y, p solche Zuwachse erteilt, daß der Ausdruck (10′) den konstanten Wert δt annimmt. Führt man vermöge jener endlichen Linienelementtransformation die neuen Veränderlichen x, y, y' ein, so erhält man die zu dem Bogenelemente kovariante infinitesimale Berührungstransformation.

§ 3.

Wir haben jetzt alles so weit vorbereitet, daß wir mit leichter Mühe übersehen können, wie sich die Dinge gestalten, wenn auf unser Bogenelement eine beliebige endliche Berührungstransformation ausgeführt wird.

Das Bogenelement (1′) erhält dabei, wie wir wissen, die Form:

$$(5) \qquad ds = (\alpha(x, y, y') + \beta(x, y, y')\,y'')\,dx.$$

Ebenso kann umgekehrt jedes Bogenelement (5), in dem β nicht verschwindet, auf die Form (1′) gebracht werden, wenn man nämlich die Integralkurven der Gleichung: $\alpha + \beta y'' = 0$ durch eine geeignet gewählte Berührungstransformation in die Punkte überführt.

Es fragt sich jetzt noch, was im Falle eines allgemeinen Bogenelements (5) an die Stelle der von uns gemachten Voraussetzung tritt, daß $w(x, y, y')$ nicht linear in y' sein soll.

Für das Bogenelement (1′) ist unsre Voraussetzung offenbar damit gleichbedeutend, daß die Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dx} w_{y'} - w_y = 0$$

der Extremalen eine Differentialgleichung zweiter Ordnung im gewöhnlichen Sinne ist, also weder auf die Differentialgleichung $y'' = \infty$ aller Punkte hinauskommt, noch unbestimmt wird. Aber bei der Berührungstransformation, die (1′) in (5) überführt, geht die Schar aller Punkte über in die Schar der ∞^2 Vereine, die durch das simultane System:

$$(13) \qquad dy - y'dx = 0, \quad \alpha(x,y,y')\,dx + \beta(x,y,y')\,dy' = 0$$

definiert wird, also in die Schar der Vereine, die bei Benutzung des Bogenelementes (5) die Länge Null haben. Soll daher ein vorgelegtes Bogenelement (5) durch Berührungstransformation aus einem Bogenelemente (1′) hervorgehen, bei dem w nicht in y' linear ist, so ist notwendig und hinreichend, daß die zugehörige Schar der Extremalen weder aus den Vereinen von der Länge Null besteht, noch unbestimmt wird. Nun werden die Extremalen des Bogenelementes (5) durch die Differentialgleichung:

$$(14) \qquad \alpha_y + \chi_x + y'\chi_y + (\beta_y + \chi_{y'})\,y'' = 0$$

definiert, wo der Kürze wegen:

$$(15) \qquad \chi = \beta_x + y'\beta_y - \alpha_{y'}$$

gesetzt ist.[1]) Demnach müssen wir für das allgemeine Bogenelement (5) die Voraussetzung machen, daß der Ausdruck:

$$(16) \qquad (\alpha_y + \chi_x + y'\chi_y)\,\beta - (\beta_y + \chi_{y'})\,\alpha = A$$

einen von Null verschiedenen Wert hat.

Bei der Berührungstransformation, die (1′) in (5) verwandelt, gehen ferner die Extremalen von (1′) in die von (5) über und zwei unendlich benachbarte Elemente eines Punktes in zwei unendlich benachbarte Elemente eines Vereins von der Länge Null. Die Extremalen von (5) haben daher, wie bereits in meinem Salzburger Vortrage ausgeführt ist, die folgende charakteristische Eigenschaft: Legt man durch zwei unendlich benachbarte Linienelemente x, y, y' und $x + dx$, $y + dy$, $y' + dy'$ die hindurchgehenden Extremalen V und V', so gibt es einen Verein W von der Länge Null, der mit V ein Element E und mit V' das unendlich benachbarte Element E' gemein hat. Überdies unterscheiden sich die Bogenlängen — auf V zwischen den Elementen x, y, y'

1) Vgl. meinen Salzburger Vortrag, d. Jahresbericht Bd **19**, 1909, S. 118.

und E, auf V' zwischen den Elementen $x + dx$, $y + dy$, $y' + dy'$ und E' — um den Ausdruck:

$$\alpha dx + \beta dy' - \chi(dy - y'dx). \tag{17}$$

Dieser Ausdruck entsteht daher aus (10) oder besser aus:

$$w(x, y, y')\,dx + w_{y'}(dy - y'dx)$$

durch die Berührungstransformation, die (1′) in (5) überführt.

Die zu (1′) gehörige infinitesimale Linienelementtransformation (8) verwandelt sich beim Übergange von (1′) zu (5) in eine infinitesimale Transformation, die jedes Linienelement auf der hindurchgehenden Extremalen von (5) um das konstante Bogenstück δt verschiebt, die also x, y, y' solche Zuwachse erteilt, daß:

$$\delta y - y'\delta x = 0, \qquad \alpha\delta x + \beta\delta y' = \delta t$$
$$(\alpha_y + \chi_x + y'\chi_y)\,\delta x + (\beta_y + \chi_{y'})\,\delta y' = 0$$

wird. Diese neue infinitesimale Transformation lautet daher:

$$\left\{\begin{aligned} &\delta x = -\frac{\beta_y + \chi_{y'}}{A}\,\delta t, \quad \delta y = -\frac{y'(\beta_y + \chi_{y'})}{A}\,\delta t \\ &\delta y' = \frac{\alpha_y + \chi_x + y'\chi_y}{A}\,\delta t. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Überdies ist klar, daß sie auch dadurch definiert werden kann, daß sie den Pfaffschen Ausdruck (17) invariant läßt und daß der Ausdruck:

$$\alpha\delta x + \beta\delta y' - \chi(\delta y - y'\delta x)$$

den konstanten Wert δt besitzt.[1])

Ferner verwandelt sich die zu (1′) gehörige, durch (3) definierte endliche Linienelementtransformation beim Übergange zu (5) in eine Transformation, bei der jeder Verein von der Länge Null, also jeder Integralverein des simultanen Systems (13) invariant bleibt und bei der die Pfaffsche Gleichung:

$$\alpha dx + \beta dy' - \chi(dy - y'dx) = 0 \tag{17'}$$

die Form: $dy - y'dx = 0$ annimmt, und zwar ist diese Transformation durch die eben angegebenen Eigenschaften definiert. Um sie aufzustellen, ist daher die Integration von (13) erforderlich, also die Bestimmung der zu (5) gehörigen Vereine von der Länge Null. Andere Integrationsoperationen sind nicht erforderlich.

1) Das Nichtverschwinden von (16) sagt nämlich aus, daß der Ausdruck (17), gleich Null gesetzt, eine nicht integrable Pfaffsche Gleichung liefert, daß er also nicht auf einen Ausdruck mit weniger als zwei Differentialen zurückgeführt werden kann.

In der Tat, sind:

$$u(x,y,y') = a, \qquad v(x,y,y') = b$$

die allgemeinen Integralgleichungen des simultanen Systems (13), so hat man nur zu:

$$(19) \qquad \begin{cases} u(x,y,y') = u(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{y}') \\ v(x,y,y') = v(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{y}') \end{cases}$$

noch eine dritte Gleichung derart hinzuzufügen, daß eine Transformation herauskommt, vermöge deren eine Relation von der Form:

$$(20) \qquad \alpha dx + \beta dy' - \chi(dy - y'dx) = \sigma(d\mathfrak{y} - \mathfrak{y}'d\mathfrak{x})$$

besteht. Wegen der Definition von u und v ist aber offenbar:

$$(21) \qquad \begin{cases} \alpha dx + \beta dy' - \chi(dy - y'dx) \equiv \lambda du + \mu dv \\ \qquad\qquad\qquad\qquad dy - y'dx \equiv \nu du + \varrho dv, \end{cases}$$

wo $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ ganz bestimmte, ohne weiteres angebbare Funktionen von x, y, y' sind, von denen keine verschwindet, und wo überdies $\lambda\varrho - \mu\nu$ nicht identisch null ist. Infolgedessen nimmt die zu erfüllende Gleichung (20) die Form:

$$\lambda(x,y,y')\,du + \mu(x,y,y')\,dv = \sigma(\nu(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{y}')\,du + \varrho(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{y}')\,dv)$$

an und zerfällt in die beiden:

$$\lambda(x,y,y') = \sigma \cdot \nu(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{y}'), \qquad \mu(x,y,y') = \sigma \cdot \varrho(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{y}'),$$

aus denen man σ bestimmen kann und noch die von σ freie Gleichung

$$(22) \qquad \frac{\lambda(x,y,y')}{\mu(x,y,y')} = \frac{\nu(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{y}')}{\varrho(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{y}')}$$

erhält.

Wegen der Beschaffenheit der Pfaffschen Ausdrücke (17) und $d\mathfrak{y} - \mathfrak{y}'d\mathfrak{x}$ ist hier weder die linke Seite eine Funktion von $u(x,y,y')$, $v(x,y,y')$ allein, noch die rechte eine von $u(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{y}')$, $v(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{y}')$ allein. Demnach sind die linken Seiten der Gleichungen (19), (22) in bezug auf x, y, y' von einander unabhängig und die rechten in bezug auf $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}'$. Gibt es daher zwei Wertsysteme:

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad y' = y_0', \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0, \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{y}_0, \quad \mathfrak{y}' = \mathfrak{y}_0',$$

für die die Gleichungen (19) und (22) erfüllt sind, während sich überdies in jeder Gleichung beide Seiten regulär verhalten und die nicht identisch verschwindenden Funktionaldeterminanten der linken und der rechten Seiten von Null verschiedene Werte bekommen, so stellen die Gleichungen (19), (22) eine Linienelementtransformation dar, und diese ist die verlangte. Sie reduziert sich sicher nicht auf die identische Transformation, denn die Gleichung (22) ist ja für: $\mathfrak{x} = x$, $\mathfrak{y} = y$, $\mathfrak{y}' = y'$ nicht erfüllt.

Die zu dem Bogenelemente (5) kovariante infinitesimale Berührungstransformation erhält man jetzt, wenn man in die infinitesimale Transformation (18) vermöge der Transformation (19), (22) die neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}'$ einführt. Damit ist unser Ziel erreicht, denn es kam uns ja darauf an, diese infinitesimale Besührungstransformation aus dem Bogenelemente (5) selbst abzuleiten.

Freilich ist das Vorhandensein unsrer infinitesimalen Berührungstransformation nur dann gewährleistet, wenn die Gleichungen (19) und (22) durch zwei Wertsysteme von der vorhin angegebenen Beschaffenheit erfüllt werden können. Selbst dann ist es nicht unbedingt sicher, daß man die infinitesimale Berührungstransformation in dem Gebiete anwenden kann, wo das Bogenelement (5) definiert ist. Dazu müßte noch jedes der beiden Wertesysteme x_0, y_0, y_0' und $\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0, \mathfrak{y}_0'$ so beschaffen sein, daß sich die Funktionen α und β regulär verhalten. Macht man diese Annahme, so braucht man nur noch zu verlangen, daß für jedes dieser beiden Wertsysteme A einen von Null verschiedenen Wert bekommt und daß β von Null verschieden ausfällt, wenn es nicht etwa identisch verschwindet.

Nur noch eine Bemerkung wollen wir machen:

Ist $\beta = 0$, so erzeugt unsre infinitesimale Berührungstransformation, wie wir wissen, eine eingliedrige Gruppe, bei der jedes Linienelement ∞^1 Lagen annimmt, und der Punktort dieser ∞^1 Lagen ist eine Extremale des Bogenelements. Vom Standpunkte der Linienelementgeometrie drückt man das besser so aus: Jede der ∞^1 Lagen des Linienelements gehört einem Vereine an, der aus allen Elementen eines Punktes besteht, und der Verein, der diese ∞^1 Vereine einhüllt, ist eine Extremale. Da nun im Falle $\beta \neq 0$ an Stelle der Punkte die Vereine von der Länge Null treten, so ergibt sich:

Die zu dem Bogenelemente (5) *kovariante infinitesimale Berührungstransformation erzeugt eine eingliedrige Gruppe von folgender Beschaffenheit: Führt man auf ein beliebiges Linienelement die eingliedrige Gruppe aus und legt man durch jede der ∞^{1} Lagen des Linienelementes den hindurchgehenden Verein von der Länge Null, so umhüllen diese Vereine eine Extremale des Bogenelementes* (5).

Es unterliegt keinem Zweifel, daß die hier entwickelten Betrachtungen auch bei Bogenelementen in Räumen von mehr Dimensionen ihr Analogon haben, doch bedarf das noch näherer Untersuchung.