Werk

Titel: Über Verallgemeinerungen von Sätzen über die Kugel und das ein- resp. umbeschrieb...

Autor: Meyer, W. Franz

Jahr: 1903

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?37721857X_0012|log48

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Über Verallgemeinerungen von Sätzen über die Kugel und das ein- resp. umbeschriebene Tetraeder.

Von W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr.

Im folgenden wird gezeigt, wie einige merkwürdige Sätze[1]) über das einer Kugel ein- resp. umbeschriebene Tetraeder als metrische Spezialisierungen eines Fundamentalsatzes über Flächen 2. Ordnung erscheinen. Für diesen Fundamentalsatz wird eine Reihe von Beweisen gegeben.

§ 1.

Eine (nicht ausgeartete) Fläche zweiter Klasse Φ_2 sei einem Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ einbeschrieben. Von den Kanten des Tetraeders soll keine ganz auf der Fläche liegen. Der Berührungspunkt in der Ebene $A_kA_lA_m$ sei B_i. Man verbinde B_i und A_k, A_l durch zwei Gerade $g_i^{(k)}$, $g_i^{(l)}$; andererseits gehen durch B_i zwei Gerade λ_i, μ_i, die in der Ebene $A_kA_lA_m$ und zugleich auf der Fläche Φ_2 liegen. Die beiden Geradenpaare (λ_i, μ_i), $\left(g_i^{(k)}, g_i^{(l)}\right)$ bilden ein Doppelverhältnis $D_i^{(m)}$. Solcher Doppelverhältnisse gibt es also im Ganzen $3 \cdot 4 = 12$; wir fragen nach deren Zusammenhang.

Für $A_1A_2A_3A_4$ als Koordinatentetraeder besitzt eine ihm eingeschriebene Φ_2 die Gleichung:

$$(1)\quad \Phi_2 \equiv \alpha_{12}u_1u_2 + \alpha_{13}u_1u_3 + \alpha_{14}u_1u_4 + \alpha_{23}u_2u_3 + \alpha_{24}u_2u_4 + \alpha_{34}u_3u_4 = 0,$$

wo nach Voraussetzung alle α_{ik}, wie auch die Diskriminante A der Φ_2 von Null verschieden sein sollen. Der Berührungspunkt B_4 der der Ebene $A_1A_2A_3$ hat die Koordinaten α_{14}, α_{24}, α_{34}, 0; also wird die Gleichung des Ebenenbüschels $[A_4B_4]$ durch die Gerade A_4B_4, wenn x einen Parameter bedeutet:

$$(2)\qquad [A_4B_4] \equiv (x_3\alpha_{14} - x_1\alpha_{34}) - x(x_2\alpha_{34} - x_3\alpha_{24}) = 0.$$

1) Bei dem elementaren Charakter dieser Sätze ist kaum zu hoffen, daß die vom Verfasser angeführte Literatur eine vollständige sein wird. Es kommt dem Verfasser hauptsächlich darauf an, diese Sätze unter einem einzigen Gesichtspunkte zusammen zu fassen.

Soll eine Ebene des Büschels (2) die Φ_2 berühren, so erhält man (nach Weglassung des Faktors α_{34}) die Bedingung:

$$(3) \qquad \varkappa^2\alpha_{23}\alpha_{24} + \varkappa(\alpha_{13}\alpha_{24} + \alpha_{14}\alpha_{23} - \alpha_{12}\alpha_{34}) + \alpha_{13}\alpha_{14} = 0.$$

Die Diskriminante A dieser in $\varkappa$ quadratischen Gleichung hat den Wert:

$$(4) \quad A = \alpha_{12}^2\alpha_{34}^2 + \alpha_{13}^2\alpha_{24}^2 + \alpha_{14}^2\alpha_{23}^2 - 2\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{24}\alpha_{34} - 2\alpha_{12}\alpha_{14}\alpha_{23}\alpha_{34} - 2\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{23}\alpha_{24}$$
$$= 2(\alpha_{12}^2\alpha_{34}^2 + \alpha_{13}^2\alpha_{24}^2 + \alpha_{14}^2\alpha_{23}^2) - (\alpha_{12}\alpha_{34} + \alpha_{13}\alpha_{24} + \alpha_{14}\alpha_{23})^2.$$

Offenbar ist dieser Wert, der nichts anderes ist, wie die Diskriminante A der Form Φ_2 (1), immer derselbe, von welchem Berührungspunkte B_i und von welcher Kombination (A_k, A_l) man auch ausgegangen sein mag.

Das Doppelverhältnis $D_4^{(3)}$ der beiden Geradenpaare (λ_4, μ_4), $(g_4^{(1)}, g_4^{(2)})$ ist der Quotient der beiden Wurzeln $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ von (3):

$$(5) \qquad D_4^{(3)} = \frac{-\alpha_{13}\alpha_{24} - \alpha_{23}\alpha_{14} + \alpha_{12}\alpha_{34} + \sqrt{A}}{-\alpha_{13}\alpha_{24} - \alpha_{23}\alpha_{14} + \alpha_{12}\alpha_{34} - \sqrt{A}},$$

oder wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\alpha_{12}\alpha_{34} + \alpha_{13}\alpha_{24} + \alpha_{14}\alpha_{23} = \lambda, \quad \alpha_{12}^2\alpha_{34}^2 + \alpha_{13}^2\alpha_{24}^2 + \alpha_{14}^2\alpha_{23}^2 = \varrho,$$

gleich dem Ausdruck:

$$(6) \qquad D_4^{(3)} = \frac{-\lambda + 2\alpha_{12}\alpha_{34} + \sqrt{A}}{-\lambda + 2\alpha_{12}\alpha_{34} - \sqrt{A}}, \quad A = 2\varrho - \lambda^2.$$

Hieraus folgt:

$$(7) \qquad D_4^{(3)} = D_3^{(4)} = D_1^{(2)} = D_2^{(1)},$$

und damit der Satz:

(I) „Eine nicht ausgeartete Fläche 2. Klasse Φ_2 berühre die vier Ebenen eines Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$, von dem keine Kante ganz auf der Fläche liege, in den Punkten B_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Sind λ_i, μ_i die beiden Geraden der Φ_2, die durch B_i hindurchgehen, verbindet man andererseits B_i mit den drei Ecken A_k, A_l, A_m durch die Geraden $g_i^{(k)}$, $g_i^{(l)}$, $g_i^{(m)}$, so sind die drei Doppelverhältnisse $D_i^{(k)}$, $D_i^{(l)}$, $D_i^{(m)}$, die das Paar (λ_i, μ_i) resp. mit den Paaren $\left(g_i^{(l)}, g_i^{(m)}\right)$, $\left(g_i^{(m)}, g_i^{(k)}\right)$, $\left(g_i^{(k)}, g_i^{(l)}\right)$ bildet, in den vier Tetraederebenen die nämlichen, so daß:

$$D_i^{(k)} = D_k^{(i)} = D_l^{(m)} = D_m^{(l)}.“$$

„Durch Vertauschung von Ebenen und Punktkoordinaten geht aus (I) der dualistische Satz (I′) hervor.“

Ist nun im besonderen die Φ_2 eine Kugel, so werden die Geraden λ_i, μ_i, durch B_i zu den Minimalgeraden in der zugehörigen Berührungsebene $A_k A_l A_m$, und die mit einer Konstanten $\left(\frac{1}{2i}\right)$ multiplizierten Logarithmen der Doppelverhältnisse $D_i^{(k)}$, $D_i^{(l)}$, $D_i^{(m)}$ werden die Winkel, die je zwei der Geraden $g_i^{(k)}$, $g_i^{(l)}$, $g_i^{(m)}$ miteinander bilden. Damit ergibt sich der Satz[1]):

(A) „Verbindet man einen der vier Berührungspunkte einer einem Tetraeder einbeschriebenen Kugel mit den drei Tetraederecken der zugehörigen Berührungsebene, so bilden die Verbindungsgeraden drei Winkel, die für jede der vier Tetraederebenen die nämlichen sind.“

Legt man dagegen den zu (I) dualistischen Satz (I′) zu Grunde und nimmt wiederum im Besonderen für Φ_2 die dem Tetraeder umbeschriebene Kugel, so gelangt man zu einem in metrischer Hinsicht dualistischen Seitenstück[2]) von (A):

(A′) „Legt man in den Ecken eines Tetraeders an die ihm umbeschriebene Kugel die Tangentialebenen, und schneidet jede von ihnen mit den drei, in der bezüglichen Ecke zusammenstoßenden Tetraederebenen, so bilden die Spuren der letzteren drei Winkel, die für jede der vier Ecken die nämlichen sind.“

Da aber diese Winkel dieselben sind, die jeweils die drei, durch die drei Tetraederebenen einer Ecke aus der Kugel aus-

1) Der Verfasser verdankt die Kenntnis dieses Satzes mündlichen Mitteilungen von Herrn H. A. Schwarz, der ihn ganz elementar beweist und eine Theorie der Kegelschnittsbrennpunkte darauf gründet. Nach einer mündlichen Mitteilung von Herrn H. G. Zeuthen wurde der Satz etwa in der Mitte des vorigen Jahrzehnts in der dänischen Tidsskrift for Math. von Bang als Aufgabe gestellt, die ebenda im Jahre darauf eine Lösung erfuhr.

2) In einem Gespräch zwischen Herrn H. A. Schwarz, Cyp. Stéphanos und mir machte Herr Stéphanos darauf aufmerksam, daß der Satz (A′) implicite bereits in den bekannten Untersuchungen des Herrn Schwarz über die hypergeometrische Reihe Verwendung finde. Herr Stéphanos machte mich ferner darauf aufmerksam, daß mein Satz (II) [§ 2] bereits im Jahre 1880 von ihm aufgestellt sei (Assoc. franç. Congrès de Reims) auf Grund des Nullsystems, das durch die zugehörige Involution (s. § 4 der vorliegenden Abh.) bestimmt ist. Herr Stéphanos zieht daselbst weitere Folgerungen daraus hinsichtlich einer ∞^2 resp. ∞^1 Schar von F_2, die vier Punkte und vier Tangentialebenen, resp. acht Punkte und acht Tangentialebenen gemein haben.

geschnittenen Kreise miteinander bilden, so läßt sich (A′) auch so aussprechen:

(A′) „Beschreibt man einer Kugel ein Tetraeder ein, so schneiden sich die von den Ebenen des Tetraeders aus der Kugel ausgeschnittenen Kreise C_1, C_2, C_3, C_4 in drei Paaren gleicher Winkel, indem stets der Winkel (C_i, C_k) gleich dem Winkel (C_l, C_m) ist $(i, k, l, m = 1, 2, 3, 4)$."

Übrigens läßt sich Satz (A′) auf den elementaren Kreissatz über die Gleichheit der Peripheriewinkel auf demselben Bogen zurückführen.

Projiziert man nämlich die Kugel stereographisch auf eine Ebene, so erhält man, den zu (A′) entsprechenden Satz in der Ebene:

(B′) „Legt man durch je drei von vier Punkten einer Ebene einen Kreis, so schneiden sich von diesen vier Kreisen irgend zwei unter demselben Winkel, wie die beiden andern."

Und umgekehrt geht aus diesem Satz wieder der Satz (A′) hervor.

Unterwirft man nunmehr die Figur in der Ebene einer Inversion, deren Zentrum einer der vier vorgelegten Punkte ist, so ergibt sich sofort, daß ein Peripheriewinkel über einer Kreissehne gleich dem Winkel zwischen Sehne und Kreistangente ist. Umgekehrt aber geht dieser elementare Kreissatz durch Inversion und stereographische Projektion in den Kugelsatz (A′) über.

Hierauf gestützt erkennt man, wie Satz (A′) nichts anderes darstellt als eine Übertragung des Kreissatzes über die Gleichheit der Peripheriewinkel auf demselben Bogen auf die Kugel. Um die Analogie möglichst hervortreten zu lassen, stellen wir beide Sätze in folgender Fassung zusammen:

„Satz der Ebene"[1]: „Auf einem Kreise K nehme man zwei feste Punkte 1, 2 an, lege durch 1 eine feste Gerade g unter dem Winkel $(g, K) = \alpha$. Sodann lege man einen Hilfskreis C, der g in 1 berührt und durch 2 geht, und nehme auf C beliebig, aber fest einen Punkt O an. Ist dann P ein variabler Punkt auf K, so schneiden sich die beiden Kreise $(O\,1\,P)$, $(O\,2\,P)$ in P stets unter gleichem Winkel α."

„Satz des Raumes": „Auf einer Kugel K ziehe man einen Kreis C und nehme auf C einen festen Punkt 1 an, sowie einen beliebig, aber fest gewählten Punkt O. Durch 1 lege man irgend eine festgewählte Kugeltangente g, die mit C den Winkel α bilde.

1) Wie ich einer nachträglichen Mitteilung des Herrn A. Schönflies verdanke, steht der „Satz der Ebene" bereits bei Plücker, Werke I, p. 280.

Ist dann P ein variabler Kugelpunkt, so schneide die Ebene (Pg) aus C als zweiten Punkt den Punkt 2 aus. Dann schneiden sich die Kreise $(O1\,P)$, $(O2\,P)$ in P stets unter dem gleichen Winkel α."

§ 2.

In der Figur des Satzes (II) betrachte man zwei der vier Berührungspunkte B_i, etwa B_3 und B_4, nebst der zugehörigen Tetraederkante A_1A_2. Bezeichnet man in Übereinstimmung mit § 1, die Parameter der beiden Geradenscharen auf der Fläche mit λ, μ, so gingen durch B_3 die beiden Geraden λ_3, μ_3, durch B_4 die beiden Geraden λ_4, μ_4. Offenbar sind dann die Schnittpunkte der Kante A_1A_2 mit der Fläche die Treffpunkte (λ_3, μ_4) und (λ_4, μ_3) der Geraden λ_3, μ_4 resp. λ_4, μ_3.

Das Doppelverhältnis $D_4^{(3)}$ (5) läßt sich demnach auch erklären als das Doppelverhältnis der beiden auf der Kante A_1A_2 liegenden Punktepaare (λ_3, μ_4), (λ_4, μ_3) und A_1, A_2, woraus unmittelbar hervorgeht, daß $D_4^{(i)} = D_3^{(4)}$. Der Inhalt des Satzes (I) ist demnach der, daß stets $D_i^{(k)} = D_l^{(m)}$. Greift man also irgend zwei Gegenkanten des Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ heraus, so nimmt der Satz (I) von selbst die in sich dualistische Gestalt an:

(II) „Gegeben sei eine eigentliche Fläche zweiter Ordnung und Klasse F nebst zwei willkürlichen, sich nicht treffenden Geraden g, h.

Die Geraden g, h schneiden einmal aus der Fläche F zwei Punktepaare G_1, G_2; H_1, H_2 aus. Andererseits gehen durch g, h je zwei Tangentialebenen an die Fläche, die h, g in zwei weiteren Punktepaaren H_1', H_2'; G_1', G_2' treffen.

Dann ist das Doppelverhältnis der beiden Punktepaare (G_1, G_2), (G_1', G_2') auf g gleich dem Doppelverhältnis der beiden Punktepaare (H_1, H_2), (H_1', H_2') auf h."[1])

Ersichtlich ist dieser Fundamentalsatz nur ein Ausdruck dafür, daß die Fläche F sowohl von der zweiten Ordnung, wie von der zweiten Klasse ist, und daß zugleich die Geraden im Raume sich selbst dualistisch gegenüber stehen.

Für den Satz (II) soll ein neuer Beweis gegeben werden. Der Bequemlichkeit halber operieren wir lieber mit Punktkoordinaten.

---

1) Sieht man die Fläche F als die absolute Fläche der nichteuklidischen Geometrie an, so läßt sich Satz (II) auch in der Gestalt aussprechen, daß die unendlich ferne Strecke irgend einer Raumgeraden g von irgend einer andern Raumgeraden h unter demselben Winkel projiziert wird, wie die unendlich ferne Strecke der letzteren Geraden von der ersteren.

Die Gleichung einer durch die Ecken $A_1 A_2 A_3 A_4$ des Koordinatentetraeders gehenden Fläche 2. Ordnung F ist:

$$(8)\quad F \equiv a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{14}x_1x_4 + a_{23}x_2x_3 + a_{24}x_2x_4 + a_{34}x_3x_4 = 0,$$

wo wiederum die a_{ik}, sowie die Diskriminante A von F von Null verschieden sein sollen.

Um die beiden Tangentialebenen zu bestimmen, die durch die Kante A_3A_4 an die Fläche gehen, setze man in (8):

$$(9)\qquad x_2 = \varkappa x_1,$$

wo $\varkappa$ ein Parameter ist, und stelle die Bedingung dafür auf, daß der von der Ebene (9) aus der Fläche ausgeschnittene Kegelschnitt in zwei Gerade zerfällt.

Dann ergibt sich, nach Weglassung des Faktors a_{34}, die in $\varkappa$ quadratische Gleichung:

$$(10)\qquad \varkappa^2 a_{23}a_{24} + \varkappa(a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} - a_{12}a_{34}) + a_{13}a_{14} = 0,$$

die, abgesehen von der Bezeichnung der Koeffizienten a_{ik}, völlig mit der quadratischen Gleichung (3) übereinstimmt. Das in Rede stehende Doppelverhältnis, als Quotient der beiden Wurzeln von (10), ist somit der Form nach genau das in (5) angegebene, und es läßt sich derselbe Schluß ziehen wie dort.

§ 3.

Durch irgend vier Punkte $A_1A_2A_3A_4$ einer Fläche F 2. Ordnung und Klasse gehen vier Erzeugende λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 der einen Schar und vier Erzeugende μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 der anderen Schar, und umgekehrt bestimmen vier beliebige Parameterpaare (λ_1, μ_1), (λ_2, μ_2), (λ_3, μ_3), (λ_4, μ_4) vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 auf F. Die vier Werte (Geraden) λ bilden, in einer beliebigen, aber festen Anordnung genommen, ein Doppelverhältnis D_λ und ebenso die vier Werte (Geraden) μ, in derselben Anordnung genommen, ein Doppelverhältnis D_μ.

Es ist ersichtlich, daß das in Satz (I) oder (II) auftretende Doppelverhältnis $D_i^{(k)}$ zu den Werten von D_λ und D_μ in invarianter Beziehung stehen wird. Indem wir diese Beziehung ermitteln, gewinnen wir zugleich einen dritten Beweis unseres Hauptsatzes.

Es empfiehlt sich jetzt, die Gleichung von F in der kanonischen Gestalt anzusetzen:

$$(11a)\qquad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 : \lambda : \mu : \lambda\mu,$$

$$(11b)\qquad u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = \lambda\mu : -\lambda : -\mu : 1,$$

wo wiederum die beiden Scharen von Erzeugenden durch $\lambda = \text{const.}$, $\mu = \text{const.}$ geliefert werden.

Die Darstellung (11 b) von F sagt nichts anderes aus, als daß die Gleichung der Tangentialebene von F in einem Punkte (λ, μ) lautet:

$$x_1 \lambda\mu - x_2 \mu - x_3 \lambda + x_4 = 0. \tag{12}$$

Ein beliebiger Punkt der Verbindungsgeraden $g = (\lambda_1, \mu_2)$, (λ_2, μ_1) ist mit Hilfe eines Parameters $\varkappa$ dargestellt durch:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 - \varkappa : \lambda_1 - \varkappa\lambda_2 : \mu_2 - \varkappa\mu_1 : \lambda_1\mu_2 : - \varkappa\lambda_2\mu_1. \tag{13}$$

Somit schneidet die Tangentialebene (λ_3, μ_3) die Gerade g (13) in dem Punkte mit dem Parameterwert $\varkappa_3$:

$$\varkappa_3 = \frac{\lambda_3\mu_3 - \lambda_1\mu_3 - \lambda_3\mu_2 + \lambda_1\mu_2}{\lambda_3\mu_3 - \lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_1 + \lambda_2\mu_1} = \frac{(\lambda_3 - \lambda_1)(\mu_3 - \mu_2)}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\mu_3 - \mu_1)}. \tag{14}$$

Wiederholt man diesen Prozeß mit der Tangentialebene (λ_4, μ_4), so ergibt sich ein analoger Wert $\varkappa_4$ von $\varkappa$ durch Vertauschung von λ_3, μ_3 mit λ_4, μ_4.

Der Quotient $\varkappa_3 : \varkappa_4$ beider Werte von $\varkappa$ liefert daher das Doppelverhältnis des Punktepaares (λ_1, μ_2), (λ_2, μ_1) auf g zu dem zweiten Punktepaar, das die beiden durch die Gerade $h = (\lambda_3, \mu_4)$, (λ_4, μ_3) an F gelegten Tangentialebenen auf g ausschneiden. Wird dieses Doppelverhältnis mit $D_g^{(h)}$ bezeichnet, so hat man also:

$$D_g^{(h)} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_2)}{(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_2)} : \frac{(\mu_1 - \mu_3)(\mu_4 - \mu_2)}{(\mu_1 - \mu_4)(\mu_3 - \mu_2)} = \frac{D_\lambda^{(13\,42)}}{D_\mu^{(13\,42)}}, \tag{15}$$

wo die Reihenfolge (13 42) der oberen Indices die Anordnung angibt, in der beide Dodpelverhältnisse zu nehmen sind. Aus (15) ersieht man sofort, daß $D_g^{(h)} = D_h^{(g)}$, und daß nur drei wesentlich verschiedene Möglichkeiten vorliegen, die je zwei Gegenkanten des Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ entsprechen. Bezeichnet man Zähler und Nenner in (15) kurz mit D_λ, D_μ, die linke Seite mit D, so sind die drei in Frage kommenden Werte von D offenbar:

$$D = \frac{D_\lambda}{D_\mu}, \quad D' = \frac{1 - D_\lambda}{1 - D_\mu}, \quad D'' = \frac{D_\lambda - 1}{D_\mu - 1} \cdot \frac{D_\mu}{D_\lambda}, \tag{16}$$

wo, wie es sein muß, das Produkt der drei Werte D, D', D'' gleich Eins wird.[1]) Wäre man vom reziproken Werte von D ausgegangen, so wären auch für D' und D'' ihre reziproken Werte zu substituieren.

---

1) Dies sagt für den Satz (A) (§ 1) aus, daß die Summe der drei dort auftretenden Winkel gleich dem Vollwinkel ist.

§ 4.

Für den Hauptsatz (II) werde ein weiterer Beweis mitgeteilt, der ohne Rechnung verfährt und den inneren Grund der Erscheinung deutlich hervortreten läßt.

Es gibt bekanntlich ∞^6 Kollineationen des Raumes, die eine (eigentliche) Fläche F 2. Ordnung und Klasse in sich überführen. Eine solche Kollineation vertauscht entweder beide Geradenscharen (λ), (μ) miteinander, oder aber sie führt jede der beiden Geradenscharen in sich über.

In beiden Fällen werden die Parameter λ, μ der beiden Geradenscharen linear transformiert; bei den Kollineationen der ersten Art sind λ, μ durch eine beliebige bilineare Relation verbunden, bei den Kollineationen zweiter Art erfährt sowohl λ wie μ eine beliebige lineare (projektive) Substitution.

Soll nun irgend eine dieser Kollineationen gleichzeitig zwei beliebige Raumgerade g, h, die aus F die Punktepaare A_1, A_2 resp. A_3, A_4 ausschneiden, miteinander vertauschen, so ist das nur so möglich, daß entweder A_1 und A_3 gegenseitig in einander übergehen, und zugleich A_2 und A_4, oder aber A_1 und A_4, A_2 und A_3. Seien wieder λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 resp. μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 die Parameter der vier durch A_1, A_2, A_3, A_4 gehenden Erzeugenden der ersten resp. zweiten Schar, so müßte bei einer Kollineation der ersten Art, die g und h vertauscht, das Doppelverhältnis der vier λ gleich dem Doppelverhältnis der vier μ sein.

Da dies bei zwei beliebigen Geraden g, h nicht zutrifft, so kommen nur die Kollineationen der zweiten Art in Betracht.

Hier ist aber sofort zu sehen, daß es gerade zwei Kollineationen der zweiten Art gibt, die der gestellten Bedingung genügen, entsprechend den beiden oben angegebenen Vertauschungsmöglichkeiten.

Denn sollen sich A_1 und A_3, also auch λ_1 und λ_3, μ_1 und μ_3 gegenseitig entsprechen, so müssen die Projektivitäten, die λ und μ vermöge der Kollineation erfahren, Involutionen sein, und diese sind völlig und eindeutig bestimmt, wenn sich außerdem noch A_2 und A_4, d. h. λ_2 und λ_4, μ_2 und μ_4 gegenseitig entsprechen sollen. Das Analoge gilt bei der zweiten Möglichkeit, daß A_1 und A_4, A_2 und A_3 gegenseitig in einander übergehen.

Somit gibt es gerade zwei Kollineationen K_1, K' des Raumes, die die Fläche F so in sich überführen, daß jede der beiden Erzeugendenscharen dabei in sich übergeht, und die zugleich zwei beliebige Raumgerade g, h mit einander vertauschen.

Dann aber gehen die beiden Punktepaare, in denen die Gerade g einmal von F, andererseits von den beiden durch die Gerade h an F gehenden Tangentialebenen getroffen wird, über in die entsprechenden, in denen h einmal von F, andererseits von den beiden durch g an F gehenden Tangentialebenen getroffen wird. Mithin müssen auch die Doppelverhältnisse beider Punktepaare auf g und auf h übereinstimmen, was zu beweisen war.

Nunmehr läßt sich auch leicht übersehen, wie sich im einzelnen vermöge jeder der beiden Raumkollineationen K, K' die vier Punkte auf g mit den vier Punkten auf h vertauschen.

Denn die beiden durch $g = \overline{A_1(\lambda_1, \mu_1),\ A_2(\lambda_2, \mu_2)}$ an F gehenden Tangentialebenen sind gerade die Ebenen (λ_1, μ_2) und (λ_2, μ_1), deren Spuren auf h daher mit P_{12}, P_{21} bezeichnet seien; entsprechend sind die beiden durch $h = \overline{A_3(\lambda_3, \mu_3),\ A_4(\lambda_4, \mu_4)}$ an F gehenden Tangentialebenen die Ebenen (λ_3, μ_4) und (λ_4, μ_3), und ihre Spuren auf g seien P_{34}, P_{43}.

Bei der ersten Kollineation K vertauschen sich überall die Indices 1 und 3 einerseits, 2 und 4 andererseits, somit gehen die Punkte A_1, A_2, P_{34}, P_{43} auf g resp. über in die Punkte A_3, A_4, P_{12}, P_{21} auf h, und umgekehrt. Bei der zweiten Kollineation K' dagegen vertauschen sich überall die Indices 1 und 4 einerseits, 2 und 3 andererseits, somit gehen die Punkte A_1, A_2, P_{34}, P_{43} auf g resp. über in die Punkte A_4, A_3, P_{21}, P_{12} auf h, und umgekehrt.

Offenbar sind die beiden Kollineationen K, K' überhaupt Involutionen des Raumes.

Ist umgekehrt irgend eine Kollineation derart gegeben, daß sie jede der beiden Geradenscharen von F in sich überführt, so ist das eine Involution des Raumes, und zu einer beliebig gegebenen Geraden g gehört involutorisch eine ganz bestimmte Gerade h.

Bezüglich der analytischen Ausführungen, die auch den Fall mit umfassen, wo die Diskriminante der Fläche F verschwindet, s. § 8.

§ 5.

Die Entwickelungen des § 2 gestatten nach verschiedenen Richtungen hin Ausdehnungen, die zu einigen neuen Beweisen des Hauptsatzes (II) führen. Zugleich wird damit die Frage nach einer invarianten Darstellung des im Satze (II) auftretenden Doppelverhältnisses $D_i^{(k)}$ ihre Lösung finden, und ebenso die nach einer invarianten Darstellung der beiden Doppelverhältnisse D_λ, D_μ des § 3.

Andererseits wird sich auch zeigen, welche der erhaltenen Ergebnisse auf den Raum R_n von n Dimensionen übertragbar sind, und daß hierbei die F_2 auch durch eine beliebige Korrelation im R_n ersetzbar ist.

Zunächst soll der Beweis des § 2 so abgeändert werden, daß er für ein Koordinatentetraeder in allgemeiner Lage gilt.

Die Gleichung einer Fläche 2. Ordnung F lautet dann:

$$F \equiv \Sigma\Sigma a_{ik}x_i x_k \equiv a_{x^2} = 0, \tag{8'}$$

wo a_{x^2} die übliche symbolische Bezeichnung ist.

Die Diskriminante $A = |a_{ik}|$ von F sei von Null verschieden. Die Schnittpunkte zweier beliebiger, windschiefer, Geraden g, h mit F mögen die Koordinaten (r_i), (s_i) resp. (y_i), (z_i) besitzen, sodaß also:

$$a_{r^2} = 0,\ a_{s^2} = 0,\ a_{y^2} = 0,\ a_{z^2} = 0. \tag{17}$$

Die Geraden g, h sollen die Fläche F nicht berühren, d. h. es werden auch die Ausdrücke $a_{rs} \equiv \frac{1}{2}\Sigma\Sigma a_{ik}r_i s_k$ und $a_{yz} \equiv \frac{1}{2}\Sigma\Sigma a_{ik}y_i z_k$ als von Null verschieden vorausgesetzt. Ein beliebiger Punkt G auf g sei $(r_i + \varkappa s_i)$, ein solcher auf der Ebene (G, h), i. e. der Ebene der drei Punkte (g_i) (z_i), $(r_i + \varkappa s_i)$ sei $\{\varrho y_i + \sigma z_i + \tau(r_i + \varkappa s_i)\}$, wo $\varkappa$, σ, τ Parameter bedeuten. Der von der fraglichen Ebene aus F ausgeschnittene Kegelschnitt wird durch die Gleichung geliefert:

$$\varrho^2 a_{y^2} + \sigma^2 a_{z^2} + \tau^2 a_{(r+\varkappa s)^2} + 2\varrho\sigma a_{yz} + 2\varrho\tau a_{y,\, r+\varkappa s} + 2\sigma\tau a_{z,\, r+\varkappa s} = 0,$$

oder, mit Rücksicht auf die Bedingungen (17);

$$\varkappa\tau^2 a_{rs} + \varrho\sigma a_{yz} + \varrho\tau(a_{ry} + \varkappa a_{s\varphi}) + \sigma\tau(a_{rz} + \varkappa a_{sz}) = 0. \tag{18}$$

Die Bedingung des Zerfallens des Kegelschnitts (18) liefert die Schnittpunkte der beiden von der Geraden h an die Fläche F gehenden Tangentialebenen mit g:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{yz} & a_{ry} + \varkappa a_{sy} \\ a_{yz} & 0 & a_{rz} + \varkappa a_{sz} \\ a_{ry} + \varkappa a_{sy}, & a_{rz} + \varkappa a_{sz}, & 2\varkappa a_{rs} \end{vmatrix} = 0,$$

oder, nach $\varkappa$ entwickelt, mit Weglassung des Faktors a_{yz}:

$$\varkappa^2 a_{sy}a_{sz} + \varkappa(a_{ry}a_{sz} + a_{rz}a_{sy} - a_{rs}a_{yz}) + a_{ry}a_{rz} = 0. \tag{10'}$$

Dies ist aber der Form nach dieselbe quadratische Gleichung, wie (10) in § 2: letztere geht in (10') über, sobald man die Indices 1, 2, 3, 4 resp. mit r, s, y, z vertauscht; umgekehrt gehen, wenn im besondern die Punkte (r), (s), (y), (z) in die Ecken A_1, A_2, A_3, A_4 des Koordi-

natentetraeders fallen, die a_{rs}, $a_{ry}, \cdots$ in die damaligen Koeffizienten a_{12}, $a_{13}, \cdots$ der Gleichung (8) über, während sich die Bedingungen (17) auf $a_{ii} = 0$ $_{(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)}$ reduzieren.

Die weiteren Schlüsse sind daher dieselben, wie die in § 2 an Gleichung (10) angeknüpften.

Die Diskriminante Δ von (10′) hat nach § 2 den Wert:

$$\Delta = |a_{rs}|, \tag{19}$$

wo die Bedingungen (17) zu berücksichtigen sind.

Indessen ergibt sich, unabhängig von diesen Bedingungen, nach Ersetzung der a_{rs} durch ihre Werte und zweimalige Anwendung des Multiplikationstheorems der Determinanten:

$$\Delta = (rsyz)^2 A \tag{20}$$

wo $(rsyz)$ die Determinante der r_i, s_i, y_i, z_i bedeutet. Die Formel (20) ist übrigens eine unmittelbare Folge der Invariantennatur von A.

§ 6.

Ein weiterer Beweis läßt den Hauptsatz (II) als eine Folge einfacher Determinantensätze erscheinen. Die Gleichung der F_2 sei wieder in allgemeiner Gestalt vorgelegt:

$$F \equiv \Sigma\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0, \qquad (A = |a_{ik}| \neq 0), \tag{21}$$

gleichzeitig aber in der dualistischen Gestalt:

$$\Phi = \Sigma\Sigma \alpha_{ik} u_i u_k = 0, \tag{22}$$

wo die α_{ik} die ersten Minoren der a_{ik} in A sind, und die Diskriminante Δ von Φ gleich A^3 ist.

Dagegen normieren wir das Koordinatentetraeder so, daß zwei seiner Gegenkanten, etwa $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ und $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, zu den vorgelegten Geraden g und h werden.

Dann schneidet g die Fläche F in dem Punktepaar:

$$a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{12} x_2^2 = 0; \tag{23}$$

andererseits gehen durch h an F die zwei Tangentialebenen:

$$\alpha_{11} u_1^2 + 2\alpha_{12} u_1 u_2 + \alpha_{12} u_2^2 = 0. \tag{24}$$

Faßt man hier vermöge der Relation $u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0$ u_1, u_2 als die zu x_1, x_2 kontragredienten Größen auf, so stellt (24) zugleich die Spuren der beiden Tangentialebenen auf g dar; in den x_1, x_2 lautet (24):

$$a_{22} x_1^2 - 2\alpha_{12} x_1 x_2 + \alpha_{11} x_2^2 = 0. \tag{24a}$$

Analog schneidet h die Fläche F in dem Punktepaare:

$$a_{33}x_3^2 + 2a_{34}x_3x_4 + a_{44}x_4^2 = 0, \tag{25}$$

und die durch g an F gehenden Tangentialebenen treffen h in dem zweiten Punktepaare:

$$\alpha_{33}u_3^2 + 2\alpha_{31}u_3u_4 + \alpha_{44}u_4^2 = 0. \tag{26}$$

Es sollen nun die einfachsten simultanen Invarianten von (23), (24) einerseits mit denen von (25), (26) verglichen werden; das sind einmal die bilineare (harmonische) Invariante der Formen (23), (24) resp. der Formen (25), (26), sodann die vier Diskriminanten der Formen (23), (24), (25), (26).

Die bilinearen Invarianten $J_g^{(h)}$ von (23), (24) und $J_h^{(g)}$ von (25), (26) denken wir uns so normiert, daß:

$$2J_g^{(h)} = a_{11}\alpha_{11} + 2a_{12}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22}, \tag{27}$$

$$2J_h^{(g)} = a_{33}\alpha_{33} + 2a_{34}\alpha_{34} + a_{44}\alpha_{44}. \tag{28}$$

Um diese beiden Ausdrücke zu vergleichen, entwickele man die Determinante $A = |a_{ik}|$ nach den Elementen der ersten resp. zweiten Zeile (oder Kolonne) und addiere, so kommt:

$$2A = (a_{11}\alpha_{11} + 2a_{12}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22}) + (a_{13}\alpha_{13} + a_{14}\alpha_{14} + a_{23}\alpha_{23} + a_{24}\alpha_{24}). \tag{29}$$

Wiederholt man diesen Prozeß mit der dritten resp. vierten Zeile (oder Kolonne) von A, so hat man analog:

$$2A = (a_{33}\alpha_{33} + 2a_{34}\alpha_{34} + a_{44}\alpha_{44}) + (a_{13}\alpha_{13} + a_{14}\alpha_{14} + a_{23}\alpha_{23} + a_{24}\alpha_{24}). \tag{30}$$

Subtrahiert man jetzt (30) von (29), so folgt sofort:

$$J_g^{(h)} = J_h^{(g)}. \tag{31}$$

Die Diskriminanten der vier linken Seiten von (23), (24), (25), (26) bezeichne man mit:

$$\begin{aligned} D_{12} &= a_{12}^2 - a_{11}a_{22}, & \Delta_{12} &= \alpha_{12}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22}, \\ D_{34} &= a_{34}^2 - a_{33}a_{44}, & \Delta_{34} &= \alpha_{34}^2 - \alpha_{33}\alpha_{44}. \end{aligned} \tag{32}$$

Dann ist nach einem bekannten Determinantensatze:

$$\Delta_{12} = D_{34} \cdot A, \quad \Delta_{34} = D_{12} \cdot A, \tag{33}$$

und hieraus folgt die Gleichheit der Produkte:

$$D_{12}\Delta_{12} = D_{34}\Delta_{34}. \tag{34}$$

Nun setzt sich nach einem elementaren Satze über zwei quadratische Formen deren Doppelverhältnis in einfacher Weise aus der bilinearen Invariante und den beiden Diskriminanten zusammen; man hat:

$$D_g^{(h)} = \frac{J_g^{(h)} + \sqrt{D_{12}\Delta_{12}}}{J_g^{(h)} - \sqrt{D_{12}\Delta_{12}}}, \tag{35}$$

$$D_h^{(g)} = \frac{J_h^{(g)} + \sqrt{D_{34}\Delta_{34}}}{J_h^{(g)} - \sqrt{D_{34}\Delta_{34}}}, \tag{36}$$

wo mit $D_g^{(h)}$, $D_h^{(g)}$ die Doppelverhältnisse der Formen (23), (24), resp. (25), (26) bezeichnet sind.

Mit Rücksicht auf die Gleichheiten (31) und (34) resultiert demnach aus (35), (36) die Übereinstimmung beider Doppelverhältnisse:

$$D_g^{(h)} = D_h^{(g)}, \tag{37}$$

d. i. aber unser Hauptsatz (II).

Die obigen Entwickelungen lassen sich nach zwei Richtungen hin erweitern.

Sei zunächst jetzt $A = |a_{ik}|$ eine vierreihige Determinante mit ganz beliebigen Elementen a_{ik} (also im allgemeinen $a_{ik} \neq a_{ki}$), so bilde man sich die zu (27), (28), (32) analogen Ausdrücke:

$$2J_g^{(h)} = a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + a_{21}\alpha_{21} + a_{22}\alpha_{22}, \tag{27'}$$

$$2J_h^{(g)} = a_{33}\alpha_{33} + a_{34}\alpha_{34} + a_{43}\alpha_{43} + a_{44}\alpha_{44}, \tag{28'}$$

$$\begin{cases} D_{12} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}, & \Delta_{12} = \alpha_{12}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{22}, \\ D_{34} = a_{34}a_{43} - a_{33}a_{44}, & \Delta_{34} = \alpha_{34}\alpha_{43} - \alpha_{33}\alpha_{44}. \end{cases} \tag{32'}$$

Entwickelt man dann A, wie oben, nur jetzt das erste Mal nach den Elementen der beiden ersten Zeilen, das andere Mal nach den Elementen der beiden letzten Kolonnen, so ergibt sich wiederum:

$$J_g^{(h)} = J_h^{(g)}. \tag{31'}$$

Da ferner der den Formeln (33) zu Grunde liegende Determinantensatz auch für unsymmetrische Determinanten A gilt, so ist auch jetzt:

$$D_{12}\Delta_{12} = D_{34}\Delta_{34}, \tag{34'}$$

sowie, in Verbindung mit (31'):

$$\frac{J_g^{(h)} + \sqrt{D_{12}\Delta_{12}}}{J_g^{(h)} - \sqrt{D_{12}\Delta_{12}}} = \frac{J_h^{(g)} + \sqrt{D_{34}\Delta_{34}}}{J_k^{(g)} - \sqrt{D_{34}\Delta_{34}}}. \tag{37'}$$

Was die geometrische Deutung angeht, so stellen jetzt die Gleichungen:

$$(21') \quad F \equiv \Sigma\Sigma a_{ik} x_i y_k = 0, \qquad (22') \quad \Phi \equiv \Sigma\Sigma \alpha_{ik} u_i v_k = 0$$

eine beliebige Raumkorrelation dar. Nimmt man die beiden Koordinatentetraeder der (x) und der (y) als identisch an, so erzeugt die Korrelation auf den beiden Geraden $g(x_3=0, x_4=0)$ und $h(x_1=0, x_2=0)$, einmal direkt, das anderemal durch Projektion von der anderen Geraden aus, die Projektivitäten:

$$\begin{cases} (23') & a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 = 0, \\ (24') & \alpha_{11}u_1v_1 + \alpha_{12}u_1v_2 + \alpha_{21}u_2v_1 + \alpha_{22}u_2v_2 = 0, \\ (25') & a_{33}x_3y_3 + a_{34}x_3y_4 + a_{43}x_4y_3 + a_{44}x_4y_4 = 0, \\ (26') & \alpha_{33}u_3v_3 + \alpha_{34}u_3v_4 + \alpha_{43}u_4v_3 + \alpha_{44}u_4v_4 = 0. \end{cases}$$

Dann besitzen die beiden Projektivitäten auf g dieselben Invarianten[1]) (31'), (34') und dieselbe absolute Invariante (37'), wie die beiden Projektivitäten auf h.

Andererseits ist die Ausdehnung auf einen Raum R_n von n Dimensionen leicht ausführbar.

Sei $A = |a_{ik}| \neq 0$ eine beliebige n-reihige Determinante, und $n = \nu + \nu'$, so schneide man aus A den Minor D_ν der ersten ν Reihen und Kolonnen aus; die zugehörige Unterdeterminante sei $D_{\nu'}$. Multipliziert man jedes Element von D_ν mit seiner Unterdeterminante in A und addiert, so entstehe dadurch die Summe J_ν, entsprechend aus $D_{\nu'}$ die Summe $J_{\nu'}$.

Verfährt man dann, wie oben, so kommt:

$$(38) \qquad J_{\nu'} - J_\nu = A(\nu_1 - \nu);$$

also ist dann und nur dann $J_{\nu'} = J_\nu$, wenn n gerade $= 2\nu$ und $\nu_1 = \nu$.

Sind andererseits $\Delta_{\nu'}$, Δ_ν die zu $D_{\nu'}$, D_ν entsprechenden Minoren in der zu A adjungierten Determinante $\mathrm{A} = |\alpha_{ik}|$, so wird, auf Grund des oben für $n = 4$ benutzten Determinantensatzes:

$$\Delta_{\nu'} = D_\nu A^{\nu'-1}, \quad \Delta_\nu = D_{\nu'} A^{\nu-1},$$

somit:

$$(39) \quad D_\nu \Delta_\nu = D_\nu D_{\nu'} A^{\nu-1}, \; D_{\nu'} \Delta_{\nu'} = D_\nu D_{\nu'} A^{\nu'-1}, \; \frac{D_\nu \Delta_\nu}{D_{\nu'} \Delta_{\nu'}} = A^{\nu-\nu'},$$

---

1) Über die Bedeutung des Verschwindens dieser Invarianten für Projektivitäten s. die Habilitationsschrift von H. Wiener: „Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen . . .", Darmstadt 1885.

und beide Produkte $D_\nu \Delta_\nu$, $D_{\nu'} \Delta_{\nu'}$ sind wiederum dann und nur dann gleich, wenn n gerade $= 2\nu$, und $\nu' = \nu$.

Die Koeffizienten a_{ik} von A repräsentieren vermöge der Gleichungen (21′) oder (22′) eine Korrelation im R_n, die auf zwei beliebigen linearen Unterräumen R_ν, $R_{\nu'}$, direkt und durch Projektion, je zwei Korrelationen bestimmen.

Für beide stimmen dann die simultanen Invarianten (38) und (39) dann und nur dann überein, wenn $\nu' = \nu$, und $n = 2\nu$: in diesem ausgezeichneten Falle zieht im besonderen die Apolarität der beiden Korrelationen in einem R_ν die im andern R_ν nach sich.

Bilden die a_{ik} speziell ein symmetrisches System, so geht die Korrelation (21′), (22′) in das Polarsystem einer Fläche 2. Ordnung und 2. Klasse über, und die Korrelationen auf R_ν, $R_{\nu'}$ gehen ebenfalls über in die Polarsysteme je zweier Flächen 2. Ordnung und 2. Klasse.

§ 7.

Nunmehr kehren wir zu dem Hauptsatze (II) im R_3 zurück, und vervollständigen die bisherigen Untersuchungen in algebraischer Hinsicht, indem wir das Doppelverhältnis $D_g^{(h)}$, sowie die beiden Doppelverhältnisse D_λ, D_μ in invariante Gestalt setzen.

Das Doppelverhältnis $D_g^{(h)} = D_h^{(g)}$ (35) (36) (37) ist eine absolute Invariante der drei Formen:

(40) $F \equiv \Sigma\Sigma a_{ik} x_i x_k \equiv a_{x^2}$, $g \equiv \Sigma\Sigma \pi_{ik} p_{ik} \equiv p_\pi$, $h \equiv \Sigma\Sigma \pi_{ik} q_{ik} \equiv q_\pi$,

die durch ihr Verschwinden eine beliebige Fläche F 2. Ordnung, sowie zwei beliebige Raumgerade g, h darstellen; die π_{ik} bedeuten dabei variable Achsenkoordinaten, die p_{ik}, q_{ik} die Strahlenkoordinaten der Geraden g, h.

Es soll $D_g^{(h)}$ durch die einfachsten Simultaninvarianten der Formen (40) ausgedrückt werden.

Um diese Invarianten anzugeben, so stellt sich zuvörderst neben F die adjungierte (dualistische) Form:

(41) $$\Phi \equiv \Sigma\Sigma \alpha_{ik} u_i u_k \equiv u_{\alpha^2},$$

d. i. die mit zwei Reihen u_i geränderte Determinante $A = |a_{ik}|$ von F, sowie die Determinante A selbst.

Rändert man A mit je zwei Reihen u_i, v_i, so entsteht eine weitere Invariante von F; führt man statt der Achsenkoordinaten $(uv)_{ik} = \pi_{ik}$

die ihnen gleichen[1]) Strahlenkoordinaten $(xy)_{lm} = p_{lm}$ ein, so entsteht die Form:

$$\beta_{p^2} \equiv \Sigma\Sigma\, \alpha_{ik}^{(lm)}\, p_{ik}\, p_{lm}, \tag{42}$$

wo unter den $\alpha_{ik}^{(lm)}$ die zweiten Minoren von A zu verstehen sind. Das Verschwinden von β_{p^2} sagt aus, daß F von der Geraden (p) berührt wird.

Für p_{ik} und q_{ik} als die Koeffizienten der Formen g, h in (40) sind β_{p^2}, β_{q^2} simultane Invarianten von g, h und F.

Ändert man endlich A mit zwei verschiedenen Paaren von Ebenenkoordinaten u_i, v_i; u_i', v_i' und führt statt der $(uv)_{ik}$, $(u'v')_{ik}$ wieder die entsprechenden Strahlenkoordinaten p_{lm}, q_{lm} ein, so entsteht die weitere Invariante:

$$\beta_{pq} \equiv \Sigma\Sigma\, \alpha_{ik}^{(lm)}\, p_{ik}\, q_{lm}, \tag{43}$$

deren Verschwinden aussagt, daß die Geraden g und h in Bezug auf die Fläche F konjugiert sind, d. h. daß jede der beiden Geraden die reziproke Polare der andern trifft. β_{pq} entsteht auch durch Polarisation von β_{p^2} nach den q.

Die Formen β_{p^2}, β_{q^2}, β_{pq} lassen sich in einfacher Weise mittels zweier Punktepaare auf den Geraden g, h ausdrücken.

Sind (ϱ_i), (σ_i) irgend zwei Punkte auf g, also $(\varrho_i + \varkappa\sigma_i)$ ein beliebiger Punkt auf g, so bestimmt sich das von F auf g ausgeschnittene Punktepaar aus:

$$a_{\varrho^2} + 2\varkappa a_{\varrho\sigma} + \varkappa^2 a_{\sigma^2} = 0; \tag{44}$$

die Diskriminante der linken Seite muß, bis auf einen konstanten Faktor, mit β_{p^2} übereinstimmen (wo die $p_{ik} = (\varrho\sigma)_{ik}$ die Strahlenkoordinaten von g sind), und man bestätigt leicht, daß direkt:

$$\beta_{p^2} = (a_{\varrho\sigma})^2 - a_{\varrho\varrho}\, a_{\sigma\sigma}. \tag{45}$$

Entsprechend, wenn (φ_i), (ψ_i) irgend zwei Punkte auf h sind, und $(\varphi\psi)_{ik} = q_{ik}$, kommt:

$$\beta_{q^2} = (a_{\varphi\psi})^2 - a_{\varphi\varphi}\, a_{\psi\psi}. \tag{46}$$

Um β_{pq} aufzustellen, drücke man die Bedingung aus, daß q die reziproke Polare von p trifft. Dann muß es einen Punkt $(\varrho_i + \varkappa\sigma_i)$ auf g geben, der in Bezug auf F sowohl zu (φ_i), wie zu (ψ_i) konjugiert ist:

$$a_{\varrho\varphi} + \varkappa a_{\varrho\psi} = 0, \quad a_{\sigma\varphi} + \varkappa a_{\sigma\psi} = 0.$$

---

1) Zunächst sind die π_{ik} den p_{lm} nur proportional; der Proportionalitätsfaktor darf aber gleich der Einheit gesetzt werden, da er aus den Schlußformeln doch herausfallen würde.

Mithin ist die fragliche Bedingung:

$$a_{\varrho\varphi}a_{\sigma\psi} - a_{\sigma\varphi}a_{\varrho\psi} = 0,$$

deren linke Seite, bis auf einen konstanten Faktor, mit β_{pq} übereinstimmen muß; es ergibt sich direkt:

$$\beta_{pq} = a_{\varrho\varphi}a_{\sigma\psi} - a_{\sigma\varphi}a_{\varrho\psi}. \tag{47}$$

Die Formen β_{p^2}, β_{q^2}, β_{pq} sind, wie es sein muß, zugleich Kombinanten hinsichtlich der ϱ_i, σ_i; φ_i, ψ_i; in der Tat, führt man statt der ϱ_i, σ_i lineare Kombinationen mit der Determinante δ ein, und analog statt der φ_i, ψ_i solche mit der Determinante δ', so findet sich sofort, daß sich β_{p^2}, β_{q^2}, β_{pq} nur um die bez. Faktoren δ^2, δ'^2, $\delta\delta'$ ändern.

Endlich existiert noch die bilineare Invariante der Formen g, h (40), die mit (P, Q) bezeichnet sei:

$$(P, Q) = \Sigma\Sigma p_{ik}q_{lm}. \tag{48}$$

Die drei aus den bisher aufgestellten Invarianten zusammengesetzten: $\beta_{p^2}\beta_{q^2}$, $(\beta_{pq})^2$, $A(P, Q)^2$ sind vom vierten Grade in den a_{ik}, und je vom zweiten Grade in den p, q.

Indem wir uns für die Bildungen $a_{\varrho\varrho}$, $a_{\varrho\sigma}$, $a_{\sigma\sigma}$, $\cdots$ der bequemeren Bezeichnung f_{11}, f_{12}, f_{22} $\cdots$ bedienen, lautet die Gleichung (44) für die Schnittpunkte von g mit F:

$$f_{11} + 2\varkappa f_{12} + \varkappa^2 f_{22} = 0. \tag{49}$$

Um die beiden Punkte zu bestimmen, die die von h an F gelegten Tangentialebenen aus g ausschneiden, stelle man die Bedingung auf, daß eine durch die Punkte $(\varphi_i)(\psi_i)$, sowie einen Punkt $(\varrho_i + \lambda\sigma_i)$ auf g gelegte Ebene die Fläche F' berührt:

$$\begin{vmatrix} f_{33} & f_{34} & f_{13} + \lambda f_{23} \\ f_{34} & f_{44} & f_{14} + \lambda f_{24} \\ f_{13} + \lambda f_{23}, & f_{14} + \lambda f_{24}, & f_{11} + 2\lambda f_{12} + \lambda^2 f_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt nach λ:

$$\lambda^2\varphi_{11} - 2\lambda\varphi_{12} + \varphi_{22} = 0, \tag{50}$$

wo unter φ_{11}, φ_{12}, φ_{22} die Unterdeterminanten der Elemente f_{11}, f_{12}, f_{22} in der Determinante $|f_{ik}|$ zu verstehen sind.

Daher ergibt sich für die bilineare Invariante $J_g^{(h)}$ der Formen (49), (50):

$$2J_g^{(h)} = f_{11}\varphi_{11} + 2f_{12}\varphi_{12} + f_{22}\varphi_{22}. \tag{51}$$

Die beiden Diskriminanten von (44), (45) sind:

$$D_{12} = f_{12}^2 - f_{11} f_{22}, \quad \Delta_{12} = \varphi_{12}^2 - \varphi_{11}\varphi_{22}, \tag{52}$$

und da, nach dem in § 6 benutzten Determinantensatze:

$$\Delta_{12} = (f_{34}^2 - f_{33}f_{44})|f_{ik}|, \tag{53}$$

und die Determinante $|f_{ik}|$ nach § 5 (20) und (48) den Wert $A(P, Q)^2$ besitzt, so erhält man mit Rücksicht auf (45), (46) für das Produkt der Diskriminanten (52):

$$D_{12}\Delta_{12} = \beta_{p^2}\beta_{q^2} A \cdot (P, Q)^2. \tag{54}$$

Endlich läßt sich auch die Invariante $J_g^{(h)}$ (51) durch die Formen β_{p^2}, β_{q^2}, A, $(P, Q)^2$ und β_{pq} (47) ausdrücken; indem man die Glieder von $J_g^{(h)}$ geeignet zusammenfaßt, kommt:

$$2J_g^{(h)} = \beta_{p^2}\beta_{q^2} - (\beta_{pq})^2 + A \cdot (P, Q)^2. \tag{55}$$

Somit resultiert vermöge (54), (55), und auf Grund des bereits in § 6 (35) verwendeten Ausdrucks für das Doppelverhältnis zweier Paare, die folgende invariante Darstellung für das Doppelverhältnis der beiden Punktepaare auf der Geraden g:

$$D_g^{(h)} = \frac{\beta_{p^2}\beta_{q^2} - (\beta_{pq})^2 + A \cdot (P, Q)^2 + 2\sqrt{\beta_{p^2} \cdot \beta_{q^2} \cdot A \cdot (P, Q)^2}}{\beta_{p^2}\beta_{q^2} - (\beta_{pq})^2 + A \cdot (P, Q)^2 - 2\sqrt{\beta_{p^2} \cdot \beta_{q^2} \cdot A \cdot (P, Q)^2}}. \tag{56}$$

Das Vorzeichen der Quadratwurzel ist hier, wie geschehen, normiert, damit der Ausdruck (56) für $D_g^{(h)}$ unter der besonderen Voraussetzung $f_{ii} = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ genau in den Ausdruck § 5 übergeht, oder, was dasselbe ist, in den Ausdruck (6) des § 2, sobald man daselbst die a_{ik} durch die f_{ik} ersetzt. Dies tritt in der Tat ein, wie man mit Benutzung von (4) leicht verifiziert, indem sich der Faktor $2f_{12}f_{34}$ in Zähler und Nenner von (56) weghebt.

In der Symmetrie des Ausdrucks (56) hinsichtlich der Koordinaten p und q der Geraden g, h liegt ein neuer Beweis des Hauptsatzes (II).

Nunmehr erledigen wir noch die invariante Darstellung der quadratischen Gleichung, deren Wurzeln die beiden Doppelverhältnisse D_λ, D_μ sind, als deren Quotient $D_g^{(h)}$ in § 3 (15) auftrat.

Die gesuchte Darstellung soll erst für einen kanonischen Fall, in dem $f_{ii} = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ erbracht und dann auf den allgemeinen Fall übertragen werden.

Der Kürze halber werde das Produkt $D_{12}\Delta_{12}$ (54) mit D, der Ausdruck $J_g^{(h)}$ (55) mit J bezeichnet, dann schreibt sich (56), nach Hebung des Faktors 2, in der Gestalt:

$$D_g^{(h)} = D_g^{(k)} = \frac{J + \sqrt{D}}{J - \sqrt{D}} = \frac{D_\lambda}{D_\mu}. \tag{56}$$

Wie soeben bemerkt, hebt sich unter den Bedingungen $f_{ii} = 0$ in Zähler und Nenner von (56) der Faktor $f_{12}f_{34}$ weg, und (56) reduziert sich auf:

$$D_g^{(h)} = \frac{D_\lambda}{D_\mu} = \frac{J_1 + \sqrt{D_1}}{J_1 - \sqrt{D_1}}, \tag{57}$$

wo:

$$\begin{cases} J_1 = -f_{13}f_{24} - f_{14}f_{23} + f_{12}f_{34} \\ D_1 = \quad A(P, Q)^2. \end{cases} \tag{58}$$

Die Gleichung der Fläche F werde, wie in § 3 (11) in der kanonischen Gestalt zu Grunde gelegt:

$$F = 2(x_1x_4 - x_2x_3) = 0, \quad (A = 1), \tag{59}$$

oder:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 : \lambda : \mu : \lambda\mu. \tag{60}$$

Den beiden Schnittpunkten (r), (s) von g mit F mögen jetzt aber die Parameterwerte (λ_1, μ_1), (λ_2, μ_2) zugehören, und entsprechend den beiden Schnittpunkten (y), (z) von h mit F die Parameterwerte (λ_3, μ_3), (λ_4, μ_4).

Dann erhält man, wenn man wieder für die Polarenbildungen a_{rs}, a_{ry}, $a_{sy} \cdots$ die Zeichen f_{12}, f_{13}, $f_{23} \cdots$ verwendet:

$$\begin{aligned} f_{13}f_{24} &= (r_1y_4 + r_4y_1 - r_2y_3 - r_3y_2)(s_1z_4 + s_4z_1 - s_2z_3 - s_3z_2) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_2)(\mu_1 - \mu_3)(\mu_4 - \mu_2). \end{aligned}$$

Verfährt man analog mit den Produkten $f_{14}f_{23}$, $f_{12}f_{34}$, und setzt zur Abkürzung:

$$(\lambda_i - \lambda_k)(\lambda_l - \lambda_m) = \lambda_{iklm}, \ (\mu_i - \mu_k)(\mu_l - \mu_m) = \mu_{iklm}, \tag{61}$$

so kommt:

$$f_{13}f_{24} = \lambda_{1342}\mu_{1342}, \ f_{14}f_{23} = \lambda_{1432}\mu_{1432}, \ f_{12}f_{34} = \lambda_{1231}\mu_{1234}, \tag{62}$$

mithin:

$$J_1 = -\lambda_{1342}\mu_{1342} + \lambda_{1432}\mu_{1432} + \lambda_{1234}\mu_{1234}. \tag{63}$$

Nun war gemäß § 3 (15):[1])

$$D_\lambda = \frac{\lambda_{1342}}{\lambda_{1432}}, \quad D_\mu = \frac{\mu_{1342}}{\mu_{1432}}, \tag{64}$$

woraus sofort folgt:

$$1 - D_\lambda = \frac{\lambda_{1234}}{\lambda_{1432}}, \quad 1 - D_\mu = \frac{\mu_{1234}}{\mu_{1432}}. \tag{65}$$

Auf Grund der Formeln (58), (63), (64), (65) kommt:

$$-\frac{J_1}{f_{14}f_{23}} = 1 + D_\lambda D_\mu - (1 - D_\lambda)(1 - D_\mu) = D_\lambda + D_\mu, \tag{66}$$

somit, wegen (57):

$$-D_\lambda = \frac{J_1 + \sqrt{D_1}}{2f_{14}f_{23}}, \quad -D_\mu = \frac{J_1 - \sqrt{D_1}}{2f_{14}f_{23}}. \tag{67}$$

Um hier noch den Nenner durch Invarianten darzustellen, setze man für den Augenblick:

$$f_{14}f_{23} = l, \quad f_{13}f_{24} = m, \tag{68}$$

so hat man unmittelbar:

$$4lm = J_1^2 - D_1, \tag{69}$$

andererseits im Hinblick auf (47):

$$l - m = \beta_{pq}. \tag{70}$$

Die Relationen (69), (70) liefern für l, m die Werte:

$$l = \beta_{pq} - \sqrt{\beta_{pq}^2 + J_1^2 - D_1}, \quad m = -\beta_{pq} + \sqrt{\beta_{pq}^2 + J_1^2 - D_1}; \tag{71}$$

daß hier die Quadratwurzel mit dem richtigen Vorzeichen genommen ist, zeigt die wirkliche Einsetzung der speziellen Werte, die in unserem kanonischen Falle (59) die Bildungen β_{pq}, J_1, D_1 annehmen.

Substituiert man den Wert von $l = f_{14}f_{23}$ aus (71) in (67), so erkennt man, mit Rücksicht auf die Relation (69), daß die beiden Doppelverhältnisse D_λ, D_μ (67) die Wurzeln der Gleichung sind:

$$D_1^2(\beta_{pq} - \sqrt{\beta_{pq}^2 + J_1^2 - D_1}) - D_\lambda J_1 + (\beta_{pq} + \sqrt{\beta_{pq}^2 + J_1^2 - D_1}) = 0. \tag{72}$$

Von hier aus ist der Übergang zum allgemeinen Fallle (40) auf Grund der invarianten Natur der in (72) eingehenden Bildungen leicht zu vollziehen; es geht dann J_1 in J, D_1 in D, endlich β_{pq} in $\beta_{pq}\sqrt{\beta_p^2\beta_q^2}$

1) Die gegenwärtige Bezeichnung der Indices geht aus der des § 3 hervor, indem sich 1 und 2, 3 und 4 gegenseitig vertauschen; hierbei ändern aber die Doppelverhältnisse D_λ, D_μ ihre Werte nicht.

über, und die gesuchte Gleichung für die beiden Doppelverhältnisse D_λ, D_μ der vier Geraden λ resp. μ, die den Schnittpunkten der Geraden g, h mit F zugehören, wird:

$$(73)\qquad D_\lambda^2\{\sqrt{\beta_p^2\beta_q^2}\,\beta_{pq} - \sqrt{\beta_p^2\beta_q^2\beta_{pq}^2 + J^2 - D}\} - D_\lambda J + \sqrt{\beta_p^2\beta_q^2}\,\beta_{pq} + \sqrt{\beta_p^2\beta_q^2\beta_{pq}^2 + J^2 - D} = 0,$$

wo gemäß (54), (55) J und D die Werte besitzen:

$$(54)\qquad D = \beta_{p^2}\beta_{q^2}A(P, Q)^2,$$

$$(55)\qquad 2J = \beta_{p^2}\beta_{q^2} - \beta_{pq}^2 + A(P, Q)^2.$$

Hier ist A die Diskriminante von F (40) und β_{p^2}, β_{q^2}, β_{pq}, (P, Q) sind die simultanen Invarianten (42), (43), (48) von F, g, h.

§ 8.

Zum Schlusse möge der in § 4 hervorgetretene Zusammenhang zwischen den Involutionen im Raume und den Involutionen auf einer Fläche 2. Ordnung genauer untersucht werden. Vermöge einer reellen Kollineation K_3 des Raumes sollen sich die Punkte je einer von zwei windschiefen[1]) Geraden involutorisch entsprechen. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Geraden *reell* oder *konjugiert komplex* sind.

Im *ersten* Falle wähle man die beiden Geraden zu Gegenkanten des Koordinatentetraeders $A_1A_2A_3A_4$, etwa $(x_1 = 0, x_3 = 0)$, und $(x_2 = 0, x_4 = 0)$, und es sei (A_1, A_3), (A_2, A_4) je ein Paar der zugehörigen Involution. Dann läßt sich die Kollineation K_3 in der Form darstellen:

$$(74^a)\qquad (K_3)\quad y_1 : y_3 : y_2 : y_4 = e_{13}x_3 : e_{31}x_1 : e_{24}x_4 : e_{42}x_2.$$

Die K_3 wird ersichtlich dann und nur dann zu einer Involution J_3, wenn:

$$(75^a)\qquad e_{13}e_{31} = e_{24}e_{42}.$$

Die J_3 soll eine eigentliche d. i. eindeutig umkehrbare sein, dann kann man ihr die Form geben:

$$(76^a)\qquad (J_3)\quad y_1 : y_3 : y_2 : y_4 = x_3 : \lambda\mu x_1 : \lambda x_4 : \mu x_2,$$

wo λ, μ zwei endliche, von Null verschiedene Parameter bedeuten. Ist (x_i), (y_i) irgend ein Punktepaar der J_3 (76^a), so gilt:

$$(77)\qquad y_1y_3x_2x_4 - y_2y_4x_1x_3 = 0,$$

1) S. die folgende Anm. Bezüglich der einleitenden Sätze dieses Paragraphen vergleiche man die entsprechenden synthetischen Entwickelungen in Reyes Geometrie der Lage.

d. h. beide Punkte liegen auf einer Fläche des Büschels:

$$x_1 x_3 - \varkappa x_2 x_4 = 0, \tag{78}$$

also des Büschels, das die Geraden $\overline{A_1 A_2}$, $\overline{A_1 A_4}$, $\overline{A_2 A_3}$, $\overline{A_2 A_4}$ enthält.

Umgekehrt, ist (x_i) irgend ein Punkt einer — einem festen Werte von $\varkappa$ entsprechenden — Fläche (78), so gehört ihr auch der durch J_3 zugeordnete Punkt (y_i) an.

Die sich selbst entsprechenden Punkte oder „Einheitspunkte" der J_3 (76a) bestimmen sich aus:

$$x_1 : x_3 : x_2 : x_4 = x_3 : \lambda\mu x_1 : \lambda x_4 : \mu x_2, \tag{79a}$$

also aus:

$$x_3^2 - x_1^2 \lambda\mu = 0, \qquad x_2^2 \mu - x_4^2 \lambda = 0. \tag{80a}$$

Die Einheitspunkte der J_3 erfüllen also die beiden (windschiefen) Geraden („Einheitsgeraden") e, e':

$$(81a) \qquad (e) \begin{cases} x_3 - x_1\sqrt{\lambda\mu} = 0 \\ x_2 - x_4\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} = 0 \end{cases}; \qquad (e') \begin{cases} x_3 + x_1\sqrt{\lambda\mu} = 0 \\ x_2 + x_4\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} = 0 \end{cases},$$

wo die Quadratwurzeln positiv zu nehmen sind.

Die beiden Einheitsgeraden sind reell oder konjugiert komplex, jenachdem λ, μ gleichnamig oder ungleichnamig sind. Um den einem Punkte P vermöge der J_3 (76a) zugeordneten Punkt Q zu erhalten, hat man nur durch P die Gerade g zu legen, die e, e' trifft und den zu den Treffpunkten vierten harmonischen Punkt Q zu konstruieren.

Umgekehrt ist eine Kollineation K_3, die zwei (windschiefe) Einheitsgerade e, e' besitzt, zunächst noch keine J_3. Denn nimmt man e, e' erstens reell an und wählt sie als Koordinatenkanten ($x_1 = 0$, $x_3 = 0$), ($x_2 = 0$, $x_4 = 0$), so ist die K_3 dargestellt in der Form:

$$y_1 : y_3 : y_2 : y_4 = x_1 : x_3 : \omega x_2 : \omega x_4,$$

d. h. auf jeder Geraden, die e, e' trifft, sind die Punkte durch eine Projektivität verbunden, die nur für $\omega = -1$ eine Involution wird (für $\omega = 1$ würde die Identität resultieren). Somit gestattet die J_3 mit den reellen Einheitsgeraden e, e' die kanonische Darstellung:

$$y_1 : y_3 : y_2 : y_4 = x_1 : x_3 : -x_2 : -x_4. \tag{76a'} \ (J_3')$$

Sind aber e, e' konjugiert komplex, so kann man das Koordinatentetraeder so legen, daß sich in e die Ebenen $x_1 + ix_3 = 0$, $x_2 + ix_4 = 0$

schneiden. Im übrigen gilt dieselbe Betrachtung wie im ersten Falle, und die J_3 gestattet die kanonische Darstellung:

(76b′) (J_3) $$y_1 + iy_3 : y_2 + iy_4 : y_1 - iy_3 : y_2 - iy_4 = x_1 + ix_3 : x_2 + ix_4 : -(x_1 - ix_3) : -(x_2 - ix_4),$$

oder kürzer, indem ein horizontaler Strich zur Bezeichnung einer konjugiert komplexen Größe dient:

(76b′) (J_3) $$y_{13} : y_{24} : \bar{y}_{13} : \bar{y}_{24} = x_{13} : x_{24} : -\bar{x}_{13} : -\bar{x}_{24}.$$

Nunmehr gehen wir zum zweiten Hauptfall über, wo eine K_3 auf zwei konjugiert komplexen Geraden je eine Involution besitzt. Seien (B_{13}, B_{24}), $(\bar{B}_{13}, \bar{B}_{24})$ zwei involutorische Punktepaare der K_3, so mache man die reellen Geraden $(B_{13}, \bar{B}_{13})$, $(B_{24}, \bar{B}_{24})$ zu den Koordinatenkanten $(x_2 = 0,\ x_4 = 0)$, $(x_1 = 0,\ x_3 = 0)$ und lasse jene Punkte auf ihnen durch die Ebenen $x_1 \pm ix_3 = 0$, $x_2 \pm ix_4 = 0$ ausschneiden. Dann gilt für die K_3 die Darstellung:

(74b) (K_3) $$y_1 + iy_3 : y_2 + iy_4 : y_1 - iy_3 : y_2 - iy_4 =$$
$$(\alpha + i\beta)(x_2 + ix_4) : (\gamma + i\delta)(x_1 + ix_3) : (\alpha - i\beta)(x_2 - ix_4) : (\gamma - i\delta)(x_1 - ix_3),$$

wo die α, β, γ, δ reelle Parameter sind, oder kürzer:

(74b) (K_3) $$y_{13} : y_{24} : \bar{y}_{13} : \bar{y}_{24} = ax_{24} : cx_{13} : \bar{a}\bar{x}_{24} : \bar{c}\bar{x}_{13}.$$

Die Bedingung, daß die K_3 zu einer Involution J_3 wird, lautet:

(75b) $$ac = \bar{a}\bar{c} = \text{reell}, \text{ oder } \alpha\delta + \beta\gamma = 0,$$

während die reelle Darstellung der J_3 wird:

(76b) (J_3)
$$y_1 : y_3 : y_2 : y_4 = \alpha x_2 - \beta x_4 : \beta x_2 + \alpha x_4 : \sigma(\alpha x_1 + \beta x_3) : \sigma(-\beta x_1 + \alpha x_3),$$

wo α, β, σ reelle Parameter sind.

Die Einheitspunkte der J_3 bestimmen sich jetzt aus:

(79b) $$x_{13} : x_{24} : \bar{x}_{13} : \bar{x}_{24} = ax_{24} : cx_{13} : \bar{a}\bar{x}_{24} : \bar{c}\bar{x}_{13},$$

also aus:

(80b) $$\left(\frac{x_{13}}{x_{24}}\right)^2 = \frac{a}{c}.$$

Indem man in bekannter Weise die Quadratwurzel aus der komplexen Größe $\frac{a}{c}$ zieht, findet man als Gleichungen der beiden Einheitsgeraden e, e':

(81b) $$\left.\begin{aligned} \pm x_1\sqrt{\sigma(\alpha^2 + \beta^2)} &= x_2\alpha - x_4\beta \\ \pm x_3\sqrt{\sigma(\alpha^2 + \beta^2)} &= x_2\beta + x_4\alpha \end{aligned}\right\},$$

wo entweder die oberen oder die unteren Vorzeichen gelten. Die Einheitsgeraden sind reell oder konjugiert komplex, jenachdem die reelle Größe $\sigma = \frac{c}{a}$ positiv oder negativ ist. Damit kommt man aber zu den beiden obigen, durch (76a′) und (76b′) kanonisch dargestellten Fällen von J_3 zurück.[1])

Nunmehr fragen wir nach allen Flächen 2. Ordnung, die vermöge einer J_3 (76a′ resp. 76b′) mit zwei windschiefen Einheitsgeraden e, e' in sich übergehen. Im ersten Falle sind das ersichtlich die beiden ∞^5- resp. ∞^3-Scharen:

$$(A)\quad F \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{33}x_3^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{24}x_2x_4 + a_{44}x_4^2 = 0,$$

$$(B)\quad G \equiv a_{12}x_1x_2 + a_{14}x_1x_4 + a_{23}x_2x_3 + a_{24}x_2x_4 = 0.$$

Die Schnittpunkte einer Fläche F (A) mit e, e' bestimmen sich aus:

$$(82)\quad a_{22}x_2^2 + 2a_{24}x_2x_4 + a_{44}x_4^2 = 0,$$

$$(83)\quad a_{11}x_1^2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Nennt man die Punkte (82) α, β und die Punkte (83) γ, δ, so wird die Bedingung des Konjugiertseins zweier Punkte bez. F offenbar durch die vier Paare (α, γ), (α, δ), (β, γ), (β, δ) erfüllt, d. h. die vier Verbindungsgeraden dieser Paare gehören der F an. Umgekehrt, markiert man auf e, e' je ein beliebiges Punktepaar, das durch (82) resp. (83) bestimmt sei, so geht durch diese vier Punkte noch ein Büschel von Flächen F (A), die vermöge der J_3 in sich übergehen:

$$(84)\quad (a_{11}x_1^2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{33}x_3^2) + \nu(a_{22}x_2^2 + 2a_{24}x_2x_4 + a_{44}x_4^2) = 0.$$

---

1) Außer den beiden Fällen der J_3 des Textes ist nur noch, wenn man sich auf eigentliche J_3 beschränkt, die Möglichkeit zu berücksichtigen, daß die geraden Träger je zweier Punktepaare der J_3 sich treffen. Dann ist leicht zu zeigen, daß die J_3 eine „Perpektivität“ ist, d. h. einen Einheitspunkt E und eine (nicht durch E gehende) „Einheitsebene“ E besitzt. Diese J_3 nebst der des Textes führen durch metrische Spezialisierung zu den „Spiegelungen“ des Raumes. In der Tat, läßt man im Falle des Textes die eine der beiden Einheitsgeraden, etwa e', ins Unendliche rücken, während der unendlich ferne Punkt der anderen der Pol von e' bezüglich des Kugelkreises wird, so entsteht die Spiegelung an einer Geraden e. Macht man im Falle der Perspektivität einmal die Einheitsebene E zur unendlich fernen Ebene, so hat man die Spiegelung an einem Punkte E, läßt man dagegen den Einheitspunkt E ins Unendliche rücken und zwar so, daß er der Pol der Einheitsebene E bez. des Kugelkreises wird, so tritt die Spiegelung an einer Ebene E ein. Die Spiegelungen im Raume repräsentieren also gerade die beiden Arten von eigentlichen Rauminvolutionen.

Man wähle wiederum die Punkte α, β, γ, δ als Koordinatenecken A_1, A_3, A_2, A_4, so nimmt die Gleichung irgend einer F des Büschels (84) die kanonische Gestalt an:

$$(84') \qquad \left.\begin{matrix} x_1 x_3 - \nu x_2 x_3 = 0, \\ x_1 : x_3 : x_2 : x_4 = 1 : \nu lm : l : m \end{matrix}\right\},$$

wo $l = \text{const}$, $m = \text{const}$ die beiden Geradenscharen auf F repräsentieren. Der Punkt (x_i) auf der F (84') geht vermöge der J_3 (76a') über in den Punkt (y_i):

$$(85) \qquad y_1 : y_3 : y_2 : y_4 = 1 : \nu l' m' : l' : m' = 1 : \nu lm : -l : -m,$$

d. h. die beiden Geradenscharen auf F erleiden die binären Involutionen J_1, J_1':

$$(86) \qquad (J_1)\ l + l' = 0, \quad (J_1')\ m + m' = 0,$$

womit eine ternäre Involution J_2 auf F festgelegt ist.

Umgekehrt läßt sich jede ternäre Involution J_2 auf einer eigentlichen Fläche 2. Ordnung, d. i. jedes Paar binärer Involutionen J_1, J_1' der Geraden $l = \text{const}$, $m = \text{const}$, auf die kanonische Form (86) bringen, und die Fläche spielt die Rolle einer Fläche F (A). Auf der anderen Seite besteht die Schar von Flächen G (B) gerade aus den ∞^3 Flächen 2. Ordnung, die die beiden Einheitsgeraden e, e' der J_3 enthalten. Diese sind dann auf G zwei Erzeugende derselben Schar, etwa $\lambda = \text{const}$. Dann geht jede Gerade $\mu = \text{const}$ der anderen Schar vermöge der J_3 (76a') als Ganzes in sich über, während ihre Punkte involutorisch gepaart sind, d. h. die beiden Parameter λ, μ erleiden vermöge der J_3 Substitutionen:

$$(87) \qquad \alpha\lambda\lambda' + \beta(\lambda + \lambda') + \gamma = 0, \quad \mu' = \mu,$$

und umgekehrt, wenn der eine der beiden Parameter λ, μ auf einer eigentlichen Fläche 2. Ordnung eine binäre Involution erfährt, der andere die identische Substitution, so liegt eine ternäre Involution J_2 auf der Fläche vor, die ihrerseits eine J_3 bestimmt, und die Fläche spielt die Rolle einer Fläche G (B).

Für den zweiten Hauptfall (76b') der Involutionen J_3 bleiben die Betrachtungen dieselben, man hat nur in (A), (B) die Variabeln x_1, x_3, x_2, x_4 zu ersetzen durch resp. x_{13}, x_{24}, $\bar{x}_{13}$, $\bar{x}_{24}$, und die Koeffizienten reeller Variabelnprodukte reell, konjugiert komplexer aber konjugiert komplex anzunehmen.

Damit wird die Einordnung der beiden Involutionen J_3 des § 4 in das Obige deutlich, die dortige Fläche 2. Ordnung spielt die Rolle

einer Fläche F (A). Jenachdem die beiden Geraden g, h reell oder aber konjugiert komplex sind, haben wir die beiden Hauptfälle von reellen J_3 vor uns, von denen wir in diesem § ausgingen. Ist nur das eine Schnittpunktepaar reell, das andere nicht, so ist auch die J_3 nicht reell und bietet kein sonderliches Interesse dar.

Es erübrige noch, den Beweis des § 4 auch analytisch zu führen, um so auch den Fall mit zu umfassen, wo die Diskriminante der Fläche verschwindet.

Es soll also eine Kollineation K_3 so bestimmt werden, daß sie eine Fläche 2. Ordnung F:

$$F(x) \equiv \Sigma\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0 \tag{88a}$$

in sich überführt und zugleich zwei windschiefe Gerade g, h — die die F nicht berühren sollen — miteinander vertauscht. Im ersten Hauptfalle, daß g und h die F in reellen Punkten treffen, wähle man letztere als Koordinatenecken A_3, A_4; A_1, A_2, sodaß in (88) die a_{ii} verschwinden.

Dann müssen sich (vgl. § 4) vermöge der K_3 entweder A_1 und A_3 und zugleich A_2 und A_4 gegenseitig entsprechen, oder aber A_1 und A_4, A_2 und A_3. Wählen wir etwa den ersteren Fall, so nimmt die Darstellung der K_3 die Form an:

$$(K_3) \qquad y_1 : y_3 : y_2 : y_4 = e_{13} x_3 : e_{31} x_1 : e_{24} x_4 : e_{42} x_2. \tag{89a}$$

Soll dann $F(y)$ mit $F(x)$ proportional werden, so folgt zunächst:

$$e_{13} e_{31} = e_{24} e_{42}, \tag{90a}$$

d. h. gemäß (75a) kann die K_3 nur eine J_3 sein.

Die Vergleichung der weiteren Koeffizienten von $F(y)$ und $F(x)$ liefert sodann die e_{ik}, und die fragliche J_3 ist die folgende:

$$(J_3) \quad y_1 : y_3 : y_2 : y_4 = x_3 a_{32} a_{34} : x_1 a_{12} a_{14} : x_4 a_{41} a_{43} : x_2 a_{21} a_{23}. \tag{91a}$$

In der Tat wird auf Grund von (91a):

$$F(y) \equiv a_{12} a_{34} \cdot a_{14} a_{32} F(x). \tag{92a}$$

Entsprechend erhält man bei der zweiten Art der Zuordnung der Punkte A:

$$y_1 : y_4 : y_2 : y_3 = x_4 a_{42} a_{43} : x_1 a_{12} a_{13} : x_3 a_{31} a_{34} : x_2 a_{21} a_{24}, \tag{91a'}$$

$$F(y) \equiv a_{12} a_{34} \cdot a_{13} a_{24} F(x). \tag{92a'}$$

Soll die J_3 eine eigentliche sein, müssen im ersten Falle (91a) alle a_{ik} excl. a_{13}, a_{24} von Null verschieden sein, d. h. die Fläche F

darf von den sechs Geraden $\overline{A}_i\overline{A}_k$ höchstens $\overline{A}_1\overline{A}_3$ und $\overline{A}_2\overline{A}_4$ enthalten und analog im zweiten Falle (91a').

Im zweiten Hauptfalle, wo die reellen Geraden g, h die Fläche in zwei je konjugiert komplexen Punkten B_{24}, $\overline{B}_{24}$; B_{13}, $\overline{B}_{13}$ treffen, wähle man jene Geraden, wie oben bei (74b), als Koordinatenkanten ($x_1 = 0$, $x_3 = 0$), ($x_2 = 0$, $x_4 = 0$), und lasse auf ihnen jene Punkte durch die Ebenen $x_2 \pm ix_4 = 0$, $x_1 \pm ix_3 = 0$ ausgeschnitten sein. Es mögen sich in der K_3 die Punkte B_{13} und B_{24}, andererseits $\overline{B}_{13}$ und $\overline{B}_{24}$ gegenseitig entsprechen, so gilt für die K_3 die Darstellung:

(89b) (K_3) $\quad y_1 + iy_3 : y_2 + iy_4 : y_1 - iy_3 : y_2 - iy_4 =$

$(\alpha + i\beta)(x_2 + ix_4) : (\gamma + i\delta)(x_1 + ix_3) : (\alpha - i\beta)(x_2 - ix_4) : (\gamma - i\delta)(x_1 - ix_3),$

wo die α, β, γ, δ reelle Parameter seien, oder wieder abgekürzt:

(89b) (J_3) $\quad y_{13} : y_{24} : \overline{y}_{13} : \overline{y}_{24} = ax_{24} : cx_{13} : \overline{a}\overline{x}_{24} : \overline{c}\overline{x}_{13}.$

Die Gleichung einer Fläche F_2 durch die vier Punkte B_{13}, $\overline{B}_{13}$, B_{24}, $\overline{B}_{24}$ läßt sich in die Form setzen:

(88b) $$F(x) \equiv b_1 x_{13}\bar{x}_{13} + b_2 x_{24}\bar{x}_{24} + l x_{12}x_{34} + \bar{l}\,\bar{x}_{12}\bar{x}_{34} + r x_{12}\bar{x}_{34} + \bar{r}\,\bar{x}_{12}x_{34} = 0,$$

wo die b_1, b_2 reelle, die l, $\bar{l}$, r, $\bar{r}$ komplexe Koeffizienten sind. Soll vermöge der K_3 (89b) $F(y)$ proportional mit $F(x)$ werden, $F(y) \equiv \tau F(x)$, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß:

(93) $a\bar{a}b_1 = \tau b_2$, $c\bar{c}b_2 = \tau b_1$; $lac = \tau l$, $\overline{lac} = \tau\bar{l}$; $ra\bar{c} = \tau\bar{r}$, $\bar{r}\bar{a}c = \tau r$.

Die beiden mittleren Bedingungen liefern sofort:

(90b) $$ac = \overline{ac} = \tau = \text{reell},$$

mithin ist $\alpha\delta + \beta\gamma = 0$ und die K_3 mit Rücksicht auf (75b) eine Involution J_3 (76b).

Vermöge (90b) reduzieren sich die vier noch übrigen Bedingungen (93) auf:

$$ab_1 = \bar{c}b_2,\ r\bar{c} = c\bar{r},$$

die ergeben:

(94) $$a = b_2\bar{r},\ c = b_1 r;\ ac = b_1 b_2 r\bar{r}.$$

Mithin bestimmt sich die J_3 (89b) zu:

(91b) (J_3) $\quad y_{13} : y_{24} : \overline{y}_{13} : \overline{y}_{24} = b_2\bar{r}x_{24} : b_1 r x_{13} : b_2 r\bar{x}_{24} : b_1\bar{r}x_{24},$

und diese zieht die Identität:

(92b) $$F(y) \equiv b_1 b_2 r\bar{r} F(x)$$

nach sich. Genau das Entsprechende gilt für die zweite Zuordnungsmöglichkeit, wenn sich B_{13} und $\overline{B}_{24}$, $\overline{B}_{13}$ und B_{24} entsprechen sollen. Wie im ersten Hauptfalle darf bei eigentlicher J_3 die Fläche F von den Kanten des Tetraeders der Punkte B höchstens je die beiden Geraden enthalten, die zugeordnete Punkte verbinden.

Im dritten Hauptfalle endlich begegnen die konjugiert komplexen Geraden g, h der Fläche F in Punkten B_{13}, $\overline{B}_{24}$ und $\overline{B}_{13}$, B_{24}, deren Koordinaten wir, wie soeben festlegen. Entsprechen sich in der K_3 gegenseitig B_{13} und B_{24}, $\overline{B}_{13}$ und $\overline{B}_{24}$, so haben wir offenbar den zweiten Hauptfall vor uns, da sich dann auch die reellen Geraden $(B_{13}, \overline{B}_{13})$, $(B_{24}, \overline{B}_{24})$ vertauschen. Sind aber B_{13} und $\overline{B}_{13}$, B_{24} und $\overline{B}_{24}$ zugeordnete Punktepaare, so ist das eingeschlagene Verfahren dem des zweiten Hauptfalles nachzubilden.

Die Gleichung der Fläche F hat genau wieder die Gestalt (88b), während die der Kollineation K_3 jetzt lautet:

$$(89c)\ (K_3) \qquad y_{13} : \overline{y}_{13} : y_{24} : \overline{y}_{24} = a\overline{x}_{13} : \overline{a}x_{13} : c\overline{x}_{24} : \overline{c}x_{24},$$

wo wiederum a, c komplexe Parameter sind.

Die Forderung $F(y) \equiv \tau F(x)$ liefert die Bedingungen:

$$(93')\ b_1 a\overline{a} = \tau b_1,\ b_2 c\overline{c} = \tau b_2;\ lac = \tau\overline{l},\ \overline{lac} = \tau l;\ ra\overline{c} = \tau\overline{r},\ \overline{ra}c = \tau r,$$

von denen die beiden ersten ergeben:

$$(90c) \qquad a\overline{a} = c\overline{c} = \tau = \text{reell},$$

wodurch die K_3 (89c) ersichtlich zu einer Involution J_3 wird.

Die vier übrigen Bedingungen von (93') reduzieren sich auf:

$$(94') \qquad a = \overline{lr},\ c = \overline{l}r;\ \tau = l\overline{l}r\overline{r},$$

sodaß die J_3 übergeht in:

$$(91c)\ (J_3) \qquad y_{13} : \overline{y}_{13} : y_{24} : \overline{y}_{24} = lr\overline{x}_{13} : lrx_{13} : \overline{l}r\overline{x}_{24} : l\overline{r}x_{24},$$

die die gewünschte Identität:

$$F(y) \equiv l\overline{l}r\overline{r}F(x)$$

zur Folge hat. Die Fläche darf ev. die Geraden $(B_{13}, \overline{B}_{13})$, $(B_{24}, \overline{B}_{24})$ enthalten.

In allen drei Hauptfällen bleibt aber der Beweis giltig, wenn auch die Diskriminante der Fläche F verschwindet, d. i. wenn die Fläche in einen Kegel 2. Ordnung ausartet, und das Entsprechende besteht für die dualistische Erscheinung.

Wählt man daher im besondern die Fläche 2. Klasse F als den Kugelkreis, so werden die in Rede stehenden J_3 spezielle Bewegungen,