Strahl beider Büschel (B_k, a) und (B'_k, a). Der perspektive Durchschnitt dieser Büschel ist aber a, denn ein jeder Strahl b_{kh} aus (B_k, a) trifft a in einem Punkte A''_f, durch welchen die dem Büschel (A''_f, b) entsprechende Erzeugende von F^2 hindurchgeht. Dem Strahle b_{kh} entspricht also die Ebene (A''_f, b_k) von $[F^2]$, und der Schnittpunkt A''_f dieses Elementenpaares ist also ein Punkt der Fläche. Demnach ist a nicht nur eine Flächengerade als Kongruenzachse, sondern sie ist es auch als der gemeinschaftliche perspektive Durchschnitt je eines in den Ebenen $(B_k a)$ enthaltenen Strahlenbüschelpaares. In diesen Ebenen durch a zählt also a doppelt, und es ist in einer jeden von ihnen nur noch eine Flächengerade a_{fk} enthalten.

Da den Büscheln (B_k, a) auf F^2 die Erzeugenden des Systemes a entsprechen, so wird einem gewissen Büchel (B^0_k, a) gerade die Erzeugende (zugleich Kongruenzachse) a entsprechen. Der entsprechende Tangentialebenenbüschel um a wird nur eine Ebene nach B^0_k senden u. zw. die Ebene $(B^0_k a)$ selbst. In dieser liegt daher auch nur eine Flächengerade durch B^0_k.

Es ist somit bewiesen, daß a die doppelte und b die einfache Leitgerade der erzeugten Regelfläche F^3 ist.

Weitere Untersuchungen, welche aus dieser Erzeugungsart für verschiedene F_3 folgen, werde ich bei einer anderen Gelegenheit vorbringen.

Die Theorie der reellen Zahlen.[1])

Von Felix Bernstein in Halle a. S.

Im folgenden soll eine kurze Darstellung der Resultate einer Untersuchung gegeben werden, die in den Math. Ann. erscheinen wird. Das Hauptergebnis ist der folgende Satz.

Das Kontinuum ist von der zweiten Mächtigkeit und läßt sich in eine wohlgeordnete Reihe verwandeln, welche durch Zahlen der zweiten Zahlenklasse abgezählt wird.

Hiermit ist die von G. Cantor bereits in seinen ersten Arbeiten ausgesprochene Vermutung bestätigt.

Die neue Methode, deren ich mich bedient habe, besteht aus folgenden Schritten.

1. Die Grundlage der Betrachtung bildet die Aufstellung des Systems der ganzen Zahlen. Die Definition derselben liefert zugleich die sämt-

1) Unter einem entsprechenden Titel hatte ich für den internationalen Mathematiker-Kongreß zu Heidelberg einen Vortrag angekündigt, den ich verhindert war zu halten. Im Nachstehenden kommt der nicht gehaltene Vortrag zum Abdruck.

lichen Operationen, welche mit denselben vergenommen werden können, sowie das Prinzip der Zusammensetzung dieser Operationen. Diese Operationen, welche sich als eindeutige Funktionen einer endlichen Anzahl von ganzzahligen Variabeln darstellen, bilden einen Bereich B_0. In diesen Bereich B_0 gehören z. B. auch die durch willkürliche Zuordnung einer endlichen Anzahl gegebener Größen zu einer endlichen Anzahl ganzzahliger Argumentwerte entstehenden Funktionen, was aus dem Grunde hervorgehoben sei, weil deren Existenz bei der Definition der ganzen Zahlen meist stillschweigend vorausgesetzt wird. Eine besondere Erwähnung verdient ferner das von Frege und Dedekind postulierte Axiom, welches den Schluß von n auf $n+1$ begründet. Von diesem Axiom läßt sich die *Existenz* des Minimums einer Teilmenge T der positiven ganzen Zahlen folgern, ohne daß das Minimum durch eine endliche Anzahl von Rechenoperationen hergestellt ist. Es führt dies zu einer Unterscheidung *existierender* und *berechenbarer* Ausdrücke. Wir beschränken uns zunächst auf die Betrachtung der letzteren.

2. Das gesamte System aller eindeutiger berechenbarer Funktionen ganzzahliger Variablen stellen wir in der folgenden Weise her:

Aus den gegebenen Funktionen des Bereiches B_0 entstehen durch Zusammensetzung neue Funktioneu, welche mit B_0 zusammen den Bereich B_1 bilden. Das allgemeine Prinzip der Zusammensetzung besteht in der Bildung einer Reihe von Ausdrücken

$$A_1, \ A_2, \ \ldots, \ A_k, \ \ldots$$

von welchen jeder aus sämtlichen vorangehenden auf eine zweckmäßige Weise hergestellt wird. Wir können diese Bildung in der Form

$$A_1 = A_1$$
$$A_k = A\,(K, A_1, \ \ldots A_{k-1})$$

schreiben, wo A eine Funktion des *gegebenen Bereichs* bedeutet, welche noch beliebige Parameter enthalten kann.

Das genannte Verfahren liefert ohne weiteres die Reihe der abzählbaren Bereiche

$$B_0, \ B_1, \ \ldots, \ B_n, \ \ldots$$

von denen jeder den vorangehenden enthält. Es wird ein die Gesamtheit dieser Bereiche umfassender Bereich B_ω gebildet und es ist B_ω der auf diese Bereiche unmittelbar folgende. Aus B_ω gewinnt man auf gleiche Weise neue Bereiche $B_{\omega+1}, \ B_{\omega+2}, \ldots$, indem jetzt die neue Variable n in dem Zusammensetzungsverfahren eingeht.

Auf diese Weise können wir fortfahren und wir gelangen so zu Bereichen, deren Indices beliebige Zahlen der zweiten Zahlenklasse sind. Indem wir nachweisen, daß die auf zusammengehörige gesetzmäßige Reihen von Bereichen folgenden Bereiche sämtlich in den Fortsetzungen einer Reihe enthalten sind, gelangen wir zu einer einzigen Reihe

$$B_0,\ B_1,\ \ldots,\ B_\omega,\ \ldots,\ B_\alpha,\ \ldots$$

welche sämtliche Bereiche enthält.

3. Es wird dann gezeigt, daß es keinen Bereich gibt, welcher auf alle Bereiche B_α folgt. Es bildet nämlich die Gesamtheit der Bereiche B_α gegenüber den gegebenen Operationen einen invarianten Bereich. Es liegt das wesentlich darin, daß der Index α der Bereiche, eine transfinite Zahl ist und also nicht in dem Zusammensetzungsverfahren ver-wandt werden kann.

4. Da jeder einzelne Bereich B_α abzählbar ist, so besitzt die Gesamtheit der Elemente aller Bereiche die Mächtigkeit $\aleph_1$ oder $\aleph_0$, und wir erhalten den Satz:

Die Gesamtheit aller durch eine endliche Anzahl von Operationen definierten ganzzahligen eindeutigen Funktionen ganzzahliger Variabler besitzt höchstens die zweite Mächtigkeit.

5. Die reellen Zahlen in Dezimalbruchform sind als eindeutige ganzzahlige Funktionen des Stellenzeigers gegeben. Es ist evident, daß eine solche Zahl oder Funktion nur dann bestimmt ist, wenn ein *Gesetz* gegeben ist, durch welches zu jedem Index der zugehörige Wert bestimmt wird. Der von Dirichlet aufgestellte Begriff einer *willkürlichen* Funktion einer nicht endlichen Zahl von Argumentwerten, scheint mir durch den Umstand, daß es Eigenschaften gibt, welche allen Funktionen einer Klasse, *ohne Rücksicht auf das Bildungsgesetz* zukommen, nicht ausreichend gerechtfertigt.

Es erschien allerdings dieser Begriff, angewandt auf den unendlichen Dezimalbruch, notwendig, solange man glaubte, daß die sämtlichen endlichen Gesetze nur in abzählbarer Anzahl vorhanden sind, sodaß also nur eine abzählbare Teilmenge der Menge der reellen Zahlen gesetzmäßig definiert wäre.

Es wird jedoch gezeigt, daß diese Ansicht ein Irrtum ist, und so scheint mir kein Grund den Begriff der willkürlichen Funktion, der nie ohne Widerspruch geblieben ist, noch länger beizubehalten.

Durch eingehendere Betrachtung der genannten Bereiche oder mit Hilfe des G. Cantorschen Nichtabzählbarkeitsbeweises des Kontinuums läßt sich nämlich erkennen, daß die Gesamtheit der Gesetze die Mächtigkeit $\aleph_1$ genau besitzt, und damit ist der eingangs über das Kontinuum behauptete Satz hergeleitet.

Es scheint mir, daß erst durch diese Herleitung der Begriff des unendlichen Dezimalbruches die begriffliche Bestimmtheit gewinnt, welche gefordert werden muß.