Werk

Titel: Über ganze transzendnete Funktionen.

Autor: Blumenthal, Otto

Jahr: 1907

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?37721857X_0016|log24

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Über ganze transzendente Funktionen.[1])

Von Otto Blumenthal in Aachen.

Ich stelle mir in diesem Vortrage zur Hauptaufgabe, die *ganzen Funktionen unendlicher Ordnung* zu behandeln und ihre Theorie in einer neuen, einfachen Form darzustellen. Dabei fügen sich naturgemäß, als Ergänzungen oder wichtige Weiterbildungen, die Ergebnisse einiger kürzlich erschienenen Arbeiten ein, die vielleicht bisher noch weniger bekannt geworden sind.

1. Ich gebe zunächst als Einleitung einen Überblick über die Theorie der *Funktionen endlicher Ordnung.* Hier sind die ursprünglichen, auf Hadamard und Borel[2]) zurückgehenden Sätze in letzter Zeit wesentlich verschärft worden. Ich wähle der Vollständigkeit halber diese neue Form der Darstellung, obwohl die spätere Verallgemeinerung auf Funktionen unendlicher Ordnung sich an die ursprünglichen Begriffsbildungen von Hadamard und Borel anschließt.

Sei $f(z)$ eine ganze transzendente Funktion. Wir bezeichnen mit $M(r)$ das Maximum von $|f(z)|$ auf dem Kreise mit Radius r um den Nullpunkt. $M(r)$ ist alsdann eine monoton ins Unendliche wachsende Funktion.[3]) Es handelt sich bei der Theorie um einen Zusammenhang zwischen der Stärke des Wachstums von $M(r)$ und der Dichtigkeit der Stellen, an welchen $f(z)$ einen beliebigen Wert a annimmt (im folgenden abgekürzt als „Verteilungsdichte (a)" bezeichnet.)

Zur Aufstellung dieser Sätze hat man vor allen Dingen von den Unregelmäßigkeiten des Wachstums von $M(r)$ und der Verteilungsdichten (a) zu abstrahieren. Diese Abstraktion geschieht im Gebiete

---

1) Im wesentlichen unveränderte Wiedergabe eines auf der Stuttgarter Naturforscher-Versammlung erstatteten Referates. Eine ausführliche Darstellung der Resultate über Funktionen unendlicher Ordnung werde ich in einem demnächst im Verlage von Gauthier-Villars (Collection Borel) erscheinenden Buche geben Daher werden auch in diesem Referate Beweise durchgängig weggelassen.

2) Siehe die Darstellung bei Borel, Leçons sur les fonctions entières (Paris, 1900).

3) Eine genauere Betrachtung dieser Funktion folgt am Schlusse der Arbeit.

endlicher Ordnung allgemein durch eine *Mittelwertbildung mit Hilfe bekannter Funktionen* von typischen Wachstumseigenschaften.

Wir führen nämlich folgende Definitionen ein:

a) Die Funktion $M(r)$ wächst im Mittel wie $e^{r^{\mu}(\lg r)^{\nu_1}(\lg_2 r)^{\nu_2}\dots(\lg_p r)^{\nu_p}}$, wenn einerseits von einem gewissen r ab ständig

$$M(r) < e^{r^{\mu}(\lg r)^{\nu_1}\dots(\lg_p r)^{\nu_p+\varepsilon}},$$

andererseits für gewisse beliebig große r

$$M(r) > e^{r^{\mu}(\lg r)^{\nu_1}\dots(\lg_p r)^{\nu_p-\varepsilon}}.$$ [1])

Wir nennen alsdann $f(z)$ eine Funktion endlicher Ordnung und $(\mu, \nu_1, \dots, \nu_p)$ *die Ordnung der Funktion.* Dabei soll μ (positiv und) von Null verschieden sein.

b) Die Mittelwertbildung für die Verteilungsdichte (a) läßt sich zunächst in ganz analoger Form darstellen.

Seien $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ die nach steigenden Moduln geordneten Werte, für welche f den Wert a annimmt. Man abstrahiere von den Argumenten und bezeichne die Moduln der Stellen $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ durch $r_1, r_2, \dots$. Wir haben dann endliche Verteilungsdichte (a), wenn für endliches positives ϱ und endliche Zahlen $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ einerseits von einem gewissen n ab ständig:

$$r_n > \frac{n^{\frac{1}{\varrho}}}{(\lg n)^{\frac{\sigma_1}{\varrho}}\dots(\lg_p n)^{\frac{\sigma_p+\varepsilon}{\varrho}}}$$

andererseits für gewisse beliebig große n

$$r_n < \frac{n^{\frac{1}{\varrho}}}{(\lg n)^{\frac{\sigma_1}{\varrho}}\dots(\lg_p n)^{\frac{\sigma_p-\varepsilon}{\varrho}}}.$$

Das Zahlensystem $(\varrho, \sigma_1, \dots, \sigma_p)$ läßt sich aber noch in anderer Weise charakterisieren. In der Tat ist unter den aufgestellten Bedingungen für jedes positive η die Reihe $\sum \frac{1}{r_n^{\varrho}(\lg r_n)^{1+\sigma_1}\dots(\lg_p r_n)^{1+\sigma_p+\eta}}$ konvergent, die Reihe $\sum \frac{1}{r_n^{\varrho}(\lg r_n)^{1+\sigma_1}\dots(\lg_p r_n)^{1+\sigma_p-\eta}}$ divergent. Wir

1) Unter ε verstehen wir hier und immer in der Folge eine positive Zahl, die für genügend große Werte der Variabeln (hier r) beliebig klein gewählt werden kann (mit wachsender Variabeln *geeignet* gegen Null geht).

nennen das System $(\varrho, \sigma_1, \ldots, \sigma_p)$ den *Konvergenzexponenten der Verteilungsdichte* (a). Die Ableitung beweist, daß auch die Einführung des Konvergenzexponenten auf eine Mittelwertbildung mit Hilfe bekannter Funktionen hinauskommt. Wir werden im folgenden stets eine Verteilungsdichte durch ihren Konvergenzexponenten charakterisieren.

Nach Einführung dieser Definitionen faßt sich die Theorie der Funktionen endlicher Ordnung in folgenden Satz zusammen:

Bei endlicher Ordnung sind die Verteilungsdichten aller Werte a endlich, und ihre Konvergenzexponenten sind höchstens gleich der Ordnung.[1])

Es kann höchstens einen einzigen Wert a geben, dessen zugehöriger Konvergenzexponent kleiner als die Ordnung ist.[2])

Der zweite Teil des Satzes ist das bekannte Picardsche Theorem in der Erweiterung, die zuerst Borel erkannt hat.

2. Zwei Klassen von Funktionen sind unter den soeben betrachteten nicht enthalten: einmal die Funktionen von schwachem Wachstum, für welche $\mu = 0$ („Funktionen der Ordnung Null"), dann die Funktionen unendlicher Ordnung. Da über die Funktionen der Ordnung Null nur sehr geringe Literatur existiert, werden wir uns im folgenden ausschließlich auf Funktionen unendlicher Ordnung beschränken. Ich bemerke jedoch, daß auch die Behandlung der Funktionen der Ordnung Null die unten besprochenen Methoden erfordert.

3. Da die bei Funktionen endlicher Ordnung erzielten Resultate wesentlich auf der Methode der Mittelwertbildung beruhen, so muß diese zunächst auf den Fall unendlicher Ordnung übertragen werden. Dies gelingt ohne weiteres bei denjenigen Funktionen, die Herr Maillet Funktionen „nicht transfiniter Ordnung" nennt, indem nämlich diese Funktionen gerade nach dem Gesichtspunkt ausgewählt sind, daß ihr Wachstum Mittelwertbildungen mit Hilfe iterierter Exponentialfunktionen

$$e_2(r^\mu) = e^{e^{r^\mu}}, \ldots, e_k(r^\mu) = e^{e_{k-1}(r^\mu)}$$

zuläßt.[3]) Da diese Untersuchungen mir methodisch Neues nicht zu bieten erscheinen, gebe ich unten[4]) nur einige Resultate vergleichsweise an.

---

1) Die scharfe Fassung fast gleichzeitig gegeben von Lindelöf und Boutroux (E. Lindelöf, Acta Soc. Fenn. 31 (1902); P. Boutroux, Acta Math. 28. (1903).

2) Scharfe Fassung von A. Wiman, Arkiv for Mat. Astr. och Fysik 1(1904).

3) Systematische Darstellung bei E. Maillet (Ann. Ec. Norm. 23 (1906)), von ihm rühren auch die Bezeichnungen her. Die Resultate und Methoden gehen wesentlich auf Boutroux zurück.

4) Seite 104.

4. Die Theorie der *allgemeinen Funktionen unendlicher Ordnung* ist zuerst von Borel[1]) in großzügiger Skizzierung gegeben worden. Seine Resultate wurden präzisiert und in wesentlichen Punkten ergänzt in der unter meiner Leitung angefertigten Dissertation von Kraft.[2]) Hierzu kamen dann wichtige Ergebnisse von Boutroux[3]), in dessen Arbeit übrigens die Funktionen unendlicher Ordnung nur einen kleinen Raum einnehmen. All dies Material wird in der folgenden Darstellung benutzt, außerdem tritt Neues hinzu.

Borel hat zunächst darauf hingewiesen und am Beispiel gezeigt, daß es ganze Funktionen gibt, die stärker wachsen als jede iterierte Exponentialfunktion $e_k(r^\alpha)$.[4]) Auf diese Funktionen läßt sich also die Mittelwertbildung mittels bekannter Funktionen nicht anwenden. Andererseits ist eine gewisse Abstraktion von den Unregelmäßigkeiten des Wachstumes der auftretenden Funktionen unbedingt erforderlich, wenn man zu Resultaten von ähnlicher Einfachheit wie bei endlicher Ordnung gelangen will. Man wird also notwendig zu der Aufgabe geführt, die Mittelwertbildung zu verallgemeinern: man hat zu untersuchen, welche Eigenschaften der bisher benutzten elementaren Mittelwertfunktionen für ihre Verwendbarkeit ausschlaggebend sind, und dann die allgemeinsten Funktionen von solchen Eigenschaften zur Mittelwertbildung heranzuziehen. So entsteht die *Theorie der Vergleichsfunktionen.*

Ich führe die Untersuchung ganz allgemein folgendermaßen durch. x sei eine stetig variabele, reelle Größe[5]); ich nenne dann eine reelle, positive, für alle positiven Werte von x endliche, stetige und stetig differenzierbare[6]) *Funktion $T(x)$ eine Vergleichsfunktion, wenn sie für alle Werte x folgende 3 Eigenschaften besitzt:*

I. $T(x)$ *ist eine niemals abnehmende Funktion.*

II. $T\left(x + \frac{1}{\lg T}\right) < T(x)^{1+\varepsilon}$.

III. $T'(x) < \frac{T(x)^{1+\varepsilon}}{r \lg r}$.

Es wird sich ergeben, daß diese drei Eigenschaften die Verwendbarkeit der Funktion $T(x)$ für unsere Zwecke sichern.

1) Acta Math. 21 (1897).

2) „Über ganze transzendente Funktionen von unendlicher Ordnung", Diss. Göttingen 1903.

3) Acta Math. 28 (1903).

4) Diese Funktionen nennt Herr Maillet „von transfiniter Ordnung."

5) Der Fall unstetig variabelen (z. B. ganzzahligen) x läßt sich dem betrachteten Falle augenscheinlich einfach einordnen (siehe auch S. 103).

6) D. h. mit einer stetigen Ableitung $T'(x)$ versehene.

Die Bedingungen II und III bedürfen einer Erläuterung.

Bedingung II beruht auf einer Bemerkung von Borel (a. a. O.), daß eine für alle endlichen Werte x endliche, niemals abnehmende Funktion $W(x)$ eine Ungleichung der Form

$$W\left(x + \frac{1}{\lg W}\right) > W(x)^{1+\alpha}$$

bei festem α jedenfalls nur in Intervallen von endlicher Gesamtausdehnung befriedigen kann: anderenfalls würde nämlich die Funktion $W(x)$ schon für endliches x unendlich, die Kurve $y = W(x)$ hätte also eine vertikale Asymptote. Andererseits ist leicht zu sehen, daß mehr als diese (oder eine ähnliche) Aussage über das Verhältnis der Werte einer Funktion W an benachbarten Punkten sich nicht machen läßt. Ist beispielsweise δ eine beliebig kleine, aber von x unabhängige positive Größe, so gibt es Funktionen, für welche mit wachsendem x die Größe $W(x+\delta)$ größer als jede beliebige Potenz von $W(x)$ wird.

Die Bedingung II ist also für alle Funktionen $W(x)$ mit Ausnahme einer Intervallmenge von endlicher Gesamtausdehnung von selbst erfüllt. Ihre Aufstellung für *alle* Werte x ist für die Verwendbarkeit einer Funktion als Vergleichsfunktion *notwendig, da ohne sie* (oder eine Bedingung ähnlicher Form) *kein Schluß von einem Funktionswerte auf Nachbarwerte gemacht werden kann.*

Bedingung III ist eine *hinreichende* Bedingung für die Verwendbarkeit einer Funktion. Vielleicht läßt sie sich noch durch eine andere, weniger beschränkende ersetzen. Sie rechtfertigt sich durch folgende Überlegung: für jede beliebige Funktion $W(x)$ sind die Intervalle, in welchen III nicht erfüllt ist, einzeln endlich, und ihre Ausdehnung nimmt mit wachsendem x ab. Die Gesamtheit der Ausnahmeintervalle zwischen x und einem beliebigen Werte X ist kleiner als die Hälfte der Strecke $(x \ldots X)$.

Die Anwendung der Vergleichsfunktionen ist folgende: Sei $W(x)$ eine beliebige stetige, mit wachsendem x ins Unendliche wachsende Funktion. Eine Vergleichsfunktion $T(x)$ heißt alsdann *zu $W(x)$ gehörig,* wenn sie, außer den Bedingungen I—III, noch die folgenden beiden erfüllt:

IV. *Für alle Werte x oberhalb eines Wertes x_0 ist*

$$W(x) \leq T(x).$$

V. *Für unendlich viele wachsende Werte x ist*

$$T(x) < W(x)^{1+\varepsilon}$$

Man zeigt (Kraft, a. a. O.), daß jeder Funktion W unendlich viele Vergleichsfunktionen T zugeordnet werden können. Insbesondere sind die oben betrachteten elementaren Mittelwertfunktionen Vergleichsfunktionen. Es ist aber auch ersichtlich, daß die allgemeinen Vergleichsfunktionen ein viel intimeres Eingehen auf die Eigenheiten der verglichenen Funktionen gestatten, als diese speziellen, da die Bedingungen I—III wenig einschränkend sind. *Die Einführung der Vergleichsfunktionen wird daher auch in den Fällen, wo Mittelwertbildung mit Hilfe elementarer Funktionen möglich ist, genauere Resultate liefern als diese letztere Methode.*

5. Der Gebrauch der Vergleichsfunktionen bei der Behandlung von Funktionen unendlicher Ordnung besteht darin, daß Ordnung und Konvergenzexponent als Vergleichsfunktionen angesetzt werden.

a) Erstens nämlich setzen wir die Funktion $M(r)$ — im Anschlusse an die von Hadamard benutzte Schreibweise bei endlicher Ordnung — in die Form

$$M(r) = e^{r^{\nu(r)}};$$

$\nu(r)$ heißt das *Wachstum* von $f(z)$. Wegen unserer Annahme unendlicher Ordnung nimmt $\nu(r)$ mit wachsendem r beliebig große Werte an.[1])

---

1) Es sei jedoch bemerkt, daß trotzdem $\nu(r)$ im allgemeinen nicht etwa eine ständig wachsende Funktion ist. Beispielsweise kann für unendlich viele unendlich zunehmende Werte r_k von r die Beziehung $(1-\varepsilon)r_k < \nu(r_k) < (1+\varepsilon)r_k$ bestehen, während für gewisse Zwischenwerte r_k' $(r_{k-1} < r_k' < r_k)$ die Ungleichung $\nu(r_k') < 1+\varepsilon$ gilt. Funktionen $f(z)$ dieser Art lassen sich in Form von Potenzreihen aufstellen.

Alle von Borel und — in schärferer Fassung — Lindelöf bei endlicher Ordnung als „fonctions à croissance irrégulière" bezeichneten Funktionen haben stellenweise abnehmendes $\nu(r)$. Es verdient Beachtung, daß analytisch sehr einfach definierte Funktionen „croissance irrégulière" besitzen. Herr G. H. Hardy (London Math. Soc., series 2, vol. III (1905): „On a class of analytic functions") zeigt nämlich, daß Reihen der Form $\sum \frac{1}{\sin \lambda n\pi} \frac{z^n}{n!}$ bei irrationalem λ je nach der arithmetischen Natur (Kettenbruchentwicklung) des λ sehr verschiedene Konvergenzeigenschaften zeigen. Insbesondere läßt sich λ so wählen, daß die Reihe eine ganze Funktion darstellt, und zwar eine Funktion à croissance irrégulière im Sinne von Lindelöf. Die Funktion schwankt nämlich zwischen den Größen-Ordnungen e^r und $e^{r \lg r}$. Außerdem können Reihen dieser Form nicht als künstlich konstruiert bezeichnet werden, denn sie treten auf bei der Potenzreihenentwicklung des Stieltjesschen Integrals

$$F_\lambda(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-u^\lambda} du}{u+z}$$

Jede zu $\nu(r)$ gehörige Vergleichsfunktion nennen wir eine Ordnung von $f(z)$ und bezeichnen sie durch $\mu(r)$.[1])

b) Die Verteilungsdichte (*a*) charakterisieren wir durch eine *Konvergenzfunktion*, entsprechend dem bei endlicher Ordnung gebrauchten Konvergenzexponenten. Seien nämlich wieder $r_1, r_2, \ldots$ die absoluten Beträge der von Null verschiedenen Stellen, an welchen $f(z)$ den Wert a annimmt, so gehen wir aus von einer Reihe von Zahlen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$, so daß

$$\sum \frac{1}{r_n^{\sigma_n}}$$

konvergiert. Hierfür ist notwendig, daß von einem gewissen n ab ständig

$$\sigma_n > \frac{\lg n}{\lg r_n}.$$

Zur Konstruktion der Konvergenzfunktion verfahren wir jetzt so: Wir tragen zu jedem r_n als Abzisse die zugehörige Größe $\frac{\lg n}{\lg r_n}$ als Ordinate auf und erhalten unendlich viele Punkte P_n, deren Ordinaten im allgemeinen mit r_n beliebig wachsen. Die geradlinigen Verbindungsstrecken $(P_n P_{n+1})$ liefern also einen Polygonzug, der eine stetige, im allgemeinen wachsende Funktion von r darstellt.

Jede Vergleichsfunktion $\varrho(r)$ zu diesem Polygonzug heißt eine Konvergenzfunktion der Verteilungsdichte (a).

6. Jetzt lassen sich die Resultate für endliche Ordnung vollkommen auf unendliche Ordnung übertragen. Sie fassen sich zusammen in den Satz:

Ist $\mu(r)$ eine Ordnung von $f(z)$, so ist $\mu(r)^{1+\varepsilon}$ Konvergenzfunktion für jede Verteilungsdichte (a).

Für alle Werte a, mit Ausnahme höchstens eines einzigen, ist $\varrho(r)^{1+\varepsilon}$ eine Ordnung von $f(z)$, wenn $\varrho(r)$ eine Konvergenzfunktion der Verteilungsdichte (a) ist.

Die Worte „mit Ausnahme höchstens eines einzigen" enthalten das Picardsche Theorem.

7. Der Beweis für den ersten Teil unseres Satzes wird nach einer von Boutroux herrührenden Methode geführt.[2]) Boutroux hat näm-

1) Jeder Funktion sind also unendlich viele Ordnungen zugewiesen. Dies ist eine notwendige Folge der Einführung der Vergleichsfunktionen, nicht etwa eine Besonderheit der Funktionen unendlicher Ordnung gegenüber denjenigen endlicher Ordnung. Im Gegenteil lassen sich alle jetzt gegebenen Definitionen auf endliche Ordnung anwenden und scheinen auch dort brauchbare Erweiterungen der in **1.** besprochenen Ergebnisse zu liefern.

2) Acta Math. 28, S. 92—94.

lich gezeigt, daß sich durch ein sehr einfaches und sinnreiches Verdichtungsverfahren die bei endlicher Ordnung übliche Methode von Schou[1]) so verschärfen läßt, daß sie auch bei unendlicher Ordnung genügend genaue Resultate liefert.

Der Beweis des zweiten Teils ist in der Dissertation von Kraft gegeben.

Boutroux (und nach ihm Maillet) haben sich hier auf Betrachtung solcher Verteilungen (a) beschränkt, welche eine Mittelwertbildung mit Hilfe der Funktionen $\lg_k n$ zulassen. Es ist interessant, unsere Resultate mit denen von Boutroux-Maillet hinsichtlich der erzielten Genauigkeit zu vergleichen.

Betrachten wir Verteilungsdichten derart, daß

(1) $r_n \geqq (\lg n)^{\frac{1}{\gamma}}$, (2) $r_n \geqq (\lg_2 n)^{\frac{1}{\gamma}}$

Dann gelten von dem Picardschen Ausnahmefall abgesehen, nach den Abschätzungen von Boutroux (a. a. O., S. 97—102) für das Wachstum $\nu(r)$ die Ungleichungen

(1) $\nu(r) > \frac{(1+\varepsilon)}{\lg r} r^{\gamma}$, (2) $\nu(r) > \frac{1}{\lg r} \cdot e^{(1+\varepsilon) r^{\gamma}}$.

Wollen wir aber unsere oben angegebenen Resultate anwenden, so haben wir nur zu berücksichtigen, daß

(1) $\frac{\lg n}{\lg r_n} \leqq \frac{1}{\lg r_n} r_n^{\gamma}$, (2) $\frac{\lg n}{\lg r_n} \leqq \frac{1}{\lg r_n} e^{r_n^{\gamma}}$,

Daher können $\frac{1}{\lg r} r^{\gamma}$, $\frac{1}{\lg r} e^{r^{\gamma}}$, welche ja Vergleichsfunktionen sind, als Konvergenzfunktionen $\varrho(r)$ gewählt werden, und dies ergibt dann für das Wachstum:

(1) $\nu(r) < \frac{1}{(\lg r)^{1+\varepsilon}} r^{\gamma+\varepsilon}$, (2) $\nu(r) < \frac{1}{\lg r^{1+\varepsilon}} e^{(1+\varepsilon) r^{\gamma}}$.

Im ersten Falle ist also das Resultat von Boutroux etwas genauer als das unsrige, im zweiten Falle verdient unseres schon den Vorzug. Dies ist erst recht und in steigendem Maße bei den höheren Verteilungsdichten $\left(r_n > (\lg_k n)^{\frac{1}{\gamma}}\right)$ der Fall.[2])

Sonach ist das Verfahren der Vergleichsfunktionen dem der Mittelwertbildung durch elementare Funktionen nicht nur hinsichtlich der

1) Borel, Fonctions entières.

2) Vergl. Maillet a. a. O., der die nach der Methode von Boutroux erhaltenen Resultate explizit ausspricht. Er begnügt sich allerdings dabei mit einer geringeren Genauigkeit der Abschätzungen.

Allgemeinheit, sondern auch hinsichtlich der erzielten Genauigkeit überlegen.

8. Im Vorstehenden hoffe ich die Ergebnisse der Untersuchungen über ganze Funktionen genügend eingehend angegeben zu haben.

Im Folgenden kehre ich von anderem Gesichtspunkt aus zum *Picardschen Satze* zurück und referiere die Resultate einiger neuer Arbeiten, die den Gültigkeitsbereich des Satzes in bemerkenswerter Weise ausgedehnt haben.[1])

Der einfacheren Sprechweise halber beschränke ich mich dabei auf Funktionen endlicher Ordnung. Der Ordnungsbegriff ist von Borel[2]) auf meromorphe Funktionen übertragen worden. Eine Anwendung des Mittag-Lefflerschen Satzes liefert ferner die Verallgemeinerung auf beliebige Funktionen mit isolierter wesentlich singulärer Stelle, in deren Umgebung sie eindeutig sind.[3]) Dann läßt sich auch der Picardsche Satz auf diese Funktionen übertragen und lautet:

Ist $(\mu, \nu_1, \ldots, \nu_p)$ die endliche Ordnung der eindeutigen Funktion an dem isolierten, wesentlich singulären Punkt, so gibt es höchstens zwei Werte a_1, a_2 von so geringen Verteilungsdichten in der Umgebung des wesentlich singulären Punktes, daß die zugehörigen Konvergenzexponenten kleiner als die Ordnung sind.

Wesentlicher aber erscheint mir eine Ausdehnung des Satzes auf eine Klasse mehrdeutiger Funktionen, die kürzlich von Herrn Georges Rémoundos entwickelt worden ist.[4])

Für eindeutige ganze Funktionen ist der Picardsche Satz mit einer Unmöglichkeitsaussage über die Addition äquivalent:

Sind (bei endlicher Ordnung) $H_1(z)$ und $H_2(z)$ Polynome vom Grade k, $\Pi_1(z)$, $\Pi_2(z)$ und $\varphi(z)$ von Null verschiedene ganze Funktionen von geringerer Ordnung als k[5]), so ist eine Identität der Form

$$\Pi_1(z)\, e^{H_1(z)} + \Pi_2(z)\, e^{H_2(z)} = \varphi(z)$$

unmöglich.

1) Ich verstehe dabei unter dem Picardschen Satz stets den Satz in der — mehrfach formulierten — Verallgemeinerung von Borel. Aus dem Thema dieses Vortrags heraus fällt die feine und unerwartete Verschärfung des Picardschen Satzes über die *ausgelassenen* Werte, die Herr Landau zuerst bemerkt hat, und die seitdem mehrfach weiter behandelt worden ist.

2) Leçons sur les fonctions méromorphes, chap. III.

3) Maillet, Bull. Soc. Math. de France 31 (1903).

4) Thèse Paris 1905.

5) Die genauere Ordnungsbestimmung $(\mu, \nu_1, \ldots, \nu_p)$ wird hier und im Folgenden der Kürze halber weggelassen.

Dieser Satz über die Addition wurde von Borel auf m-gliedrige Summen verallgemeinert[1]): Sind $H_i(z)$ Polynome von dem Grade k, $\Pi_i(z)$ und $\varphi(z)$ nicht identisch verschwindende ganze Funktionen von geringerer Ordnung als k, so gibt es keine Identität der Form:

$$\Pi_1(z)\, e^{H_1(z)} + \Pi_2(z)\, e^{H_2(z)} + \ldots + \Pi_m(z)\, e^{H_m(z)} = \varphi(z).$$

Läßt sich auch dieser Satz als ein Satz über Ausnahmewerte deuten? Herr Rémoundos zeigt, daß er die Ausnahmewerte einer allgemeinen Gattung mehrdeutiger Funktionen beherrscht.

Sind $A_1(z), \ldots, A_m(z)$ ganze Funktionen von der Ordnung $\leqq k$, so aber, daß mindestens eine der Funktionen tatsächlich die Ordnung k besitzt, und ist u definiert durch die Gleichung

$$f(z, u) \equiv u^m + A_1 u^{m-1} \ldots + A_m = 0,$$

so heißt u eine *m-deutige ganze algebroide Funktion der Ordnung k*. Seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ die Werte z, für welche u den Wert u_0 annimmt[2]), so wird die Verteilungsdichte (u_0) wie früher definiert.

Hat diese Verteilungsdichte einen Konvergenzexponenten, der kleiner ist als die Ordnung, so sind zwei Fälle möglich:

Entweder ist $f(z, u_0) = \Phi_0(z)$ eine Funktion geringerer Ordnung als k; dies kann sicher höchstens für $m - 1$ Werte u eintreten, da sich andernfalls die Funktionen A_i linear aus den Funktionen geringerer Ordnung Φ zusammensetzen ließen und daher selbst geringerer Ordnung wären;

oder es ist $f(z, u_0) = \Pi_0(z)\, e^{H_0(z)}$, wo $\Pi_0(z)$ von geringerer Ordnung, $H_0(z)$ ein Polynom vom Grade k ist. Dies kann höchstens für m Werte u eintreten. Denn zwischen $m + 1$ Gleichungen der angenommenen Form lassen sich die Koeffizienten A_i eliminieren, und es resultiert eine Beziehung der Gestalt, die in dem Borelschen Satze als unmöglich nachgewiesen wurde.

Daher der Satz: *Eine m-deutige, ganze algebroide Funktion der Ordnung k nimmt alle Werte mit Ausnahme von höchstens $2m - 1$ mit einer Verteilungsdichte vom Konvergenzexponenten k an.*

Der Satz überträgt sich natürlich unmittelbar auf gebrochene (meromorphe) algebroide Funktionen und solche, die sich in der Umgebung eines isolierten singulären Punktes algebroid verhalten.

Dies ist die angezeigte wesentliche Verallgemeinerung des Picardschen Satzes.

---

1) Acta Math. 20 (1897), S. 385.

2) Wir sagen: u nimmt für $z = \alpha$ den Wert u_0 an, wenn es diesen Wert auf *irgend einem* Blatt der Riemannschen Fläche annimmt.

9. Ich gebe zum Schluß einige Betrachtungen allgemeineren Inhalts über die Funktion $M(r)$. Ich schneide dabei die Aussagen stets auf den Fall ganzer Funktionen zu, bemerke aber, daß sie allgemein für Potenzreihen mit beliebigem Konvergenzradius gültig sind.

Zunächst ist bekannt, daß $M(r)$ eine wachsende Funktion ist. Da es ferner außer den Potenzen Az^m keine ganzen Funktionen gibt, deren absoluter Betrag längs eines Kreises konstant ist, für alle übrigen Funktionen aber auf jedem Kreise innerhalb eines endlichen Bereiches nur eine beschränkte Anzahl von Maximum- oder Minimumpunkten des absoluten Betrages existiert, so folgt leicht, daß $M(r)$ an jeder Stelle bestimmte vorwärts und rückwärts genommene Ableitungen besitzt. Die Anzahl der Werte r, an welchen vordere und hintere Ableitung von einander verschieden sind, ist in jedem endlichem Intervalle endlich, und an diesen Stellen ist stets die vordere Ableitung größer als die hintere.

Ich habe aber auch einen weitergehenden Satz bewiesen, der in der Dissertation von Kraft ausgesprochen ist:

In jedem endlichen Intervall setzt sich die Kurve $y = M(r)$ aus einer endlichen Anzahl analytischer Kurvenstücke zusammen.

Im folgenden benutze ich übrigens nur die Existenz der vorderen und hinteren Ableitung, sowie die in gleicher Weise sich ergebende Tatsache, daß die Gesamtheit der Punkte größten absoluten Betrages auf den verschiedenen Kreisen in der Ebene der z eine Kurve (Maximumkurve) bildet, die in einem endlichen Bereich nur eine endliche Anzahl von Sprungstellen aufweist, an allen Nichtsprungstellen eine bestimmte einzige, an den Sprungstellen aber wenigstens eine vordere und hintere Ableitung besitzt. Bei Einführung von Polarkoordinaten r, φ und der Schreibweise

$$f = Ge^{i\Psi}$$

setzt sich diese Kurve aus Stücken der Kurve $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$ zusammen. Da weiter diese Kurve mit $\frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} = 0$ in jedem endlichen Gebiete entweder nur eine endliche Anzahl von Punkten oder aber einen ganzen Kurvenzweig gemein hat[1]), so folgt: Die Maximumkurve hat innerhalb eines endlichen Bereiches sicher nur an einer endlichen Anzahl von Stellen eine unendliche (vordere, hintere) Ableitung $\frac{d\varphi}{dr}$. Verschwindet $\frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2}$ längs eines ganzen Stückes der Maximumkurve, so ist längs dieses Stückes auch $\frac{\partial^2 G}{\partial r \partial \varphi} = 0$.

1) Siehe z. B. meine Arbeit über das Eliminationsproblem, Math. Ann. 57.

Zu diesen sehr allgemeinen Resultaten über die Funktion $M(r)$ tritt dann noch ein etwas spezielleres, das bisher noch nicht bekannt gewesen zu sein scheint:

Für alle ganzen Funktionen ist der Ausdruck

$$r \frac{d \lg M}{dr}$$

eine wachsende Funktion von r. Dabei kann $\frac{d \lg M}{dr}$ den vorderen oder den hinteren Differentialquotienten bezeichnen.[1])

Der Beweis folgt in einfachster Weise daraus, daß $\lg G$ der Gleichung $\Delta \lg G = 0$ genügt. In Polarkoordinaten lautet diese Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \lg G}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \lg G}{\partial \varphi^2} = 0.$$

An dem Schnittpunkte des Kreises r mit der Maximumkurve ist jedenfalls

$$\frac{\partial^2 \lg G}{\partial \varphi^2} \leqq 0, \qquad \text{daher} \qquad \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \lg G}{\partial r} \geqq 0.$$

Wir bezeichnen weiter, wie oben, mit $\frac{d\varphi}{dr}$ die (vordere, hintere) Ableitung der Maximumkurve und betrachten zunächst ein Kurvenstück, auf dem $\frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2}$, also auch $\frac{\partial^2 \lg G}{\partial \varphi^2}$, von Null verschieden, also $\frac{d\varphi}{dr}$ endlich ist. Dann ist für jeden Wert r, der diesem Kurvenstück zugehört,

$$\frac{d \lg M}{dr} = \frac{\partial \lg G}{\partial r} + \frac{\partial \lg G}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dr} = \frac{\partial \lg G}{\partial r}$$

und daher weiter

$$\frac{d}{dr} r \frac{d \lg M}{dr} = \frac{d}{dr} r \frac{\partial \lg G}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \lg G}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \lg G}{\partial r \partial \varphi} \frac{d\varphi}{dr}.$$

Nun ist

$$\frac{d\varphi}{dr} = - \frac{\frac{\partial^2 \lg G}{\partial r \partial \varphi}}{\frac{\partial^2 \lg G}{\partial \varphi^2}}.$$

---

1) Diesen Satz habe ich im August 1906 gelegentlich der Vorbereitung meines Stuttgarter Vortrags gefunden, in Stuttgart aber nicht vorgetragen. Unabhängig von mir ist merkwürdigerweise kurz nach der Stuttgarter Versammlung (Oktober 1906) auf ganz anderem Wege Herr Faber auf denselben Satz gestoßen. Sein Beweis wird in den Math. Ann. 63 veröffentlicht werden. — Ein Spezialfall des Satzes findet sich bei Hartogs, Math. Ann. 62, S. 77.