Werk

Titel: Über die Momentanbewegung eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems bei unendli...

Autor: Müller, Reinhold

Jahr: 1910

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?37721857X_0019|log19

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Über die Momentanbewegung eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems bei unendlich fernem Pol.

Von Reinhold Müller in Darmstadt.

Die vorliegende Mitteilung bildet eine Ergänzung meines Aufsatzes *über die Momentanbewegung eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems in seiner Ebene*[1]), in dem immer angenommen wurde, daß der Pol *im Endlichen* liege.

1. Wir setzen wieder voraus, das System gelange aus der Phase S in die unendlich benachbarte S' durch eine Vergrößerung der Längeneinheit um $d\lambda$ und eine Drehung $d\vartheta$, die wir im Sinne des Uhrzeigers positiv rechnen. Sind x, y und $x + dx$, $y + dy$ die Koordinaten der Lagen A und A' eines Systempunkts in bezug auf ein in der festen Ebene Σ liegendes rechtwinkliges Koordinatensystem, da und db die Koordinaten des ursprünglich mit dem Anfangspunkt zusammenfallenden Systempunkts in der Phase S', so ist

$$x + dx = da + x(1 + d\lambda)\cos d\vartheta + y(1 + d\lambda)\sin d\vartheta$$

$$y + dy = db - x(1 + d\lambda)\sin d\vartheta + y(1 + d\lambda)\cos d\vartheta,$$

folglich

$$(1) \qquad \begin{cases} dx = da + x d\lambda + y d\vartheta \\ dy = db - x d\vartheta + y d\lambda. \end{cases}$$

Für den augenblicklichen Pol wird $dx = dy = 0$; damit er unendlich fern sei, muß also $d\vartheta = d\lambda = 0$ und wenigstens eine der Größen da und db von Null verschieden sein. Dann sind die Phasen S und S' kongruent und parallel, alle Bahnnormalen also senkrecht zur Geraden AA'. Legen wir die y-Achse parallel zu den Normalen, so ist $db = 0$, mithin $dx = da$ und $dy = 0$.

Beim Übergang des Systems in die folgende Phase S'' gelangt der Punkt A in eine Lage A'' mit den Koordinaten $x + 2dx + d^2x$, $y + 2dy + d^2y$, und zwar ergibt sich aus (1)

$$d^2x = d^2a + dx d\lambda + x d^2\lambda + dy d\vartheta + y d^2\vartheta = d^2a + x d^2\lambda + y d^2\vartheta$$

$$d^2y = d^2b - dx d\vartheta - x d^2\vartheta + dy d\lambda + y d^2\lambda = d^2b - x d^2\vartheta + y d^2\lambda.$$

1) Dieser Jahresbericht XIX. 1910. S. 29.

Der Punkt A beschreibt demnach momentan ein Bahnelement vom *Krümmungsradius*

$$\mathfrak{r} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} = \frac{da^2}{d^2b - x\,d^2\vartheta + y\,d^2\lambda}; \tag{2}$$

dabei rechnen wir $\mathfrak{r}$ positiv, wenn d^2y positiv ist, d. h. wenn der Krümmungsmittelpunkt A oberhalb A liegt. Für

$$x\,d^2\vartheta - y\,d^2\lambda = d^2b$$

wird $\mathfrak{r} = \infty$. Der Wendekreis zerfällt also gegenwärtig in die unendlich ferne Gerade und in die durch die letzte Gleichung dargestellte Polbahntangente $\mathfrak{t}$. Bedeutet ω den Winkel, den $\mathfrak{t}$ mit den Bahnnormalen bildet, so folgt

$$\tan\omega = \frac{d^2\lambda}{d^2\vartheta}. \tag{3}$$

Wir verlegen jetzt den Koordinatenanfangspunkt auf die Polbahntangente. Dann wird für $x = y = 0$ der Krümmungsradius $\mathfrak{r} = \infty$, also ist $d^2b = 0$, und die Gleichung der Polbahntangente lautet

$$x\,d^2\vartheta - y\,d^2\lambda = 0. \tag{4}$$

Setzen wir noch

$$\frac{da^2}{d^2\lambda} = q^2,$$

und $y - x\cot\omega = \mathfrak{y}$, so bedeutet $\mathfrak{y}$ den Abstand des Punktes A vom Schnittpunkt M seiner Bahnnormale mit $\mathfrak{t}$, und es ergibt sich aus (2)

$$\mathfrak{r} = \frac{q^2}{\mathfrak{y}}. \tag{5}$$

Hieraus folgt: *Kennt man in einer Phase mit unendlich fernem Pol die Polbahntangente* $\mathfrak{t}$ *und von irgendeinem Systempunkt A den Krümmungsmittelpunkt* A, *so sind für alle Systempunkte die Krümmungsmittelpunkte ihrer Bahnen bestimmt.* Und ferner: *Alle Systempunkte, die auf einer Parallelen zur Polbahntangente liegen, beschreiben Bahnstellen von gleicher Krümmung.*

2. Bezeichnen wir die Strecke $M\mathsf{A}$ mit $\mathfrak{y}'$, so ist $\mathfrak{r} = \mathfrak{y}' - \mathfrak{y}$, mithin nach (5)

$$\mathfrak{y}^2 - \mathfrak{y}\mathfrak{y}' + q^2 = 0. \tag{6}$$

Dem Krümmungsmittelpunkt A *entspricht daher auf der Normale* $A\mathsf{A}$ *ein zweiter Systempunkt* A^*, und es ist

$$MA \cdot MA^* = q^2,$$

also nach (5)

$$MA^* = A\mathsf{A}.$$

Auf jeder Bahnnormale bilden demnach die Paare von Systempunkten, die zu demselben Krümmungsmittelpunkt gehören, eine Involution, deren Mittelpunkt sich auf der Polbahntangente befindet. Diese Involution ist für alle Normalen dieselbe. Sie ist hyperbolisch oder elliptisch, je nachdem $d^2\lambda$ positiv oder negativ ist, d. h. je nachdem sich das System beim Übergang in die Phase S'' vergrößert oder verkleinert.

Definieren wir die Momentanbewegung für drei unendlich benachbarte Phasen durch die Polbahntangente t und den Systempunkt A mit seinem Krümmungsmittelpunkt A und bezeichnen wieder mit M den Schnittpunkt von t mit AA, so liegt im ersten Fall (Fig. 1) der Punkt A innerhalb, im zweiten (Fig. 2) außerhalb der Strecke MA. Machen wir $MA^* = A$A, so erhalten wir in Fig. 1 aus M, A und A^* die Doppelpunkte F_1 und F_2 unsrer Involution und die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte Φ_1 und Φ_2; dabei ist $M\Phi_1 = 2 \cdot MF_1$. Die Parallelen durch Φ_1 und Φ_2 zu t treten an Stelle der *Übergangskurve* σ[1]), denn in dem von ihnen begrenzten Streifen der Ebene Σ liegen keine Krümmungsmittelpunkte. — Um zu irgendeinem Punkte B der Geraden AA das Paar B, B^* zu konstruieren, halbiere man MB in B_m, dann ist B_m auch der Mittelpunkt von BB^*.

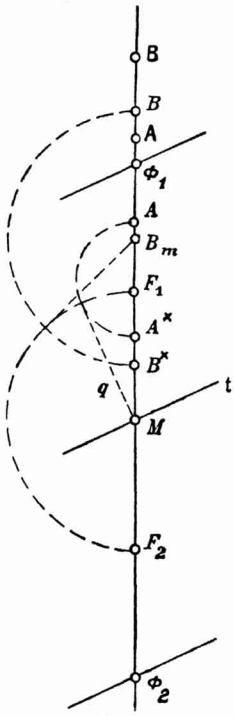

Fig. 1.

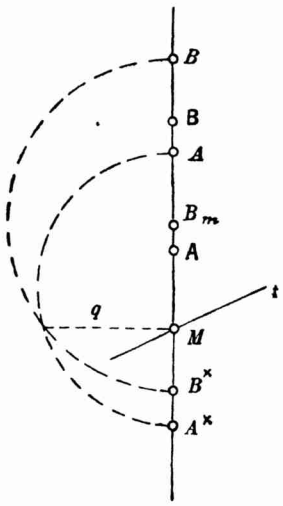

Fig. 2.

3. Wird jedem Systempunkte der Krümmungsmittelpunkt seiner Bahnkurve als entsprechend zugewiesen, so ergibt sich — wie bei endlichem Pol — eine ein-zweideutige Verwandtschaft der Ebenen S und Σ. Für die Koordinaten x, y und ξ, η entsprechender Punkte gelten nach (5) die Gleichungen

$$\xi = x, \quad \eta = y + \frac{q^2}{y - x \cot\omega}.$$

Hierdurch wird jeder Geraden d von S in Σ eine Hyperbel zugeordnet;

1) a. a. O., S. 45.

ihre Asymptoten sind d und die Normale des Schnittpunkts von d mit der Polbahntangente t. Umgekehrt entspricht jeder Geraden ε von Σ eine Hyperbel mit den Asymptoten ε und t; die Verwandtschaft ist also gegenwärtig vom *zweiten* Grade.

Jeder zirkularen Kurve entspricht, wie man leicht erkennt, in der anderen Ebene eine Kurve, die gleichfalls durch die imaginären Kreispunkte geht und in ihnen von der ersten Kurve berührt wird.

Im Fall eines *starren* Systems ist auch $d^2\lambda = 0$ und die Polbahntangente t parallel zu den Bahnnormalen. Setzen wir dann

$$-\frac{da^2}{d^2\vartheta} = k^2$$

und lassen die y-Achse mit t zusammenfallen, so wird nach (2) der Krümmungsradius

$$\mathfrak{r} = \frac{k^2}{x},$$

also konstant für alle Punkte derselben Normale.[1])

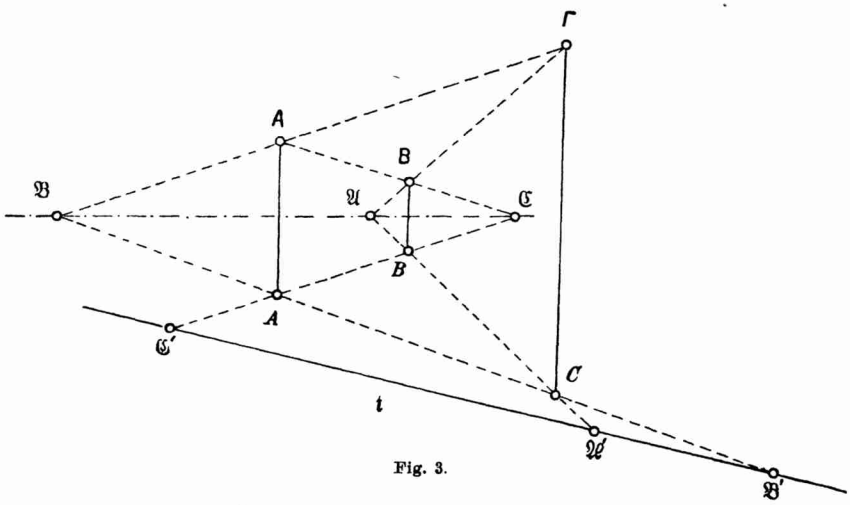

Fig. 3.

4. In Fig. 3 sind drei unendlich benachbarte Phasen eines ähnlich-veränderlichen Systems mit unendlich fernem Pol ganz allgemein dadurch definiert, daß von drei Systempunkten A, B, C, die nicht auf einer Geraden liegen[2]), die parallelen Bahnnormalen und auf ihnen die Krümmungsmittelpunkte A, B, Γ beliebig gegeben sind; man soll die Polbahntangente t konstruieren. Schneidet t die Geraden AA und BB bzw. in M und N, so verhält sich nach (5)

$$AM : BN = B\mathsf{B} : A\mathsf{A},$$

1) Vgl. u. a. Burmester, Kinematik, S. 101.

2) Liegen A, B, C auf einer Geraden und sind die zugehörigen Normalen parallel, so ist Γ durch A und B bestimmt.

mithin teilt t die Strecke AB in demselben Verhältnis. Bestimmen wir daher den Schnittpunkt $\mathfrak{C}$ von AB und AB und machen auf AB die Strecke $A\mathfrak{C}'$ entgegengesetzt gleich $B\mathfrak{C}$, so geht t durch $\mathfrak{C}'$. In derselben Weise ergeben sich die Schnittpunkte $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ von t mit BC und CA.

Die Polbahntangente ist also bereits bestimmt durch die Punkte A, B, C und die Verhältnisse der drei Krümmungsradien, und sie ist unabhängig von der Richtung der parallelen Normalen. Ist die gefundene Gerade t parallel zu AA, BB, $C\Gamma$, so bleibt das System in allen drei Phasen starr.

5. Die Gleichung (5) für den Krümmungsradius $\mathfrak{r}$ der Bahnkurve des Punktes A kann auch aus der entsprechenden, bei *endlichem* Pol geltenden Formel abgeleitet werden. Bedeutet $\mathfrak{P}$ diesen Pol, ds das Bogenelement der Polbahn, ω den Winkel, den in der betrachteten Phase die Bahnnormale jedes Punktes mit seinem Polstrahl bildet, $d\omega$ das Inkrement von ω beim Übergang in die Nachbarphase, r die Länge des Polstrahls $\mathfrak{P}A$ und φ den Winkel zwischen $\mathfrak{P}A$ und der Polbahntangente t, so ist

$$\mathfrak{r} = \frac{r^2\sqrt{d\vartheta^2 + d\lambda^2}}{ds\sin\varphi - r(d\vartheta - d\omega)}\,^{1)},$$

oder, wenn

$$\frac{ds}{\sqrt{d\vartheta^2 + d\lambda^2}} = C, \quad \frac{d\vartheta - d\omega}{\sqrt{d\vartheta^2 + d\omega}} = \gamma, \quad r\cos\varphi = u, \quad r\sin\varphi = v$$

gesetzt wird,

$$\mathfrak{r} = \frac{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}{Cv - \gamma(u^2 + v^2)}.$$

Lassen wir den Punkt $\mathfrak{P}$ auf der Geraden t ins Unendliche rücken und bezeichnen mit C' und γ' die Grenzwerte von $\frac{C}{u^3}$ und von $\frac{\gamma}{u}$ für $u = \infty$, so folgt

$$\mathfrak{r} = \frac{1}{C'v - \gamma'}.$$

Da aber bei unendlich fernem Pol der Wendekreis in die Polbahntangente ausartet, so muß jetzt für die Punkte von t, d. h. für $v = 0$ der Krümmungsradius $\mathfrak{r}$ unendlich groß werden; demnach ist $\gamma' = 0$. Setzen wir noch

$$C' = \frac{1}{q^2\sin\omega}$$

und den zwischen dem Punkte A und der Polbahntagente t liegenden Abschnitt der Bahnnormale $= \mathfrak{y}$, so wird $v = \mathfrak{y}\sin\omega$, mithin $\mathfrak{r} = \frac{q^2}{\mathfrak{y}}$ wie zuvor.

---

1) R. Müller, a. a. O., S. 31.

6. In derselben Weise ergibt sich *der Krümmungsradius der von einer Kurve des bewegten Systems erzeugten Hüllbahnkurve.* Ist A der Gleitpunkt und R der Krümmungsradius der Systemkurve, A_I der Krümmungsmittelpunkt ihrer Hüllbahnkurve an der mit A bezeichneten Stelle, so gilt bei endlichem Pol, wenn wieder $\mathfrak{P}A = r$, $\angle(\mathfrak{P}A, \mathfrak{t}) = \varphi$ gesetzt wird, die Formel[1])

$$AA_I = \frac{r^2\sqrt{d\vartheta^2 + d\lambda^2} + Rds\sin\varphi + Rr(\cos\omega\sqrt{d\vartheta^2 + d\lambda^2} + d\omega)}{ds\sin\varphi - r(d\vartheta - d\omega) - Rd\vartheta\cos\omega}.$$

Nun ist $\cos\omega = \frac{d\vartheta}{\sqrt{d\vartheta^2 + d\lambda^2}}$, also

$$\frac{d\omega}{\sqrt{d\vartheta^2 + d\lambda^2}} = \cos\omega - \gamma;$$

wir können daher auch schreiben

$$AA_I = \frac{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}} + CRv + R(u^2 + v^2)(2\cos\omega - \gamma)}{Cv - \gamma(u^2 + v^2) - R(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\omega}.$$

Daraus folgt für $u = \infty$, da nach Artikel 5 der Grenzwert von $\frac{\gamma}{u}$ verschwindet,

$$AA_I = \frac{1 + C'Rv}{C'v}.$$

Hier ist aber $\frac{1}{C'v}$ gleich dem Krümmungsradius $\mathfrak{r}$ der Bahnkurve des Punktes A, mithin wird

$$AA_I = \mathfrak{r} + R.$$

Bei unendlich fernem Pol ist also der Krümmungsradius der Hüllbahnkurve gleich der Summe der Krümmungsradien der Bahn des Gleitpunkts und der Systemkurve.[2])

7. *Die Punkte stationärer Krümmung.* Aus Gleichung (2) ergibt sich als Bedingung dafür, daß beim Übergang in die folgende Phase das Inkrement $d\mathfrak{r}$ des Krümmungsradius der Bahnkurve des Punktes (x, y) verschwindet,

$$(7)\quad 3(dxd^2y - dyd^2x)(dxd^2x + dyd^2y) - (dx^2 + dy^2)(dxd^3y - dxd^3y) = 0.$$

---

1) a. a. O., S. 68.

2) Dieser Satz gilt auch bei *endlichem* Pol, sobald $d\vartheta = 0$ ist, wenn also Wende- und Rückkehrkreis der betrachteten Phase zusammenfallen. — Bei einem *starren* System stimmt der Satz überein mit der Tatsache, daß die Krümmungsmittelpunkte A_I der Hüllbahnkurve und Ω der Bahn, die der Krümmungsmittelpunkt 0 der Systemkurve im Punkte A beschreibt, identisch sind. Dann ist nämlich $A\Omega = AO + O\Omega = R + O\Omega$ und bei unendlich fernem Pol $O\Omega = AA = \mathfrak{r}$, also $A\Omega = AA_I$.

Nun folgt aus (1)

$$d^3x = d^3a + x d^3\lambda + 2 dx d^2\lambda + d^2x d\lambda + y d^3\vartheta + 2 dy d\vartheta + d^2y d\vartheta$$

und

$$d^3y = d^3b - x d^3\vartheta - 2 dx d^2\vartheta - d^2x d\vartheta + y d^3\lambda + 2 dy d^2\lambda + d^2y d\lambda,$$

also mit Rücksicht auf die vorher berechneten Werte von dx, dy, d^2x, d^2y und da $d\vartheta = d\lambda = 0$ ist,

$$d^3x = d^3a + 2\, da d^2\lambda + x d^3\lambda + y d^3\vartheta$$
$$d^3y = d^3b - 2\, da d^2\vartheta - x d^3\vartheta + y d^3\lambda.$$

Wir erhalten demnach aus (7), wenn wir wieder $d^2b = 0$ setzen, als Gleichung der *Kreispunktkurve*

$$(8) \qquad \begin{cases} 3(x d^2\lambda + y d^2\vartheta)(x d^2\vartheta - y d^2\lambda) - x(da d^3\vartheta - 3 d^2a d^2\vartheta) \\ + y(da d^3\lambda - 3 d^2a d^2\lambda) + da(d^3b - 2\, da d^2\vartheta) = 0. \end{cases}$$

Die bizirkulare Kurve vierter Ordnung, die in einer Phase mit endlichem Pol die Kreispunktkurve darstellt, spaltet sich also gegenwärtig in die doppelt zählende unendlich ferne Gerade und in die durch Gleichung (8) bestimmte *gleichseitige Hyperbel c, deren eine Asymptote zur Polbahntangente* t *parallel ist.* Diese Hyperbel hat t zur Asymptote, sobald

$$d^2\lambda d^3\vartheta - d^2\vartheta d^3\lambda = 0$$

wird, und sie zerfällt in t und eine dazu senkrechte Gerade, wenn außerdem

$$d^3b = 2\, da d^2\vartheta$$

ist.

Kennt man drei Punkte A, B, C, die augenblicklich Bahnstellen mit stationären Krümmungskreisen beschreiben, und deren Mittelpunkte $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma$, so kann man nach Fig. 3 die Gerade t und hierauf in bekannter Weise die Hyperbel c konstruieren. Dann ist der endliche Schnittpunkt von t und c, der sich gleichfalls sofort ermitteln läßt, *der Ballsche Punkt* der betrachteten Phase S. — Soll die Gerade $\mathfrak{t} = \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ eine Asymptote von c sein, so gilt dasselbe von der Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$; beide Geraden müssen also aufeinander senkrecht stehen. Dies ist, wie sich leicht ergibt, der Fall, wenn

$$BC^2(B\mathsf{B}+C\Gamma)(A\mathsf{A}-B\mathsf{B})(A\mathsf{A}-C\Gamma)+CA^2(C\Gamma+A\mathsf{A})(B\mathsf{B}-C\Gamma)(B\mathsf{B}-A\mathsf{A})$$
$$+AB^2(A\mathsf{A}+B\mathsf{B})(C\Gamma-A\mathsf{A})(C\Gamma-B\mathsf{B})=0$$

wird. — Soll endlich die Kurve c in die Polbahntangente t und eine zweite, auf ihr senkrechte Gerade $\mathfrak{s}$ zerfallen, so bestimmen bereits *zwei* Punkte von stationärer Krümmung, z. B. A und B, und ihre Krümmungsmittelpunkte A und B die Geraden t und $\mathfrak{s}$ und damit die Bewegung

des Systems durch vier unendlich benachbarte Phasen. Dann ist nämlich $\mathfrak{s}$ die Gerade AB, und t geht durch den Schnittpunkt von AB und AB senkrecht zu AB.

8. *Die Burmesterschen Punkte.* Differentiiert man Gleichung (7), so erhält man die Bedingung, unter der sich der Punkt (x, y) der Kreispunktkurve in einer Bahnstelle mit *fünf*punktig berührender Tangente befindet. Da $dy = 0$ ist, so folgt

$$4\,dx d^2y d^3x + 3\,d^2y[(d^2x)^2 + (d^2y)^2] - dx^2 d^4y = 0\,.$$

Nach (1) ist aber

$$d^4y = d^4b - 3\,da d^3\vartheta - 3\,d^2a d^2\vartheta - x(6\,d^2\vartheta d^2\lambda + d^4\vartheta) + y[3(d^2\lambda)^2 - 3(d^2\vartheta)^2 + d^4\lambda].$$

Setzt man ferner für dx, d^2x usw. die früher gefundenen Werte, so geht die vorige Gleichung über in

$$(9)\begin{cases} (x d^2\vartheta - y d^2\lambda)\{3(x^2+y^2)[(d^2\vartheta)^2 + (d^2\lambda)^2] + 2x(2\,da d^3\lambda + 3\,d^2a d^2\lambda) \\ + 2y(2\,da d^3\vartheta + 3\,d^2a d^2\vartheta) + 8\,da^2 d^2\lambda + 4\,da d^3a + 3(d^2a)^2\} \\ - x\,da^2(6\,d^2\vartheta d^2\lambda + d^4\vartheta) + y\,da^2[3(d^2\lambda)^2 - 3(d^2\vartheta)^2 + d^4\lambda] \\ + da^2(d^4b - 3\,da d^3\vartheta - 3\,d^2a d^2\vartheta) = 0. \end{cases}$$

Die hierdurch dargestellte Kurve dritter Ordnung hat t zur Asymptote, sie schneidet also die Kreispunktkurve im unendlich fernen Pol und außerdem in fünf endlichen Punkten; es gibt demnach gegenwärtig — wie bei endlichem Pol — *fünf* Burmestersche Punkte.

Ist das System *starr*, mithin $d\lambda = d^2\lambda = d^3\lambda = d^4\lambda = 0$, so folgt, wenn wieder $d^2b = 0$, also die y-Achse parallel zu t gewählt wird, für die Kreispunktkurve c aus (8) die Gleichung

$$(10)\quad 3\,xy(d^2\vartheta)^2 - x(da d^3\vartheta - 3\,d^2a d^2\vartheta) + da(d^3b - 2\,da d^2\vartheta) = 0.$$

Die Kreispunktkurve ist daher eine gleichseitige Hyperbel *mit der Asymptote* t, und es gibt deshalb nur noch *vier* Burmestersche Punkte. Für ihre Abstände von der Polbahntangente folgt durch Elimination von y aus (9) und (10) die Gleichung

$$9x^4(d^2\vartheta)^4 + x^2 da[5\,da(d^3\vartheta)^2 - 3\,da d^2\vartheta d^4\vartheta - 12\,d^2a d^2\vartheta d^3\vartheta + 12\,d^3a(d^2\vartheta)^2]$$
$$- 3\,x da^2(2\,d^3b d^3\vartheta - d^4b d^2\vartheta) - da^2(2\,da d^2\vartheta - d^3b)(da d^2\vartheta + d^3b) = 0;$$

zwischen diesen Abständen besteht also die einfache Beziehung

$$\sum_{i=1}^{i=4} x_i = 0\,.$$