

Werk

Titel: Über Thetafunktionen und Modulfunktionen mehrerer Veränderlicher.

Autor: Blumenthal, Otto

Jahr: 1904

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?37721857X_0013|log26

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Über Thetafunktionen und Modulfunktionen mehrerer Veränderlicher.¹⁾

Von OTTO BLUMENTHAL in Göttingen.

In meiner Habilitationsschrift²⁾ habe ich eine Verallgemeinerung der Modulgruppe und der zugehörigen Modulfunktionen auf das Gebiet von n Veränderlichen gegeben. Man bezeichne mit k einen algebraischen Zahlkörper n ten Grades, welcher mit seinen sämtlichen Konjugierten reell ist, mit $1, \eta_1, \dots, \eta_q$ die von einander unabhängigen „total“ (d. h. mit allen ihren Konjugierten) positiven Einheiten des Körpers, mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier Zahlen von k , deren Determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \eta$$

eine total positive Einheit ist; schließlich seien die konjugierten Körper mit $k, k', \dots, k^{(n-1)}$ und die konjugierten Zahlen dementsprechend bezeichnet. Betrachten wir alsdann in n Variablen $\omega, \omega', \dots, \omega^{(n-1)}$ die simultanen Substitutionen

$$(T) \quad \bar{\omega} = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad \bar{\omega}' = \frac{\alpha'\omega' + \beta'}{\gamma'\omega' + \delta'}, \quad \dots, \quad \bar{\omega}^{(n-1)} = \frac{\alpha^{(n-1)}\omega^{(n-1)} + \beta^{(n-1)}}{\gamma^{(n-1)}\omega^{(n-1)} + \delta^{(n-1)}},$$

so bildet die Gesamtheit aller solcher simultaner Substitutionen eine Gruppe H , die „Modulgruppe in n Veränderlichen“.

Ich habe den Diskontinuitätsbereich (Fundamentalebene) dieser Gruppe aufgestellt und die Existenz zugehöriger invarianter Funktionen, der „Modulfunktionen von n Veränderlichen“ nachgewiesen.

Unter den Untergruppen der Gruppe H ist zu erwähnen die Gruppe H_1 , gebildet aus den sämtlichen Substitutionen, für welche $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ist. Diese Untergruppe hat den endlichen Index $q + 1$. Untergruppen von endlichem Index sind ferner „Kongruenz-Untergruppen“, bei welchen die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gewissen Kongruenz-Bedingungen nach Zahlen oder Idealen von k genügen.

Die Modulfunktionen einer Veränderlichen stehen in enger Beziehung zu den elliptischen Funktionen, sie lassen sich nämlich rational durch Thetanullwerte ausdrücken. In der Tat gestattet die fundamentale Modulfunktion J die Darstellung

$$J = \frac{4(\vartheta_{00}^2(0) - \vartheta_{01}^2(0)\vartheta_{10}^2(0))}{27 \cdot \vartheta_{00}^2(0)\vartheta_{01}^2(0)\vartheta_{10}^2(0)},$$

1) Ausführung eines auf der Kasseler Naturforscher-Versammlung gehaltenen Vortrages.

2) Math. Ann. Bd. 56, S. 509—548.

worin $\vartheta_{00}(u)$, $\vartheta_{10}(u)$, $\vartheta_{01}(u)$, $\vartheta_{11}(u)$ die ϑ -Funktionen mit zweiteiliger Charakteristik in Jacobischer Bezeichnung sind.¹⁾ Ebenso sind die zu gewissen Kongruenzuntergruppen der Modulgruppe gehörigen Funktionen durch Thetanullwerte darstellbar. So haben wir für den Jacobischen Modul²⁾

$$\kappa^2 = \frac{\vartheta_{10}^4(0)}{\vartheta_{00}^4(0)},$$

und κ^2 gehört zu der Untergruppe der Modulgruppe, welche durch die Kongruenzen

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1, \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \quad (2)$$

bestimmt ist.

Es ist nun von besonderem Interesse, daß für die Modulfunktionen mehrerer Veränderlicher ein ganz analoger Zusammenhang mit den Abelschen Funktionen besteht. Ich stelle in dieser Arbeit *rationale Funktionen von Nullwerten der Thetafunktionen von n Veränderlichen* auf, welche bei den Substitutionen der Gruppe H resp. einer ihrer Untergruppen von endlichem Index *ungeändert bleiben*.

Das Konstruktionsverfahren beruht auf zahlentheoretischer Grundlage und ist zuerst in den Jahren 1893—1894 von Herrn Hilbert angegeben aber nicht publiziert worden. Die folgende Darstellung ist eine Ausführung der Hilbertschen Idee.

Eine Verallgemeinerung der Modulgruppe auf zwei Veränderliche und eine Auswertung der zugehörigen Funktionen durch Thetanullwerte ist auch von Herrn Picard angegeben und von Herrn Bourget³⁾ genauer ausgeführt worden. Doch geht diese Verallgemeinerung nach anderer Richtung als die hier gegebene.⁴⁾

1. Die Methode, welche zur Darstellung von Modulfunktionen mehrerer Veränderlicher durch Thetanullwerte führt, ist der Theorie der Transformation der ϑ -Funktionen entnommen. Wir betrachten zunächst die Gruppe H_1 und werden an erster Stelle *einen Quotienten von Thetanullwerten aufstellen, welcher bei den Substitutionen einer Kongruenzuntergruppe C_1 von H_1 ungeändert bleibt*. Daraus werden sich hinterher in leichter Weise Funktionen konstruieren lassen, welche den allgemeinen Gruppen H_1 und H zugehören.

1) Klein-Fricke, Modulfunktionen I, S. 15. Weber, Elliptische Funktionen, S. 124.

2) Weber, l. c., S. 110.

3) Picard, Fonctions hyperabéliennes, Liouville IV, 1, (1885). Bourget, Annales de Toulouse 12 (1898).

4) Eine genaue Vergleichung beider Methoden siehe S. 124.

2. Wir stützen uns auf folgenden zahlentheoretischen Satz¹⁾: Sei

$$(1) \quad a_1, a_2, \dots, a_n$$

eine Basis des Körpers k , die Determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_n \\ a'_1 & a'_2 & a'_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{(n-1)} & a_2^{(n-1)} & a_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

deren Quadrat die Diskriminante d des Körpers ist, ist von Null verschieden, ihre Unterdeterminante nach $a_i^{(k)}$ sei durch $A_i^{(k)}$ bezeichnet.

• *Alsdann läßt sich auf unendlich viele Weisen eine Zahl ξ des Körpers k finden, sodaß*

$$(2) \quad \xi \frac{A_1}{A} = b_1, \quad \xi \frac{A_2}{A} = b_2, \quad \dots, \quad \xi \frac{A_n}{A} = b_n$$

die Basis eines Ideals $\mathfrak{b}$ von k ergibt. Beispielsweise kann ich für ξ die Diskriminante d wählen.²⁾

3. Ich bezeichne jetzt mit $\omega_1, \omega_2; \omega'_1, \omega'_2; \dots; \omega_1^{(n-1)}, \omega_2^{(n-1)}$ n Paare unabhängiger Variabler und betrachte eine Abelsche Funktion der n Variablen $u, u', \dots, u^{(n-1)}$, welche die folgenden Periodensysteme besitzt:

$$(3) \quad \begin{array}{ccccccc} a_1 & \omega_1 & , a_2 & \omega_1 & , \dots, a_n & \omega_1 & ; b_1 & \omega_2 & , b_2 & \omega_2 & , \dots, b_n & \omega_2 \\ \vdots & & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^{(n-1)} & \omega_1^{(n-1)} & , a_2^{(n-1)} & \omega_1^{(n-1)} & , \dots, a_n^{(n-1)} & \omega_1^{(n-1)} & ; b_1^{(n-1)} & \omega_2^{(n-1)} & , b_2^{(n-1)} & \omega_2^{(n-1)} & , \dots, b_n^{(n-1)} & \omega_2^{(n-1)} \end{array}$$

Das allgemeine Periodensystem dieser Funktion ist also, wenn m, n ganze rationale Zahlen bedeuten,

$$\begin{aligned} \{m_1 a_1 + \dots + m_n a_n\} \omega_1 &+ \{n_1 b_1 + \dots + n_n b_n\} \omega_2 \\ &= \kappa \omega_1 + \lambda \omega_2 \\ &\vdots \\ \{m_1 a_1^{(n-1)} + \dots + m_n a_n^{(n-1)}\} \omega_1^{(n-1)} &+ \{n_1 b_1^{(n-1)} + \dots + n_n b_n^{(n-1)}\} \omega_2^{(n-1)} \\ &= \kappa^{(n-1)} \omega_1^{(n-1)} + \lambda^{(n-1)} \omega_2^{(n-1)}, \end{aligned}$$

wo κ eine beliebige Zahl von k , λ eine beliebige Zahl des Ideals $\mathfrak{b}$ ist.

1) Landsberg, Math. Ann. 50, S. 577—582, Göttinger Nachr., 1897, S. 277 ff., bes. S. 296.

2) Besonders einfach ist der Fall des quadratischen Körpers: hier ist das Ideal $\mathfrak{b}$ wieder der Körper selbst, was im folgenden wesentliche Vereinfachungen ergibt. Diese Vereinfachung tritt allgemein immer dann ein, wenn die „Differente“ des Körpers ein Hauptideal ist.

Es ist zu beweisen, daß eine *derartige Abelsche Funktion existiert*. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für Existenz einer Abelschen Funktion mit vorgegebenem Periodensystem lassen sich am einfachsten folgendermaßen angeben.¹⁾ Man führe neue Variable $v_1, v_2, \dots, v_n$ ein, für welche das Periodensystem die *kanonische Form* annimmt:

$$(4) \quad \begin{array}{ccccccc} i\pi, & 0, & \dots, & 0; & \varphi_{11}, & \varphi_{12}, & \dots, \varphi_{1n}, \\ & 0, & i\pi, & \dots, & 0; & \varphi_{21}, & \varphi_{22}, \dots, \varphi_{2n}, \\ & & & \vdots & & & \vdots \\ 0, & 0, & \dots, & i\pi; & \varphi_{n1}, & \varphi_{n2}, & \dots, \varphi_{nn}. \end{array}$$

Alsdann muß, damit eine Abelsche Funktion existiert,

$$(a) \quad \varphi_{ik} = \varphi_{ki},$$

(b) wenn $\varphi_{ik} = \psi_{ik} + i\chi_{ik}(\psi, \chi \text{ reell})$ gesetzt wird, die quadratische Form

$$\sum \psi_{ik} m_i m_k$$

definit negativ sein.

Nun ergibt sich in unserem Falle:

$$v_k = \frac{\pi i}{A} \left\{ \frac{A_k}{\omega_1} u + \frac{A'_k}{\omega'_1} u' + \dots + \frac{A_k^{(n-1)}}{\omega_1^{(n-1)}} u^{(n-1)} \right\}$$

und

$$(5) \quad \varphi_{ki} = \frac{\pi i}{A} \{ A_k b_i \omega + A'_k b'_i \omega' + \dots + A_k^{(n-1)} b_i^{(n-1)} \omega^{(n-1)} \},$$

wo $\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ gesetzt ist. Hieraus folgt wegen der Bedeutung der b_i sofort

$$\varphi_{ki} = \varphi_{ik}.$$

Die Bedingung (b) beschränkt nur die Variabilität der ω . Es ist nämlich, wenn $\omega = \sigma + i\tau$ gesetzt wird,

$$\psi_{ik} = -\pi \left\{ \frac{A_k}{A} b_i \tau + \dots + \frac{A_k^{(n-1)}}{A} b_i^{(n-1)} \tau^{(n-1)} \right\},$$

und daher, indem ich noch für b_i seinen Wert $\xi \frac{A_i}{A}$ einsetze,

$$\begin{aligned} \sum \psi_{ik} m_i m_k &= -\pi \left\{ \frac{\tau}{\xi} \sum b_i b_k m_i m_k + \dots + \frac{\tau^{(n-1)}}{\xi^{(n-1)}} \sum b_i^{(n-1)} b_k^{(n-1)} m_i m_k \right\} \\ &= -\pi \left\{ \frac{\tau}{\xi} \left(\sum b_i m_i \right)^2 + \dots + \frac{\tau^{(n-1)}}{\xi^{(n-1)}} \left(\sum b_i^{(n-1)} m_i \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Die quadratische Form ist also definit negativ, wenn die sämtlichen Größen $\frac{\tau}{\xi}, \frac{\tau'}{\xi'}, \dots, \frac{\tau^{(n-1)}}{\xi^{(n-1)}}$ positiv sind.

1) Kräzer, Lehrbuch der Thetafunktionen, S. 125.

Das System (3) ist Periodensystem einer Abelschen Funktion, wenn die variablen Größen $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \omega, \dots, \frac{\omega_2^{(n-1)}}{\omega_1^{(n-1)}} = \omega^{(n-1)}$ auf diejenige Halbebene beschränkt werden, in welcher $\frac{\tau}{\xi}, \dots, \frac{\tau^{(n-1)}}{\xi^{(n-1)}}$ positiv ist.

Deuten wir $\omega, \dots, \omega^{(n-1)}$ im $(2n)$ -dimensionalen Raume, so ist hierdurch der Punkt $((\omega))$ auf einen bestimmten $\frac{1}{2^n}$ -Teilraum T beschränkt.

4. Wir vergleichen mit dem Periodensystem (3) ein transformiertes Periodensystem, welches dadurch erhalten wird, daß wir in (3) ω_1 und ω_2 bezw. durch

$$(3') \quad \begin{aligned} \bar{\omega}_1 &= \delta \omega_1 + \gamma \omega_2; & \bar{\omega}_2 &= \beta \omega_1 + \alpha \omega_2, \\ \vdots & & \vdots & \\ \bar{\omega}_1^{(n-1)} &= \delta^{(n-1)} \omega_1^{(n-1)} + \gamma^{(n-1)} \omega_2^{(n-1)}; & \bar{\omega}_2^{(n-1)} &= \beta^{(n-1)} \omega_1^{(n-1)} + \alpha^{(n-1)} \omega_2^{(n-1)} \end{aligned}$$

ersetzen, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen aus k mit Determinante η sind. Setzen wir das neue Periodensystem in kanonische Form und bezeichnen alsdann die neuen Variablen mit $\bar{v}_k$, die Perioden zweiter Art mit $\bar{\varphi}_{ki}$, so ist

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{\pi i}{A} \left\{ \frac{A_k}{\delta \omega_1 + \gamma \omega_2} u + \dots + \frac{A_k^{(n-1)}}{\delta^{(n-1)} \omega_1^{(n-1)} + \gamma^{(n-1)} \omega_2^{(n-1)}} u^{(n-1)} \right\}, \\ \bar{\varphi}_{ki} &= \frac{\pi i}{A} \left\{ A_k b_i \frac{\alpha \omega + \beta}{\gamma \omega + \delta} + \dots + A_k^{(n-1)} b_i^{(n-1)} \frac{\alpha^{(n-1)} \omega^{(n-1)} + \beta^{(n-1)}}{\gamma^{(n-1)} \omega^{(n-1)} + \delta^{(n-1)}} \right\}, \\ \bar{\tau} &= \frac{\eta}{(\gamma \sigma + \delta)^2 + \gamma^2 \tau^2}, \quad \dots, \quad \bar{\tau}^{(n-1)} = \frac{\eta^{(n-1)}}{(\gamma^{(n-1)} \sigma^{(n-1)} + \delta^{(n-1)})^2 + \gamma^{(n-1)2} \tau^{(n-1)2}} \end{aligned}$$

Das System (3') ist also, da η eine total positive Einheit ist, gleichfalls Periodensystem einer Abelschen Funktion, wenn $((\omega))$ auf den Teilraum T beschränkt wird.

5. Zu den Periodensystemen (3) und (3') gehören Thetafunktionen $\vartheta((v; \varphi_{ik}))$ und $\vartheta((\bar{v}; \bar{\varphi}_{ik}))$.¹⁾ Wir betrachten insbesondere die Thetafunktionen mit zweiteiliger Charakteristik und schreiben diese

1) Ich gehe an dieser Stelle auf den Unterschied zwischen den oben zitierten Picardschen Entwicklungen und den hier dargelegten ein. Wir befinden uns dabei in dem Falle zweier Veränderlicher. Die Picardschen ϑ -Funktionen ebenso wie die unsrigen ordnen sich als spezielle Fälle den von Herrn Humbert allgemein eingeführten *singulären* ϑ -Funktionen unter, zwischen deren Perioden 2. Art eine Relation der Form

$$A \varphi_{11} \pi i + B \varphi_{12} \pi i + C \varphi_{22} \pi i + D(\varphi_{12}^2 - \varphi_{11} \varphi_{22}) + E \pi^2 = 0$$

$$\vartheta \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \\ \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n \end{matrix} \right\} ((v, \varphi_{ik})) = \vartheta[\varepsilon]((v, \varphi_{ik})),$$

wo $\varepsilon, \varepsilon'$ die Werte 0 und 1 haben können.¹⁾

Zum Zwecke der Aufstellung der gesuchten invarianten Funktionen suchen wir solche Transformationen (3'), für welche die beiden Systeme von Thetafunktionen übereinstimmen, d. h. für welche

$$(6) \quad \vartheta[\varepsilon]((\bar{v}, \bar{\varphi}_{ik})) = C e^{f_2(v)} \vartheta[\varrho]((v, \varphi_{ik})),$$

wo C eine Konstante, $f_2(v)$ eine quadratische Form in den (v) ist (Transformation der ϑ -Funktionen).²⁾

Hierzu ist zunächst notwendig, daß die Periodensysteme (3) und (3') übereinstimmen.³⁾ Nun lautet die allgemeine Periode des Systems (3')

$$\bar{\kappa} \bar{\omega}_1 + \bar{\lambda} \bar{\omega}_2 = (\bar{\kappa} \delta + \bar{\lambda} \beta) \omega_1 + (\bar{\kappa} \gamma + \bar{\lambda} \alpha) \omega_2,$$

wo $\bar{\kappa}, \bar{\lambda}$ ebenso definiert sind wie früher κ, λ . Es muß also $\bar{\kappa} \gamma + \bar{\lambda} \alpha$ eine Zahl des Ideals $\mathfrak{b}$ sein, daher

$$(7) \quad \gamma \equiv 0(\mathfrak{b}).$$

Die Gesamtheit der Substitutionen (T), für welche $\gamma \equiv 0(\mathfrak{b})$, bilden eine Kongruenzuntergruppe von H . Der Index der Untergruppe ist daher endlich.

Sonach läßt sich setzen

$$(8) \quad \begin{aligned} \alpha b_h &= p_{h1} b_1 + \dots + p_{hn} b_n; & \beta b_h &= q_{h1} a_1 + \dots + q_{hn} a_n, \\ \gamma a_h &= r_{h1} b_1 + \dots + r_{hn} b_n; & \delta a_h &= s_{h1} a_1 + \dots + s_{hn} a_n, \end{aligned}$$

wo p, q, r, s ganze rationale Zahlen sind, und die primitiven Perioden des Systems (3') setzen sich in folgender Weise aus den primitiven Perioden (3) zusammen:

$$(9) \quad \begin{aligned} a_h \bar{\omega}_1 &= (s_{h1} a_1 + \dots + s_{hn} a_n) \omega_1 + (r_{h1} b_1 + \dots + r_{hn} b_n) \omega_2, \\ b_h \bar{\omega}_2 &= (q_{h1} a_1 + \dots + q_{hn} a_n) \omega_1 + (p_{h1} b_1 + \dots + p_{hn} b_n) \omega_2. \end{aligned}$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten A, B, C, D, E besteht (Humbert, Liouville, V, 6 (1900)). Picard betrachtet Perioden, für welche

$$\begin{aligned} (\varphi_{12}^2 - \varphi_{11} \varphi_{22}) + \pi^2 E &= 0 \\ (E \text{ positiv ganz, nicht quadratisch}), \end{aligned}$$

während in unserem Falle sich ergibt

$$\begin{aligned} A \varphi_{11} + B \varphi_{12} + C \varphi_{22} &= 0, \\ \varphi_{12}^2 - \varphi_{11} \varphi_{22} &= \pi^2 \xi \xi' \omega \omega'. \end{aligned}$$

Unser Fall ordnet sich daher dem Humbertschen unter, hat aber mit dem Picardschen keine Unterfälle gemein.

1) Krazer, S. 240—241.

2) l. c. S. 166.

3) Ich schreibe in der Folge immer nur die erste Zeile des Periodensystems.

Zum Bestehen der Relationen (6) ist dann fernerhin notwendig, daß zwischen den p, q, r, s die folgenden bilinearen Relationen bestehen¹⁾:

$$(10) \quad \begin{aligned} \sum_h (s_{hl} q_{hl'} - q_{hl} s_{hl'}) &= 0 \\ \sum_h (r_{hl} p_{hl'} - p_{hl} r_{hl'}) &= 0 \\ \sum_h (s_{hl} p_{hl'} - q_{hl} r_{hl'}) &= \begin{cases} 0, & \text{wenn } l \text{ von } l' \text{ verschieden,} \\ 1, & \text{wenn } l = l' \text{ ist.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ich werde nun den Satz beweisen: *Die Transformation (3') erfüllt die Bedingung (10) und führt daher zu einer Transformation der Theta-funktionen, wenn*

$$(7) \quad \gamma \equiv 0(6)$$

und außerdem

$$(7') \quad \alpha \delta - \beta \gamma = 1.$$

Die Gesamtheit dieser Transformationen bildet in bezug auf die Gruppe H_1 eine Kongruenzuntergruppe C'_1 von endlichem Index.

6. Die Zahlen p, q, r, s drücken sich in folgender Weise durch die Größen $a, b; \alpha, \beta, \gamma, \delta$ aus (man erhält diese Ausdrücke, indem man die Gleichungen (8) nebst den konjugierten nach den p, q, r, s auflöst und für die b die Werte (2) einsetzt):

$$(11) \quad \begin{aligned} p_{hl} &= \frac{\alpha}{\xi} b_h a_l + \frac{\alpha'}{\xi'} b'_h a'_l + \cdots + \frac{\alpha^{(n-1)}}{\xi^{(n-1)}} b_h^{(n-1)} a_l^{(n-1)} \\ &= \frac{1}{A} \{ \alpha A_h a_l + \alpha' A'_h a'_l + \cdots + \alpha^{(n-1)} A_h^{(n-1)} a_l^{(n-1)} \}, \\ q_{hl} &= \frac{1}{A} \{ \beta b_h A_l + \beta' b'_h A'_l + \cdots + \beta^{(n-1)} b_h^{(n-1)} A_l^{(n-1)} \} \\ &= \beta \xi b_h b_l + \beta' \xi' b'_h b'_l + \cdots + \beta^{(n-1)} \xi^{(n-1)} b_h^{(n-1)} b_l^{(n-1)}, \\ r_{hl} &= \frac{\gamma}{\xi} a_h a_l + \frac{\gamma'}{\xi'} a'_h a'_l + \cdots + \frac{\gamma^{(n-1)}}{\xi^{(n-1)}} a_h^{(n-1)} a_l^{(n-1)}, \\ s_{hl} &= \frac{1}{A} \{ \delta a_h A_l + \delta' a'_h A'_l + \cdots + \delta^{(n-1)} a_h^{(n-1)} A_l^{(n-1)} \}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$(11a) \quad q_{hl} = q_{lh}, \quad r_{hl} = r_{lh}$$

und

$$(11b) \quad \alpha a_h = p_{1h} a_1 + \cdots + p_{1n} a_n, \quad \delta b_h = s_{1h} b_1 + \cdots + s_{nh} b_n.$$

Da ferner nach (3')

$$\omega_1 = \alpha \bar{\omega}_1 - \gamma \bar{\omega}_2, \quad \omega_2 = -\beta \bar{\omega}_1 + \delta \bar{\omega}_2,$$

1) Krazer, S. 131.

so drücken sich die primitiven Perioden (3) durch die primitiven Perioden (3') folgendermaßen aus:

$$(12) \quad \begin{aligned} a_h \omega_1 &= (p_{1h} a_1 + \dots + p_{nh} a_n) \bar{\omega}_1 - (r_{1h} b_1 + \dots + r_{nh} b_n) \bar{\omega}_2, \\ b_h \omega_2 &= - (q_{1h} a_1 + \dots + q_{nh} a_n) \bar{\omega}_1 + (s_{1h} b_1 + \dots + s_{nh} b_n) \bar{\omega}_2. \end{aligned}$$

Wir erhalten jetzt die gewünschte Verifikation der Gleichungen (10), indem wir den Ausdruck der primitiven Perioden (3) durch die primitiven Perioden (3') in anderer Weise, nämlich durch Umkehrung der Gleichungen (9) ableiten und die beiden Resultate vergleichen.

Wir betrachten dazu die Determinante

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} & r_{11} & \dots & r_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} & r_{n1} & \dots & r_{nn} \\ q_{11} & \dots & q_{1n} & p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & \dots & q_{nn} & p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{vmatrix}$$

und bemerken zuerst, daß sie den Wert + 1 besitzt. Für die Größe $A^n \mathcal{A}$ erhalten wir nämlich den Ausdruck

$$\begin{aligned} A^n \mathcal{A} &= \frac{1}{\xi \dots \xi^{(n-1)}} \begin{vmatrix} a_1 & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{(n-1)} & \dots & a_n^{(n-1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_1 & \dots & b_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_1^{(n-1)} & \dots & b_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} & r_{11} & \dots & r_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} & r_{n1} & \dots & r_{nn} \\ q_{11} & \dots & q_{1n} & p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & \dots & q_{nn} & p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\xi \dots \xi^{(n-1)}} \begin{vmatrix} \delta & \cdot & a_1 & \dots & \delta & \cdot & a_n & \beta & \cdot & b_1 & \dots & \beta & \cdot & b_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \delta^{(n-1)} & \cdot & a_1^{(n-1)} & \dots & \delta^{(n-1)} & \cdot & a_n^{(n-1)} & \beta^{(n-1)} & \cdot & b_1^{(n-1)} & \dots & \beta^{(n-1)} & \cdot & b_n^{(n-1)} \\ \gamma & \cdot & a_1 & \dots & \gamma & \cdot & a_n & \alpha & \cdot & b_1 & \dots & \alpha & \cdot & b_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \gamma^{(n-1)} & \cdot & a_1^{(n-1)} & \dots & \gamma^{(n-1)} & \cdot & a_n^{(n-1)} & \alpha^{(n-1)} & \cdot & b_1^{(n-1)} & \dots & \alpha^{(n-1)} & \cdot & b_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Indem wir die mit $\beta^{(h-1)}$ multiplizierte $(n+h)$ te Reihe von der mit $\alpha^{(h-1)}$ multiplizierten h ten abziehen, erhalten wir den Wert

$$A^n \mathcal{A} = A^n, \quad \mathcal{A} = 1 \quad \text{q. e. d.}$$

Bezeichnen wir die Unterdeterminanten von $\mathcal{A}$ mit S_{hi} , R_{hi} , Q_{hi} , P_{hi} , so finden wir also als Umkehrung der Gleichungen (9)

$$(9') \quad \begin{aligned} a_h \omega_1 &= (S_{1h} a_1 + \dots + S_{nh} a_n) \bar{\omega}_1 + (Q_{1h} b_1 + \dots + Q_{nh} b_n) \bar{\omega}_2, \\ b_h \omega_2 &= (R_{1h} a_1 + \dots + R_{nh} a_n) \bar{\omega}_1 + (P_{1h} b_1 + \dots + P_{nh} b_n) \bar{\omega}_2. \end{aligned}$$

Hieraus aber folgt durch Vergleich mit (12):

$$(13) \quad p_{hl} = S_{hl}, \quad r_{hl} = -Q_{hl}, \quad q_{hl} = -R_{hl}, \quad s_{hl} = P_{hl},$$

und wenn ich diese Gleichheiten in die fundamentalen Beziehungen zwischen den Elementen und den Unterdeterminanten von $\mathcal{A}$ einsetze, erhalte ich genau die Gleichungen (10). Der Satz von 5. ist also bewiesen.

7. Infolgedessen bestehen zwischen den ϑ -Funktionen mit den ursprünglichen und den transformierten Perioden Beziehungen, die wir sofort in folgender Form schreiben:

$$(6') \quad \vartheta^8[\varepsilon](\langle \bar{v}, \bar{\varphi}_{ik} \rangle) = \Gamma e^{8f_2(\langle v \rangle)} \vartheta^8[\varrho](\langle v, \varphi_{ik} \rangle)$$

und zwar ist¹⁾:

$$\varrho_\mu \equiv \sum_1^n (s_{\mu\nu} \varepsilon_\nu - r_{\mu\nu} \varepsilon'_\nu + s_{\mu\nu} r_{\mu\nu}) \quad (2)$$

$$(14) \quad \varrho'_\mu \equiv \sum_1^n (-q_{\mu\nu} \varepsilon_\nu + p_{\mu\nu} \varepsilon'_\nu + q_{\mu\nu} p_{\mu\nu}) \quad (2)$$

$$\Gamma = \frac{\Gamma'}{\mathcal{A}_A^4},$$

wo Γ' eine nur von der Transformation $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ abhängige, von (ω) und der Charakteristik $[\varepsilon]$ unabhängige Konstante ist, während sich für $\mathcal{A}_A$ leicht der Wert ergibt²⁾

$$(14') \quad \mathcal{A}_A = (\gamma\omega + \delta) \dots (\gamma^{(n-1)}\omega^{(n-1)} + \delta^{(n-1)}).$$

Setze ich insbesondere $u = \dots = u^{(n-1)} = 0$ und bezeichne die ϑ -Nullwerte kurz durch $\vartheta[\varepsilon](\langle \varphi_{ik} \rangle)$, so folgt für die Transformation der ϑ -Nullwerte die Formel:

$$(15) \quad \vartheta^8[\varepsilon](\langle \bar{\varphi}_{ik} \rangle) = \frac{\Gamma'}{(\gamma\omega + \delta)^4 \dots (\gamma^{(n-1)}\omega^{(n-1)} + \delta^{(n-1)})^4} \vartheta^8[\varrho](\langle \varphi_{ik} \rangle),$$

wo Γ' eine von der Charakteristik $[\varepsilon]$ unabhängige Konstante ist.³⁾

8. Hier müssen einige kurze Bemerkungen über die Thetanullwerte eingeschaltet werden. Eine Charakteristik heißt *gerade*, wenn

1) Krazer, S. 166, 181, 247.

2) mit Hilfe von Krazer, S. 129, Formel (8).

3) Bei dieser Bestimmung der Konstanten Γ' ist vorausgesetzt, daß die Determinante $|r_{ik}|$ von Null verschieden ist. Aus Gl. (8) folgt, daß dies immer der Fall ist, wenn $\gamma \neq 0$. Ist aber $\gamma = 0$, so verschwinden die sämtlichen r_{ik} . Man überzeugt sich ohne Schwierigkeit, daß auch in diesem Falle die Formel (15) besteht. Wir werden uns übrigens im folgenden überall auf Substitutionen mit $\gamma \neq 0$ („nicht-affine Substitutionen“) beschränken können.

$\sum \varepsilon \varepsilon' \equiv 0(2)$ ist, im anderen Falle ungerade. ϑ -Funktionen mit ungerader Charakteristik sind ungerade Funktionen, die Thetanullwerte daher identisch Null. (Krazer, S. 241).

Betrachten wir die Nullwerte der ϑ -Funktionen mit gerader Charakteristik. Sie sind gegeben durch den Ausdruck (Krazer, S. 239):

$$\vartheta[\varepsilon]((\varphi_{ik})) = \sum_{m_1, \dots, m_n}^{-\infty, \dots, +\infty} e^{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \varphi_{ik} \left(m_i + \frac{\varepsilon_i}{2}\right) \left(m_k + \frac{\varepsilon_k}{2}\right) + \pi i \sum_{k=1}^n m_k \varepsilon'_k}.$$

Setzen wir für φ_{ik} den Wert (5) ein, so erhält der Exponent die Form

$$\pi i \sum_{k=1}^n m_k \varepsilon'_k + \frac{\pi i}{4} \left\{ \omega \left(\sum_{k=1}^n A_k \left(m_k + \frac{\varepsilon_k}{2}\right) \right)^2 + \dots + \zeta^{(n-1)} \omega^{(n-1)} \left(\sum_{k=1}^n A_k^{(n-1)} \left(m_k + \frac{\varepsilon_k}{2}\right) \right)^2 \right\}.$$

Mit Hilfe dieser Form des Exponenten leitet man leicht die beiden folgenden Resultate ab:

Kein Thetanullwert mit gerader Charakteristik verschwindet identisch.

Der Quotient zweier Thetanullwerte von verschiedener gerader Charakteristik reduziert sich nie auf eine Konstante.

Außerdem ist bekannt, daß eine Transformation der ϑ -Funktionen gerade Charakteristiken stets in gerade überführt. (Krazer, S. 247.)

9. Um die Abhängigkeit der ϑ von den Variablen (ω) scharf zu betonen, führen wir die neue Bezeichnung ein:

$$(16) \quad \vartheta^s[\varepsilon]((\varphi_{ik})) = \Theta[\varepsilon]((\omega)),$$

alsdann ist

$$\vartheta^s[\varepsilon]((\bar{\varphi}_{ik})) = \Theta[\varepsilon]((\bar{\omega})).$$

Aus der Gleichung (15) folgern wir sonach, da die Anzahl der zweiteiligen Charakteristiken endlich ist, die endliche Kette von Beziehungen:

$$(17) \quad \begin{aligned} \Theta[\varepsilon]((\bar{\omega})) &= \frac{\Gamma'}{(\gamma\omega + \delta)^4 \dots (\gamma^{(n-1)}\omega^{(n-1)} + \delta^{(n-1)})^4} \Theta[\varrho]((\omega)), \\ \Theta[\varrho]((\bar{\omega})) &= \frac{\Gamma'}{(\gamma\omega + \delta)^4 \dots (\gamma^{(n-1)}\omega^{(n-1)} + \delta^{(n-1)})^4} \Theta[\sigma]((\omega)), \\ &\vdots \\ \Theta[\tau]((\bar{\omega})) &= \frac{\Gamma'}{(\gamma\omega + \delta)^4 \dots (\gamma^{(n-1)}\omega^{(n-1)} + \delta^{(n-1)})^4} \Theta[\varepsilon]((\omega)). \end{aligned}$$

Nunmehr ist es leicht eine Funktion zu bilden, welche sich bei der Substitution (T) multiplikativ verhält. Bilden wir nämlich eine sym-

metrische Funktion p ten Grades $S\{\Theta[\varepsilon], \dots, \Theta[\tau]\} = S[\varepsilon, \varrho, \dots, \tau](\omega)$, so genügt sie der Beziehung:

$$(18) \quad \frac{S[\varepsilon, \varrho, \dots, \tau](\bar{\omega})}{\frac{\Gamma'^p}{(\gamma\omega + \delta)^{4p} \dots (\gamma^{(n-1)}\omega^{(n-1)} + \delta^{(n-1)})^{4p}}} S[\varepsilon, \varrho, \dots, \tau](\omega) =$$

Die Funktion S verhält sich bei Ausübung der Substitution (T) multiplikativ. Sie ist außerdem bei ganzem positivem p eine ganze Funktion der (ω) .

Es bleibt nun noch zu zeigen, daß diese Funktionen S sich nicht sämtlich auf die Konstante 0 reduzieren. Dies ergibt sich leicht in folgender Weise: Wir gehen aus von einer nicht identisch verschwindenden Funktion $\Theta[\varepsilon](\omega)$, alsdann verschwinden nach (17) auch die Funktionen $\Theta[\varepsilon], \dots, \Theta[\tau]$ nicht identisch, und das Produkt $\Theta[\varepsilon] \cdot \Theta[\varrho] \dots \Theta[\tau]$ ist eine nicht verschwindende Funktion S . Dazu habe ich die Charakteristik $[\varepsilon]$ nur als gerade Charakteristik zu wählen.

10. Der Quotient $Q(\omega)$ zweier Funktionen S von gleichem Grade bleibt invariant bei Ausübung der Substitution (T) .

Man überzeugt sich auch in einfacher Weise davon, daß sich diese Quotienten nicht sämtlich auf Konstante reduzieren können: man zeigt in der Tat, daß alsdann sich die sämtlichen Funktionen $\Theta[\varepsilon], \dots, \Theta[\tau]$ von einer unter ihnen nur um einen konstanten Faktor unterscheiden können, was nach 8. nicht der Fall ist.¹⁾ Wir können aus Θ -Funktionen (von Konstanten verschiedene) Funktionen konstruieren, welche sich unserer Substitution gegenüber invariant verhalten.

11. Wir betrachten jetzt die Gesamtheit aller Substitutionen (T) , welche einen Quotienten $Q(\omega)$ ungeändert lassen. Diese Gesamtheit bildet eine Gruppe C_1 und zwar eine Untergruppe von endlichem Index der Gruppe C_1' . In der Tat ist ein solcher Quotient invariant gegenüber allen Substitutionen, welche aus der Charakteristik $[\varepsilon]$ die nämliche Kette von Charakteristiken $[\varrho], [\sigma], \dots, [\tau]$ erzeugen. Nennen wir nun zwei Substitutionen $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ und $T_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}$ zueinander kongruent mod 2, wenn

$$\alpha \equiv \alpha_1, \quad \beta \equiv \beta_1, \quad \gamma \equiv \gamma_1, \quad \delta \equiv \delta_1 \quad (2),$$

so folgt aus den Gleichungen (14), welche die Transformation der Charakteristik bestimmen, daß T und T_1 jede Charakteristik $[\varepsilon]$ in die

1) Wenn die Substitution T sämtliche Θ -Funktionen in sich selbst transformiert, ist diese Methode zur Konstruktion der $Q(\omega)$ unanwendbar. Dann aber ist jeder Quotient zweier Θ mit gerader Charakteristik nach 8. eine Funktion Q , die sich nicht auf eine Konstante reduziert.

gleiche Charakteristik $[\rho]$ überführen. Die Gruppe C_1 enthält also alle mod 2 zu T kongruenten Substitutionen T_1 : diese aber bilden eine Kongruenzuntergruppe von C'_1 von endlichem Index. Daher hat auch die Gruppe C_1 in bezug auf C'_1 einen endlichen Index. Nehmen wir hinzu, daß C'_1 eine Untergruppe von endlichem Index der Gruppe H_1 und also auch der Gesamtgruppe H ist, so können wir den folgenden abschließenden Satz aussprechen:

Wir haben in den Quotienten $Q((\omega))$ Funktionen konstruiert, welche invariant sind gegenüber allen Substitutionen einer Untergruppe C_1 von endlichem Index.

12. Wir können hieraus sofort weiterhin Funktionen bilden, welche der Gesamtgruppe H gegenüber invariant sind. Sei nämlich ν der Index von C in bezug auf H und sei die Zerlegung von H nach C gegeben durch das Cauchysche Schema der Nebengruppen¹⁾

$$C, T_1 C, \dots, T_{\nu-1} C.$$

Üben wir auf den Quotienten $Q((\omega))$ die Substitutionen $T_1, \dots, T_{\nu-1}$ aus, so geht er über in Funktionen $Q_1((\omega)), \dots, Q_{\nu-1}((\omega))$, welche wieder Quotienten von ϑ -Nullwerten sind, aber mit linear gebrochen substituierten Perioden. Eine symmetrische Funktion $\sum((\omega))$ der Funktionen $Q((\omega)), Q_1((\omega)), \dots, Q_{\nu-1}((\omega))$ bleibt alsdann bei allen Substitutionen der Gruppe H ungeändert: $\sum((\omega))$ ist eine invariante Funktion der Gruppe H .

Da sich außerdem nicht alle solche symmetrischen Funktionen auf Konstante reduzieren können, so folgt das angekündigte Resultat:

Es gibt rationale Verbindungen $\sum((\omega))$ von Thetanullwerten, welche der Modulgruppe in n Variablen gegenüber invariant sind.

In gleicher Weise lassen sich natürlich auch zu allen Untergruppen von H invariante Funktionen konstruieren, wenn nur die Untergruppe ihrerseits die Gruppe C_1 enthält: insbesondere also ist dies möglich für die Gruppen H_1 und C'_1 .

13. Zum Schluß soll auf eine notwendige Erweiterung des Problems hingewiesen werden. Es läßt sich nämlich, analog wie im Falle einer Variablen, eine besonders einfache Klasse von Funktionen der Gruppe H definieren, welche als „rationale Funktionen der Gruppe“ bezeichnet werden. Sie sind ausgezeichnet durch die Eigenschaft, daß durch n beliebige, von einander unabhängige unter ihnen sich alle übrigen algebraisch ausdrücken lassen.²⁾ Es fragt sich also zunächst: Sind die

1) Siehe z. B. Picard, Traité d'Analyse III, S. 449.

2) Blumenthal, Modulfunktionen mehrerer Veränderlicher, Math. Ann., Bd. 58.