Werk

Titel: Siebenter Abschnitt. Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf Statistik.

Jahr: 1899

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?37721857X_0007|log44

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Siebenter Abschnitt.

Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf Statistik.

70. Aus dem Geschehen, in welchem sich das gesamte physische und psychische Leben einer grofsen menschlichen Gemeinschaft äufsert, lassen sich vielfach Vorgänge auslösen, welche bei näherer Betrachtung Merkmale aufweisen, durch die sich diejenigen Ereignisse kennzeichnen, welche man als zufällig erklärt und zum Gegenstande der Wahrscheinlichkeitstheorie gemacht hat: es ist ein Complex permanenter Bedingungen oder Umstände bemerkbar, die auf den Verlauf der Vorgänge Einflufs nehmen; ihm stehen fluctuirende Umstände gegenüber, welche, in ihren Wirkungen unübersehbar, Regellosigkeit in dem Verlauf der einzelnen Fälle zur Folge haben; die Erscheinung als Ganzes, als Massenerscheinung, aufgefafst bietet in ihren quantitativen Verhältnissen ein Bild dar, das in seinen Hauptumrissen zu verschiedenen Zeiten und in verschiedenen Gemeinschaften dasselbe bleibt. Diese Analogie hat vielfach dazu verleitet, ohne weitere Prüfung vollständige Übereinstimmung anzunehmen, den Verlauf einer Massenerscheinung mit dem Resultate wiederholter Ziehungen aus einer Urne mit beständig gleichbleibendem Inhalt zu vergleichen und alle Consequenzen zu ziehen, welche sich hieraus ergeben. Dies bedeutet soviel als, dafs man den Complex permanenter Umstände als constant in seinen Wirkungen, ferner völlige Unabhängigkeit der in zeitlicher Folge in die Erscheinung tretenden Fälle voraussetzte; die Massenerscheinung war dann quantitativ durch eine gewisse Wahrscheinlichkeit gekennzeichnet, für welche die statistische Erhebung einen empirischen Wert zu bestimmen gestattete.

Fassen wir, um ein Beispiel zu geben, das Sterben in einer grofsen, geschlossenen, zu Beginn eines Jahres gezählten menschlichen Gemeinschaft im Laufe desselben Jahres ins Auge! Dem Vorgange liegen unzweifelhaft erkennbare permanente Umstände zugrunde, als: die menschliche Constitution, die allgemeinen wirtschaftlichen und klimatischen Verhältnisse, Ernährung, Beschäftigung u. a.; daneben aber giebt es Einflüsse, welchen Gesundheit und Leben der Einzelnen in sehr verschiedener Weise ausgesetzt sind und welche eine vorgängige Aussage bezüglich des Verhaltens des einzelnen Individuums unmöglich oder doch unsicher machen; der Quotient aus der beobachteten Zahl der Sterbefälle und der Zahl, welche die Gröfse der Gemeinschaft zu Beginn des Jahres ausdrückt, nimmt aber, wenn man ihn in mehreren aufeinanderfolgenden Jahren bestimmt, wenig von einander abweichende Werte an. Man hat in diesem Quotienten, der Sterblichkeitsziffer, einen Ausdruck für die allgemeine Sterblichkeit erblickt und ihn als eine empirische

Bestimmung der allgemeinen Sterbenswahrscheinlichkeit während eines (Kalender-)Jahres gedeutet. Hier aber sind nicht einmal die formalen Voraussetzungen erfüllt, damit der Bruch eine Wahrscheinlichkeit vorstellen könne: die Verstorbenen bilden nicht einen Teil der am Anfange des Jahres Gezählten; denn es befinden sich unter ihnen auch solche, die erst im Laufe des Jahres geboren worden und während des Jahres auch gestorben sind. Auch die Unabhängigkeit des Erscheinungsablaufs in zwei aufeinanderfolgenden Jahren ist nicht vorhanden; der Verlauf im zweiten Jahre ist vielmehr durch die Veränderungen, welche das erste Jahr vollbracht hat, mitbestimmt.

Ähnliche Bemerkungen sind über den Quotienten zu machen, welchen man erhält, wenn man an die Stelle der Anzahl der Sterbefälle die Anzahl der Geburten setzt, welche sich in der erwähnten Gemeinschaft während des Jahres zugetragen haben, über die sogenannte Geburtsziffer.*) Auch diese Ziffer, welche in der Statistik als Mafs der allgemeinen Fortpflanzungsintensität verwendet wurde und noch heute geführt wird, läfst die Deutung als allgemeine Wahrscheinlichkeit des Gebärens im Laufe eines (Kalender-)Jahres nicht zu, und zwar schon aus rein formalen Gründen; denn die Geburten können nur aus einem Teile der zu Beginn des Jahres gezählten Gemeinschaft, nur aus weiblichen Individuen zwischen gewissen Altersgrenzen hervorgehen, und diese Grenzen sind noch dazu nicht scharf bestimmbar. Die Unabhängigkeit der Massenerscheinung in zwei aufeinanderfolgenden Jahren ist nicht vorhanden; denn der Verlauf der Geburten im ersten Jahre beeinflufst die Gebärmöglichkeit im zweiten.

Diese beiden Beispiele charakterisiren das Verfahren der älteren Statistik. Es wurden Gröfsen zu einander in Beziehung gesetzt, die vielfach eines natürlichen Zusammenhanges entbehrten, und über den Zustand und die Veränderungen einer Bevölkerung wurden, wie noch später (Art. 76) erwähnt werden soll, Voraussetzungen gemacht, die sich durch nichts begründen liefsen und durch die spätere Forschung auch als unzulässig erwiesen worden sind. Man kann sagen, die ältere Statistik war mehr eine der Phantasie sich hingebende Lust am Combiniren statistischer Zahlen als eine durch wissenschaftliche Kritik geleitete Forschung mit klar umschriebenen Zielen. Trotz

*) Laplace[18]) (p. 391—394) behandelt die Geburtsziffer als die empirische Bestimmung einer festen abstracten Wahrscheinlichkeit und vergleicht das Auftreten der Geburtsfälle während eines Jahres den Ziehungen weifser Kugeln aus einer Urne mit weifsen und schwarzen Kugeln in constant bleibendem Mengenverhältnis. Er gründet auf jene Ziffer einen Vorschlag zur Ermittlung der Bevölkerung eines grofsen Staates ohne directe Zählung, welchen Vorschlag er bis zu einem gewissen Punkte auch praktisch durchgeführt hat. Die bezüglichen Untersuchungen stammen aus viel früherer Zeit und sind zum ersten Male in dem unter [9]) angeführten Mémoire veröffentlicht worden.

der mangelhaften Methode hat sie eine Reihe allgemeiner Züge im Bevölkerungswechsel*) erkannt und festgestellt; als zusammenfassende Darstellung dieser älteren Resultate in der deutschen Litteratur kann das Werk von Süfsmilch[1]) betrachtet werden, während am Beginn der neueren Richtung das mit dem ersteren noch manche Ähnlichkeit aufweisende Buch Moser's[1]) steht.**)

71. Unter den Vorgängen, welche die Structur und den Umfang einer geschlossenen menschlichen Gemeinschaft abändern, ist es das Sterben, welchem seit langem die Aufmerksamkeit sich zugewendet hat, zunächst vornehmlich aus praktischen Motiven. Das Problem der Sterblichkeitsmessung hat in Ansehung seines Zieles frühzeitig eine bestimmte Form angenommen, die auf Halley[1]) zurückführt: man erblickt dieses Ziel in der Gewinnung einer Absterbeordnung***), durch welche die successive Abminderung einer Grundmasse von Gebornen auf den einzelnen, einjährigen Altersstufen zur Darstellung gebracht wird. Die directe Lösung dieser Aufgabe, bestehend in der unmittelbaren Beobachtung einer wirklichen Grundmasse von Gebornen, etwa derjenigen, welche aus einer grofsen Bevölkerung während eines Kalenderjahres hervorgeht und die man in der Statistik gewöhnlich als Generation bezeichnet, und in der Zählung der Individuen, welche das 1., 2., ··· Lebensjahr vollendet haben, erweist sich aus verschiedenen Gründen als unausführbar; sie allein würde das liefern, was man sich unter der Absterbeordnung einer Generation vorstellt. Die Bestrebungen mufsten daher auf die Auffindung indirecter Methoden gerichtet sein, wenn dabei auch die innere Bedeutung der Absterbeordnung eine Modification erleiden mufste. Mafsgebend war das Material, dessen man sich für den gedachten Zweck bediente: entweder waren es die statistischen Aufzeichnungen über eine mehr oder weniger ausgedehnte Bevölkerung, oder die Erfahrungen über eine geschlossene †) Gesellschaft ausgewählter Personen, wie die Versicherungsinstitute solche darzubieten vermögen.

---

*) Das Wort in der erweiterten Bedeutung genommen, welche ihm Lexis[1]) gegeben hat, wonach sich das Gebiet des Bevölkerungswechsels über alle statistisch bedeutsamen Veränderungen menschlicher Gemeinschaften erstreckt; während Knapp[2]), von welchem dieser Terminus herrührt, nur die Veränderungen durch Geburt und Tod vor Augen hatte.

**) Eine geschichtliche Darstellung des Entwicklungsganges der Bevölkerungslehre, mit vornehmlicher Rücksicht auf Sterblichkeit und die mit ihr zusammenhängenden Fragen, hat Knapp[2]) gegeben.

***) Mayr[1]) unterscheidet zwischen einer Sterbe- oder Mortalitätstafel, welche die in den successiven einjährigen Altersintervallen Gestorbenen verzeichnet, und einer Lebe- oder Vitalitätstafel, welche die Überlebenden auf den successiven einjährigen Altersstufen angiebt. Die letztere Form ist die gebräuchliche und führt die Namen Absterbeordnung, Decrementen- oder Sterblichkeitstafel.

†) Die etwa erfolgenden Ein- und Austritte werden mit verzeichnet.

Während bei der directen Methode die Zahlen der die einzelnen Altersstufen Überlebenden das Primäre und die aus diesen Zahlen ableitbaren empirischen Werte der Lebens- und Sterbenswahrscheinlichkeit das Secundäre sind, findet bei der indirecten Methode das umgekehrte statt: hier besteht das Grundproblem der Sterblichkeitsmessung in der Bestimmung der Lebens- oder Sterblichkeitswahrscheinlichkeit für die einzelnen Altersstufen, respective Altersintervalle; aus diesen Wahrscheinlichkeitsbrüchen wird dann mit Hilfe der Lehren der Wahrscheinlichkeitstheorie die Absterbeordnung abgeleitet, die nicht mehr die Abminderung einer wirklich beobachteten, sondern die einer ideellen Grundmasse von Gebornen darstellt. Bei der Gewinnung der erwähnten Wahrscheinlichkeiten kommen Personen aus verschiedenen Geburtsjahren zur Anwendung; die erzielte Absterbeordnung kann daher nicht ohne weiteres als der Ausdruck des Absterbens einer Generation angesehen werden.

Die Begriffe der Lebens- und Sterbenswahrscheinlichkeit sind hier eingeführt worden, ohne dafs die Frage nach ihrer Existenzberechtigung zunächst gestellt wurde; diese Frage kommt später noch zur Erörterung. Unter der Lebenswahrscheinlichkeit p_x einer x-jährigen Person wird die Wahrscheinlichkeit verstanden, dafs sie das Alter von $(x + 1)$ Jahren erreiche; und unter der Sterbenswahrscheinlichkeit q_x die Wahrscheinlichkeit, dafs sie innerhalb des bezeichneten Altersintervalls sterbe; hiernach ist $p_x + q_x = 1$. Man schliefst dann, dafs das Product $\prod_0^{x-1} p_i$ die Wahrscheinlichkeit P_x bedeute, dafs ein Individuum aus der gedachten Geburtsmasse das Alter x vollende, und dafs ferner $A_0 P_x = A_x$ die wahrscheinlichste Anzahl derjenigen sei, welche aus A_0 Geburten stammend das Alter x vollenden. Die Reihe der Zahlen $A_0, A_1, \cdots A_x, \cdots$, deren erste (oder eine) beliebig angenommen werden konnte, bildet im Zusammenhalte mit den Altersstufen den wesentlichen Inhalt der Absterbeordnung.

Über die Anwendung der indirecten Methode auf die Aufzeichnungen der Bevölkerungsstatistik herrschten bis in eine nicht weit zurückliegende Zeit unklare, verworrene Vorstellungen, weil es an einer Einsicht in die Natur der verschiedenen Complexe von Lebenden und Verstorbenen und in ihre gegenseitigen Beziehungen mangelte, die aus jenen Aufzeichnungen sich construiren lassen. Diese Unklarheit beginnt mit Halley[1]), dem ersten, der aus bevölkerungsstatistischem Material, aus den Altersnachweisen über die Verstorbenen in einem geschlossenen (Stadt-)Gebiet, Schlüsse zog; bei ihm fliefsen die Altersgruppirung der Verstorbenen, der Altersaufbau einer Bevölkerung und die Absterbeordnung in eins zusammen. Viele der späteren Arbeiten gründen sich auf die Vorstellung der stationären Bevölkerung, welche auch Halley vorgeschwebt haben dürfte,

einer Bevölkerung, in welcher die Geburten gleichförmig über die Zeit verteilt sind und eine feste Absterbeordnung herrscht. Ebenso wenig brauchbar wie diese Vorstellung ist dasjenige, was Euler[2]) an ihre Stelle setzen wollte, die Hypothese nämlich, dafs die jährlichen Geburten in geometrischer Progression fortschreiten, deren Quotient sich empirisch bestimmen lasse. Durch Moser[1]) wurde die Unhaltbarkeit dieser Anschauungen und der auf sie gegründeten Methoden zur Gewinnung von Sterbetafeln aus bevölkerungsstatistischen Aufzeichnungen dargethan; er wandte denn auch das Interesse den Erfahrungen der Versicherungsanstalten zu, für deren Verwendung er geeignete Wege vorbereitet hatte.

Eine Wendung auf dem Gebiete der Sterblichkeitsmessung bedeuten die Arbeiten Knapp's[1])[2]). Diesem verdankt man eine wissenschaftliche Analyse bevölkerungsstatistischer Aufzeichnungen und eine Theorie der verschiedenen Gesamtheiten von Lebenden und Verstorbenen, in welcher zugleich eine Theorie des Bevölkerungswechsels (in dem oben erwähnten engeren Sinne) zu erblicken ist. Unter einer Gesamtheit von Lebenden oder Verstorbenen wird ein aus der statistisch beobachteten Bevölkerung ausgelöster Complex von Lebenden oder Verstorbenen verstanden, welche in gewissen Merkmalen, die sich auf Geburtszeit, erreichtes Alter, Zeit des Lebens oder Sterbens beziehen, übereinstimmen. Es waren die Beziehungen aufzudecken, welche zwischen den verschiedenen Gesamtheiten bestehen, und insbesondere waren ihre Beziehungen zu dem Problem der Sterblichkeitsmessung zu erforschen. Für die Lösung dieser Aufgaben und die Gewinnung eines klaren Einblicks in die Vorgänge war die analytische Darstellung der Gesamtheiten von der gröfsten Bedeutung. In der erstgenannten Schrift[1]) bediente sich Knapp hierzu, indem er die Mengen der Geburten und der Todesfälle als stetige Functionen der Zeit, respective des Alters auffafste, zweier Functionen in Verbindung mit einer graphischen Darstellung; die eine Function, $F(t)$, bedeutet die Menge der von einem Zeitnullpunkte bis zur Zeit t erfolgten Geburten; die andere, $f(x)$, drückt die auf einen Gebornen entfallende Anzahl der das Alter x Überlebenden aus; mit diesen Hilfsmitteln konnten die verschiedenen Gesamtheiten formelmäfsig dargestellt werden.

Kurz nach dem Erscheinen dieser Arbeit trat Zeuner[1]) mit einer Schrift hervor, welche im engen Anschlusse an Knapp mit ihm gleiche Ziele verfolgt, in der Wahl der geometrischen und analytischen Hilfsmittel aber andere, glücklichere Wege einschlägt. Auch Zeuner hält an der Auffassung der Stetigkeit der Vorgänge fest; er bedient sich aber zu ihrer Darstellung einer einzigen Function und zur geometrischen Veranschaulichung einer krummen Fläche. Wenn man die Menge derjenigen, welche, vom Zeitnullpunkt bis zur Zeit t geboren, das Alter x vollenden, mit $F(t, x)$ bezeichnet, so ist

$$F(t + dt, x) - F(t, x) = \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} dt$$

die Anzahl solcher, welche aus dem Zeitintervall $(t, t + dt)$ stammend das Alter x erreichen. Die Function $\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = f(t, x)$ ist es, welche Zeuner verwendet und die in Knapp's Terminologie „Dichte der Alterserfüllung" zu nennen wäre. Die Fläche, deren Punkte die Coordinaten t, x, $f(t,x)$ haben, dient ihm zur geometrischen Veranschaulichung. In der That gestattet dieser Vorgang eine sehr übersichtliche Darstellung der verschiedenen Gesamtheiten und vermittelt einen klaren Einblick in die Vorgänge des Bevölkerungswechsels. Die Auffassung unterscheidet sich von der Knapp'schen noch in dem Punkte, daſs sie die Vorstellung einer herrschenden, d. i. von der Geburtszeit unabhängigen, Absterbeordnung aufgiebt.

Zeuner's Abhandlungen zur mathematischen Statistik wurden für Knapp Veranlassung, den Gegenstand von neuem aufzunehmen und dabei die möglichste Anpassung an die Wirklichkeit anzustreben. So entstand die erste Abhandlung in dem unter [2]) genannten Buche, in welcher der Bevölkerungswechsel als das aufgefaſst wird, was er wirklich ist, als ein unstetiger Vorgang; dieser Auffassung sind denn auch die eigens entwickelten mathematischen Hilfsmittel und die neue geometrische Darstellung angepaſst, von welch letzterer Knapp schon in einer früheren Arbeit[3]) Gebrauch gemacht hatte. In dieser Darstellung kommt jedes Individuum der beobachteten Masse (Generation) getrennt zum Ausdruck durch eine Alterslinie, deren Anfangspunkt der Geburt, deren Endpunkt dem Sterben und deren Länge der durchlebten Zeit entspricht; die Geburtspunkte der parallel und äquidistant gelegten Alterslinien sind auf einer Curve, der Geburtencurve, angeordnet, welche durch ihren Verlauf die Verteilung der Geburten auf die Zeit erkennen läſst. Wir vermögen in dieser zweiten Knapp'schen Darstellung, so interessant und exact sie ist, eine Vereinfachung nicht zu erblicken; da es sich nur um die Deduction theoretischer Sätze handelt, so ist die einfachste Darstellung die beste, wenn sie auch kein vollkommen, aber doch in den wesentlichen Punkten zutreffendes, Bild giebt; dies aber kann von dem Zeuner'schen Verfahren gesagt werden.

Eine neue und in mehreren Punkten eigenartige Behandlung, welche den Blick auch auf andere Zustandsänderungen von Bevölkerungsmassen richtet, hat der Gegenstand durch Lexis[1]) erfahren. Auch dieser verfolgt die Vorgänge in ihrer Discontinuität, bedient sich zur formelmäſsigen Darstellung der Gesamtheiten einer eigenen Symbolik, die sich an eine graphische Verbildlichung anlehnt, welche mit der letzterwähnten Knapp'schen im wesentlichen übereinstimmt und einer Modification derselben durch Becker[1]) sehr nahesteht. Wiederum erhält jedes Individuum eine Alterslinie (Lebensordinate);

die Geburtspunkte aber sind nunmehr auf einer geraden Zeitaxe (Geburtsaxe) nach ihrer Zeitfolge verteilt, und ihre Dichtigkeit an verschiedenen Stellen bezeichnet die Dichtigkeit der Geburten.

Ohne die Leistungen der mathematischen Theorie des Bevölkerungswechsels, insbesondere in Hinsicht auf das Problem der Sterblichkeitsmessung, zu überschätzen, darf man wohl sagen, dafs erst durch sie überkommene falsche Anschauungen beseitigt und correcte Methoden geschaffen worden sind. [Vgl. hierzu die Bemerkungen Mayr's[1]), bei dem man auch, p. 269—271, die reiche Litteratur des Gegenstandes nachsehen kann.]

Was die speciellen Methoden der Sterblichkeitsmessung und die Kritik der auf diesem Gebiete erzielten Resultate anlangt, so mögen hier die Schriften von Moser[1]), Fischer[2]), Wittstein[1])*), Becker[1]), Knapp[2]) (der in der zweiten Abteilung eine Kritik der Sterblichkeitsmessung auf bevölkerungsstatistischer Grundlage giebt), Zeuner[1]) und Roghé[1]) (Kritik der Sterblichkeitsmessungen in geschlossenen ausgewählten Gesellschaften, insbesondere in Versicherungsinstituten) angeführt werden, aus welchen auch die weitere Litteratur entnommen werden kann.

72. Das Studium der Frage, ob eine statistische Relativzahl als empirischer Wert einer festen objectiven Wahrscheinlichkeit (oder einer Function von einer solchen) angesehen werden könne, womit die Frage zusammenhängt, ob der betreffenden Massenerscheinung ein Complex permanenter Entstehungsbedingungen zugrundeliege, der in seiner Gesamtwirkung constant bleibt, ist erst in neuerer Zeit aufgenommen worden. Früher hat man die bejahende Antwort ohne weitere Prüfung vorweggenommen und die Massenerscheinungen demgemäfs nach dem Schema der Glücksspiele behandelt. Von dem Ausfall der Antwort hängt aber vieles ab, vor allem, ob aus den auf die Vergangenheit sich stützenden Erfahrungen auf den künftigen Verlauf geschlossen werden dürfe; anderen Forschungsgebieten, welche im Gegensatze zur Statistik, die nur die äufseren Umrisse der Erscheinung feststellt, in deren inneres Wesen einzudringen suchen, können aus der Art der Antwort neue Probleme erwachsen.

Die Begründung eines wissenschaftlichen Verfahrens, um stati-

---

*) Der Wittstein'schen Schrift „Mathematische Statistik etc." mufs hier mit einigen Worten besonders gedacht werden, weil durch sie der Anstofs gegeben ward zu einer intensiveren Anwendung der Mathematik, insbesondere der Wahrscheinlichkeitsrechnung, auf die statistische Forschung. Wittstein's Idee, von der beobachtenden Statistik einen theoretisch-forschenden Zweig abzusondern, der sich den auf exacter Grundlage arbeitenden Naturwissenschaften anzuschliefsen hätte, ist zur Verwirklichung gekommen; die neue Disciplin hat auch den von ihm vorgeschlagenen Namen „Mathematische Statistik" angenommen. Wittstein knüpft an Laplace an und geht über dessen Auffassung der Sterblichkeit nicht hinaus.

stische Zahlenreihen nach der bezeichneten Richtung zu prüfen, ist Lexis zu verdanken; die Wahrscheinlichkeitstheorie kommt dabei zu der Rolle eines statistischen Forschungsmittels. Die Grundzüge des Verfahrens, welches Lexis zuerst in der Abhandlung[2]) dargelegt und bald darauf in seiner „Theorie der Massenerscheinungen der menschlichen Gesellschaft“[3]) weiter entwickelt hat, bestehen in dem folgenden (vgl. hierzu Art. 36).

Hat man aus einer Urne mit constantem Mischungsverhältnis*) weifser und schwarzer Kugeln z Reihen von je s Ziehungen ausgeführt und der Folge nach $m_1, m_2, \cdots m_z$ weifse Kugeln hervorgeholt, so werden die Quotienten

$$\frac{m_1}{s}, \frac{m_2}{s}, \cdots \frac{m_z}{s} \tag{α}$$

sich um die mathematische Wahrscheinlichkeit p, welche die Urne dem Erscheinen einer weifsen Kugel verleiht, derart gruppiren, dafs ihre Abweichungen von derselben dem Bernoulli'schen Theorem gemäfs verteilt erscheinen. Diese Verteilung ist durch die Function

$$\Phi(\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\theta} e^{-t^2} dt \tag{β}$$

bestimmt, welche die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, dafs der Unterschied $\frac{m_i}{s} - p$ zwischen den Grenzen $-\theta$ und θ enthalten sei; die Modalität der Verteilung richtet sich nach dem Parameter

$$h = \sqrt{\frac{s}{2p(1-p)}}, \tag{γ}$$

der von dem Umfang der einzelnen Versuchsreihe und von der mathematischen Wahrscheinlichkeit p abhängt; je gröfser h, umso dichter drängen sich die Werte der Reihe (α) um p zusammen. Sind die Ziehungen aus einer Urne mit unbekanntem Mischungsverhältnis, das aber constant geblieben ist, hervorgegangen, dann wird die Reihe (α) sehr angenähert dasselbe Verhalten gegenüber der wahrscheinlichsten Bestimmung von p aus dem gesamten Versuchsmaterial, d. i. gegenüber dem Werte

$$w = \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_z}{zs}, \tag{δ}$$

welcher zugleich das arithmetische Mittel der Werte α vorstellt, aufweisen. Die Bestimmung von h kann jetzt nach der Formel

*) Man denke sich entweder die Gesamtzahl der Kugeln unbegrenzt oder aber die gezogene Kugel jedesmal zurückgelegt, bevor die nächste Ziehung gemacht wird.

$$h = \sqrt{\frac{s}{2w(1-w)}} \qquad (\gamma^*)$$

erfolgen.

Die Sache gestattet aber noch eine andere Auffassung. Man kann die Werte (α) als gleich genaue directe Beobachtungen der (als unbekannt vorausgesetzten) Gröfse p, von der Präcision h, auffassen; diese letztere läfst dann eine zweite Bestimmung aus den Abweichungen

$$\lambda_i = -w + \frac{m_i}{s}, \qquad (i = 1, 2, \cdots z)$$

der Einzelresultate (α) von dem wahrscheinlichsten Werte w nach den Regeln der Methode der kleinsten Quadrate zu, und zwar ist

$$h = \sqrt{\frac{z-1}{2[\lambda\lambda]}}. \qquad (\varepsilon)$$

In dem besprochenen Falle ist eine umso bessere Übereinstimmung der beiden Bestimmungen (γ^*) und (ε) zu gewärtigen, je gröfser z ist.

In Anlehnung an die Fehlertheorie nennt Lexis h die Präcision der Wertreihe (α) und bezeichnet[3]) (p. 27) (γ^*) als ihre „combinatorische", (ε) als ihre „physikalische" Bestimmung.*)

Zeigt eine statistische Zahlenreihe das hier beschriebene Verhalten, d. h. sind die Abweichungen der Einzelwerte vom wahrscheinlichsten Werte dem Gesetze (β) gemäfs verteilt oder verstreut, und stimmt ferner die physikalische Bestimmung der Präcision mit der combinatorischen Bestimmung gut genug überein, so bezeichnet Lexis[3]) die Zahlenreihe als eine typische mit normaler Dispersion. Die betreffende Massenerscheinung kann dann ihrem äufsern Verlaufe nach mit einem reinen Glücksspiele verglichen werden, und so wie bei einem solchen die einzelnen Fälle jedes Zusammenhangs entbehren, kann auch eine solche Massenerscheinung als eine unverbundene aufgefafst werden.

Findet die Verteilung der Abweichungen der Einzelwerte vom wahrscheinlichsten Werte wohl einem Gesetze von der Form (β) entsprechend statt, ist jedoch die nach der physikalischen Methode bestimmte Präcision (ε), die allein für die Streuung mafsgebend ist, kleiner als die andere Bestimmung (γ^*), so wird die Zahlenreihe wohl noch als eine typische, aber als eine solche mit übernormaler Dispersion erklärt; die Einzelwerte sind jetzt um den wahrscheinlichsten Wert weniger dicht zusammengedrängt als im vorigen Falle. Lexis erklärt dieses Verhalten dadurch, dafs er annimmt, einer solchen Massenerscheinung liege nicht eine feste, sondern eine schwankende Wahrscheinlichkeit zugrunde, jedoch so, dafs deren Ab-

*) In der Abhandlung[2]) (p. 218) nennt er die erste Bestimmung die „statistische".

weichungen von einem Normalwerte von einer Beobachtungsreihe zur anderen den Charakter des Zufälligen an sich tragen. Er vergleicht den Ablauf der Erscheinung mit Ziehungsserien, deren jede aus einer anderen beliebig gewählten Urne stammt; diese Urnen sind mit weifsen und schwarzen Kugeln in Mischungsverhältnissen gefüllt, welche um einen Normalwert zufällig schwanken. Infolgedessen verbinden sich Abweichungen von zweifacher Art und unabhängig von einander zu einer Gesamtabweichung, wodurch eine Verminderung der Präcision und eine verstärkte Streuung der Einzelresultate herbeigeführt wird.

Würde sich hingegen die nach der Formel (ε) berechnete Präcision gröfser herausstellen als ihr combinatorischer Wert (γ^*), die Verteilung der Abweichungen zwar nach dem Gesetze (β), aber mit geringerer Dispersion, also mit stärkerem Hindrängen nach dem wahrscheinlichsten Werte, geordnet sein, so hätte man es nach der von Lexis eingeführten Terminologie mit einer typischen Reihe mit unternormaler Dispersion zu thun. Dieses Verhalten soll darauf hinweisen, dafs zwischen den Einzelfällen eine gewisse Abhängigkeit stattfindet, welche auf das Zustandekommen eines festen Wertes direct hinwirkt; deshalb will Lexis eine Massenerscheinung, welche zu einer Reihe dieser Art führt, als eine verbundene aufgefafst wissen.

Eine Reihe statistischer Relativzahlen, die eine von dem Gesetz (β) entschieden abweichende Verteilung — nach v. Bortkewitsch[3]) eine unregelmäfsige Dispersion — aufweist, wird von Lexis als eine symptomatische Reihe bezeichnet. Sie ist das Symptom für einen veränderlichen menschlich-gesellschaftlichen Zustand, und sofern sie die Tendenz der Veränderung mehr oder weniger deutlich erkennen läfst, wird sie zu einer evolutorischen Reihe. Andere Abarten der symptomatischen Reihe sind die oscillatorische (unregelmäfsig, aber nicht nach dem Gesetz der typischen schwankende) und die periodische Reihe, welche ein nach bestimmten Zeitabschnitten geregeltes Schwanken erkennen läfst.

Wenn es sich um die Untersuchung einer Reihe statistischer Zahlen handelt, die aus einer Reihe aufeinanderfolgender Zeitperioden hervorgegangen sind, dann darf die Verteilung der Einzelwerte nach ihrer Gröfse nicht allein ins Auge gefafst werden; vielmehr mufs auch ihr Verhalten in der Zeitfolge berücksichtigt werden. Eine Reihe, die als typisch gelten soll, darf auch bei der letzteren Anordnung keine ausgesprochene Tendenz verraten. Auf diesen Umstand hat Lexis[3]) nicht deutlich hingewiesen.

Die eben entwickelte Theorie geht von einer Voraussetzung aus, die niemals streng erfüllt sein wird: die Zahlen der zu untersuchenden Reihen sollen aus Beobachtungsserien gleichen Umfangs hervorgegangen sein, sie sollen mit anderen Worten gleiches Gewicht haben. Indessen darf das Verfahren seiner Natur und seinem Ziele

nach auch dann angewendet werden, wenn die (grofs vorausgesetzten) Umfänge der Beobachtungsreihen wenigstens in den Einheiten höherer Ordnung übereinstimmen.

73. Lexis hat seine Untersuchungsmethode auf verschiedene Massenerscheinungen und ein beträchtliches statistisches Material angewendet; die Resultate haben Ansehen und Bedeutung erlangt.

Die ersten, am weitesten geführten Untersuchungen[2][3]) betrafen das Geschlechtsverhältnis der Gebornen, eine der am längsten und mit Vorliebe beobachteten Erscheinungen statistischer Natur.*) Die Probleme, welche Laplace[13]) (art. 28, 29, 33) und Poisson[1]) in Bezug auf diese Erscheinung sich stellten, waren ganz anderer Natur und setzten schon voraus, dafs ihr eine feststehende objective Wahrscheinlichkeit zugrundeliege. Lexis aber vermochte aus weitläufigen, verschiedenen Gebieten und Zeitepochen entstammenden Beobachtungen den Nachweis zu führen, dafs es sich hier um eine typische Wahrscheinlichkeit (die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt) mit normaler Dispersion handle; es ist dies aber auch die einzige Massenerscheinung, bei welcher diese Natur unzweifelhaft festgestellt werden konnte. Mayr[1]) (p. 187) zieht aus diesem gesetzmäfsigen Verlauf den Schlufs, es mache ganz den Eindruck, als erstrebe die Natur im Gesamtverlauf der Geburtsfälle die Erreichung eines a priori festgesetzten Geschlechtsverhältnisses der Gebornen. Die mannigfachen Hypothesen über die Geschlechtsdetermination, über die Moser[1]) (p. 210—231) noch ausführlich berichtet, sind dadurch hinfällig oder gegenstandslos geworden. Lexis[2]) (p. 242) erblickt die einfachste Erklärung für die constante Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt in der Annahme, dafs schon das Verhältnis der männlichen und weiblichen Keime, wenigstens im Durchschnitt für grofse Gebiete, constant sei.

Dafs aber aus der nachgewiesenen Analogie mit einem reinen Zufallsspiel nicht weitgehende Consequenzen gezogen werden dürfen, zeigt schon die Untersuchung des Geschlechtsverhältnisses bei Zwillingsgeburten. Dürfte eine Zwillingsgeburt als aus zwei von einander unabhängigen Conceptionen hervorgegangen angesehen werden, so liefse sich die Verteilung der Zwillingsgeburten auf die drei möglichen Geschlechtscombinationen aus der Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt allein a priori vorausbestimmen. Die Erfahrung bestätigt aber diese nach der Wahrscheinlichkeitstheorie berechnete Verteilung nicht, wie bereits Moser[1]) (p. 218) bemerkt hat. Lexis[3])

---

*) Eine der ersten theoretischen Untersuchungen über diesen Gegenstand stammt von Arbuthnot[2]), der aus 82-jährigen Londoner Beobachtungen nachzuweisen versuchte, dafs der ständige Überschufs an Knabengeburten es ausschliefst, dafs Knaben- und Mädchengeburten gleich wahrscheinlich seien.

(p. 75) hat hieraus den ohne Zweifel richtigen Schlufs gezogen, dafs die vorausgesetzte Unabhängigkeit zweier Befruchtungen, die zu einer Zwillingsgeburt führen, nicht bestehe; er fand die Hypothese, dafs eine Wahrscheinlichkeit für gleiches Geschlecht der Zwillinge existire, durch die Beobachtungen gut bestätigt.

Eine weitere Untersuchung bezog sich auf die Absterbeordnung einer Generation; hier hat Lexis[3]) (p. 41—64) eine neue Thatsache aufgedeckt und zum wenigsten die Tendenz für eine typische Erscheinung mit normaler Dispersion nachgewiesen. Wenn man die Alterslinien der Individuen einer Generation auf einer Geraden von einem Nullpunkte aus nach einer Richtung abträgt, so werden die Endpunkte — Sterbepunkte — ungleichförmig über die Gerade verteilt sein. In dieser Verteilung machen sich zwei Dichtigkeitscentren deutlich bemerkbar; das eine, bei dem Alter 0 und längst bekannt, rührt von der grofsen Sterblichkeit in den ersten Lebenstagen und Lebensmonaten her; das andere stellt sich in der Nähe des 70. Lebensjahres ein und hat Lexis zu seiner Theorie des Normalalters Anlafs gegeben. Das wesentlichste Merkmal dieses Alters besteht darin, dafs Abweichungen von demselben nach auf- und abwärts (letztere bis zu einer gewissen Grenze) sich wie zufällige Fehler verhalten, mit anderen Worten, dafs die Sterbefälle in der Umgebung dieses Alters typische Verteilung aufweisen. Lexis erblickt daher in dem Normalalter dasjenige Alter, auf welches die Menschen der betreffenden Generation gewissermafsen eingerichtet sind, nennt die Sterbefälle, die innerhalb der typischen Altersstrecke erfolgen, die „normalen", die vor ihnen bis gegen das 13. Lebensjahr — wo die geringste Dichte der Sterbefälle stattzufinden pflegt — eintretenden die „vorzeitigen", und die aus dem übrigen Abschnitt stammenden die „jugendlichen". Die Untersuchungen, welche in Ermangelung von Aufzeichnungen über Generationen an verschiedenen Sterblichkeitstafeln ausgeführt worden sind, haben das geschilderte Bild deutlich erkennen lassen; fast ausnahmslos ergab sich das Normalalter des weiblichen Geschlechtes etwas höher als das des männlichen. Bei den Männern bewegt sich das Normalalter zwischen 67 (Belgien) und 74 Jahren (Norwegen), bei den Frauen zwischen 69 (Bayern) und 75 Jahren (Schweden und Norwegen). Lexis bestimmte auch jedesmal den Anteil der typischen Sterbefälle, die Normalgruppe; er erblickt in diesen Gröfsen Daten, welche den Charakter der Sterblichkeitsverhältnisse kennzeichnen. Es mag noch die Art der Bestimmung der Präcision erwähnt werden. Ist N das Normalalter, dessen Feststellung die Zahlen der Verstorbenen gestatten; entfallen auf das Altersintervall $(N, N + x)$ a Sterbefälle, auf das Intervall $(N, N + \omega)$, wobei $N + \omega$ das höchste Alter bedeutet, b Sterbefälle, so ist $\frac{a}{b}$ die empirische Wahrscheinlichkeit, dafs die Ab-

weichung der Lebensdauer eines Verstorbenen vom Normalalter zwischen $-x$ und x falle. Rechnet man aus der Gleichung

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^0 e^{-t^2} dt$$

θ, so findet sich schliefslich aus der Gleichung $\theta = hx$ die Präcision $h = \frac{\theta}{x}$.

In der Sterbenswahrscheinlichkeit der Erstjährigen (Quotient, dessen Nenner die Zahl der Lebendgebornen aus einem Kalenderjahr und dessen Zähler die aus diesen Gebornen hervorgegangenen Gestorbenen im Alter von 0 bis 1 Jahr ist) hat Lexis[3]) (p. 78—82) eine typische Gröfse mit übernormaler Dispersion nachgewiesen, und in den Verhältniszahlen der Selbstmorde durch Ertränken zu allen Selbstmorden (ibid., p. 83—87) eine symptomatische Reihe erkannt. Die Möglichkeit, eine Massenerscheinung mit unternormaler Dispersion nachzuweisen, stellt Lexis in Abrede und spricht seine Überzeugung dahin aus, dafs die meisten menschlichen Massenerscheinungen zu symptomatischen Reihen führen werden, weil die Evolution in auf- oder absteigender Tendenz die Regel bilde im Leben der Menschheit. In diesem Sinne hat es keine Berechtigung, von der Sterbenswahrscheinlichkeit einer Altersclasse wie von einer festen Gröfse zu sprechen, der man durch entsprechende Vermehrung der Beobachtungen beliebig nahe kommen könnte. Überhaupt sind durch die Ergebnisse der Untersuchungen von Lexis manche der älteren Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie auf Massenerscheinungen in Frage gestellt.

Ob aus dieser tieferen Einsicht, deren wissenschaftlicher Wert aufser Zweifel steht, nicht vielleicht nachteilige Schlüsse zu ziehen seien in Bezug auf das Versicherungswesen, welches auf menschliche Sterblichkeit gegründet ist: diese Frage mufs durch den Hinweis auf andere Gebiete praktischer Bethätigung mit einer Erfahrungsgrundlage beantwortet werden. Nirgends vermag die aus der Vergangenheit geholte Erfahrung eine absolut verläfsliche Richtschnur für die Zukunft zu geben; überall bedarf es einer ständigen Controle und zweckmäfsig gewählter Sicherungsmittel gegen unvorhersehbare Abweichungen: in der Ausübung dieser Functionen liegt ja die zielbewufste Praxis. In unserem Falle wäre es nicht einmal die zeitliche Änderung der normalen Sterblichkeitsverhältnisse, die zu Bedenken Anlafs gäbe, weil sie gewifs innerhalb sehr enger Grenzen vor sich geht; gröfsere Bedeutung könnte dem Umstande beigelegt werden, dafs die Versicherungsinstitute zumeist genötigt sind, ihren Rechnungen Daten zugrundezulegen, die aus einem ganz anderen Material abgeleitet sind als dasjenige, welches sie versichern; aber

vielfältige Erfahrung zeigt, dafs auch hieraus bei vorsichtigem Zuwerkegehen keine nachteiligen Consequenzen erwachsen. Man vergleiche hierzu die Bemerkungen v. Kries'[1]) (p. 239).

74. Schon an die erste tabellarische Darstellung einer Absterbeordnung durch Halley[1]) knüpfte sich ein Versuch, die Sterblichkeit in eine mathematische Formel zu fassen, oder, wie derlei Bestrebungen nachmals wiederholt bezeichnet worden sind, das mathematische Gesetz der Sterblichkeit zu erforschen. De Moivre[3]) hat an der Halley'schen Tafel die Wahrnehmung gemacht, dafs die Zahlen der die einzelnen Altersjahre Überlebenden innerhalb beträchtlicher Zeiträume annähernd in arithmetischer Progression fallen, und er stellte in der angezogenen Schrift, welche von der Berechnung der Leibrenten handelt und deren Inhalt später in die zweite Auflage der „Doctrine of chances"[2]) aufgenommen wurde, geradezu den Satz auf, man könne die Zahlen der Überlebenden vom 12. bis zum 86. Jahre (Lebensende) durch eine einzige arithmetische Reihe mit constanter Differenz darstellen.

Bei geometrischer Interpretation, d. i. bei Verzeichnung einer sogenannten Sterblichkeitscurve — eine Darstellungsform der Sterblichkeitsverhältnisse, von welcher D'Alembert[4]) zum ersten Male Gebrauch machte — hiefse das, die Überlebenden fallen nach den Ordinaten einer geraden Linie ab. Einen etwas zutreffenderen Einblick in den Verlauf dieser Curve hat schon D'Alembert[5]) selbst gewonnen; aus dem Studium der Tabellen, welche Buffon[1]) im Anhange seiner „Arithmétique morale" gab, leitete er die Folgerung ab, die Sterblichkeitscurve sei gegen die Abscissen-(Alters-)Axe weder beständig concav noch beständig convex.

In späterer Zeit sind nun vielfache Versuche unternommen worden, die Gestalt der Curve und ihre Gleichung festzustellen; vielfach geschah dies in dem Glauben, dafs das menschliche Sterben ähnlich wie viele physikalische Vorgänge nach einem allgemeinen Gesetze vor sich gehe, für welches nur der mathematische Ausdruck zu finden sei; manche Autoren schrieben denn auch der Formel, welche sie durch Versuche und vergleichende Betrachtung verschiedener Absterbeordnungen gefunden hatten, die Bedeutung eines Naturgesetzes zu, wiewohl es dazu an einem wesentlichen Erfordernis, an einer Begründung aus der Natur der Sache, fehlte.

Die erste formelmäfsige Darstellung eines Beobachtungsmaterials hat Lambert im 3. Bande seiner „Beiträge zum Gebrauch der Mathematik" (p. 483) gegeben; es handelte sich ihm um die Gewinnung einer Absterbeordnung für die Londoner Bevölkerung aus den Sterbelisten (Halley's Methode); da diese nicht nach einzelnen Altersjahren, sondern nur nach Altersgruppen geordnet waren, so suchte er das Fehlende durch eine Interpolationsformel zu ergänzen; dieselbe lautet:

$$y = 10000\left(\frac{96-x}{96}\right)^2 - 6176\left(e^{-\frac{x}{13\cdot682}} - e^{-\frac{x}{2\cdot43114}}\right); \qquad (\alpha)$$

y ist die Zahl der Überlebenden vom Alter x, stammend aus 10000 Gebornen. Wie wenig diese Formel ihren Urheber selbst befriedigt hat, geht daraus hervor, dafs er von ihr nicht Gebrauch machte.

Eine Sterblichkeitsformel, die vermöge ihrer wiederholten Anwendung zu praktischen Zwecken ein gewisses Ansehen erlangt hat, ist diejenige von Gompertz[1]). Von der bei dem vergleichenden Studium zahlreicher Sterblichkeitstafeln gemachten Beobachtung ausgehend, dafs innerhalb nicht zu grofser Intervalle die Zahlen der Lebenden in Altern, welche eine arithmetische Progression bilden, nach einer geometrischen Progression fortschreiten, kam Gompertz zu der Formel

$$L_x = dg^{q^x}, \qquad (\beta)$$

die er dann an einer Reihe der bekannten und angesehenen Sterblichkeitstafeln geprüft hat; L_x bedeutet die Anzahl der das Alter x Überlebenden, d, g, q sind aus der Erfahrung zu bestimmende Constanten. Gompertz beabsichtigte nicht, den ganzen Verlauf der Sterblichkeit durch diese eine Formel darzustellen*); so fand er für das Intervall (15, 45) der Northampton-Tafel:

$$L_x = 8441.7404^{1\cdot0261^x}$$

und für das Intervall (15, 55) der Deparcieux-Tafel**):

$$\log L_x = 3\cdot1557 - \text{num}\log(\bar{1}\cdot25095 + 0\cdot00704x).$$

Die Gompertz'sche Formel ist später durch Makeham (Journ. of the Inst. of Actuar. 1860) verallgemeinert worden, um zur Darstellung

---

*) Diesen Umstand hat Moser[1]) (p. 279) bei der Kritik der jetzt folgenden Formel übersehen.

**) Einen mifsverständlichen Gebrauch hat Bertrand[3]) (p. 318) von der Gompertz'schen Formel gemacht, die er in der Gestalt

$$L_x = Ge^{He^{Kx}}$$

schreibt; nicht auf Grund einer ausgewählten, sondern durch möglichste Anpassung an die besten bekannten Tafeln will er die Constanten bestimmen. Er giebt

$$G = 941\cdot160$$
$$H = -\,0\cdot0065461$$
$$K = 0\cdot071485$$

an, ohne den Weg mitzuteilen, auf welchem diese Werte berechnet worden sind.

des ganzen Sterblichkeitsverlaufs geeignet zu sein; in der so entstandenen Gompertz-Makeham'schen Formel ist zu dem Exponenten q^x noch ein in x linearer Summand mit unbestimmten Coefficienten getreten.

Ein Jahr nach Gompertz ist, ebenfalls in den Philos. Trans., Young[2]) mit einer Sterblichkeitsformel hervorgetreten; ihre Ableitung läfst die unklare Auffassung des Gegenstandes, wie sie damals herrschte, deutlich erkennen. Die Zahlen der Verstorbenen aus verschiedenen Beobachtungen und Tafeln (Londoner Beobachtungen aus dem Jahre 1815; Tafeln von Deparcieux, Finlaison, Carlisle, De Morgan, von Price für Northampton) werden graphisch aufgetragen; für die verschiedenen Alter werden Mittel gebildet, und diesen wird eine Curve angepafst, für welche Young die Gleichung findet:

$$y = 368 + 10x - 11(156 + 20x - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2{\cdot}85 + 2{\cdot}05x^2 + 2\left(\frac{x}{10}\right)^6}$$
$$- 5{\cdot}5\left(\frac{x}{50}\right)^{10} + \frac{5{\cdot}5^2}{4000}\left(\frac{x}{50}\right)^{20} - 5500\left(\frac{x}{100}\right)^{40}; \qquad (\gamma)$$

y bedeutet die Anzahl der Verstorbenen unter 100000 Personen in jenem Jahr, in welchem das Alter x vollendet wird. Durch die Formel sollte der Verlauf der Sterblichkeit in England gekennzeichnet sein.

Für die Süfsmilch-Baumann'sche Sterblichkeitstafel*) [siehe Süfsmilch[1]) 2. B., p. 319] hat Littrow[2]) (p. 52) eine näherungsweise Darstellung durch eine Potenzreihe gegeben, welche die Anzahl y der das Alter von x Jahren Überlebenden wie folgt ausdrückt:

$$y = 598{\cdot}1673 - 8{\cdot}417455x + 0{\cdot}230895x^2 - 0{\cdot}005247x^3$$
$$+ 0{\cdot}000032x^4; \qquad (\delta)$$

sie soll erst vom 10. Lebensjahre an zur Anwendung kommen.

Moser[1]), durch die vor ihm gefundenen Sterblichkeitsformeln nicht befriedigt, hat selbst auf die Auffindung einer solchen grofse Mühe verwendet. Für die Bedeutung, welche er dem gefundenen Resultate beimafs, sind die Worte bezeichnend, mit denen er es einführt (p. 281): „Nach vielfältigen Versuchen . . . bin ich endlich glücklich genug gewesen, dasjenige Gesetz zu entdecken, wonach die Sterblichkeit regulirt ist. Es lautet so: Die Anzahl der Toten bis zu einem gewissen Lebensalter ist proportional der vierten Wurzel

*) Die Tafel stand zu der Zeit, wo Littrow das citirte Büchlein schrieb, in Deutschland und Österreich in hohem Ansehen und wurde vielfach verwendet.

aus diesem Lebensalter." Moser glaubte hierin ein ähnliches Gesetz gefunden zu haben wie etwa dasjenige, nach welchem die Wege beim freien Fall geregelt sind. Die Zahl der Gebornen als Einheit genommen, ist nach ihm die Zahl derjenigen, welche das Alter x vollenden,

$$y = 1 - ax^{\frac{1}{4}}. \qquad (\varepsilon)$$

Die Vergleichung dieser Formel mit verschiedenen Absterbeordnungen befriedigte ihn jedoch nicht in allen Altersperioden gleich gut, und so fügt er der Formel, wenn sie über das 30. Jahr aufwärts verwendet werden soll, noch zwei, und wenn auch die hohen Alter über 80 Jahre einbezogen werden sollen, zwei weitere Glieder hinzu; die so erweiterten Formeln lauten:

$$y = 1 - ax^{\frac{1}{4}} - bx^{\frac{9}{4}} - cx^{\frac{17}{4}}, \qquad (\varepsilon')$$

$$y = 1 - ax^{\frac{1}{4}} + bx^{\frac{9}{4}} - cx^{\frac{17}{4}} - dx^{\frac{25}{4}} + ex^{\frac{33}{4}}; \qquad (\varepsilon'')$$

in den Exponenten, über deren Auffindung nichts näheres gesagt wird, sollte das Gesetzmäfsige zum Ausdruck kommen.

Aus den gemeinsamen Merkmalen zahlreicher Sterblichkeitstafeln glaubte Edmonds[1]) eine Analogie zwischen dem Absterben und der Abhängigkeit der Spannkraft von Dämpfen gröfster Dichte von der Temperatur zu erkennen; dies führte ihn zu der Formel:

$$\log \text{vulg. } P = -\frac{k\alpha a}{n}\left\{1 - \left(1 + \frac{t}{a}\right)^{-n}\right\}; \qquad (\zeta)$$

P bedeutet die von einer Einheit der a-jährigen verbleibenden Überlebenden des Alters $a + t$; die Zählung des Alters erfolgt aber dabei in besonderer Weise, nämlich von zwei verschiedenen ideellen Nullpunkten aus; der eine liegt $2^1/_4$ Jahre vor der Geburt und gilt für die Alter bis zu 9 Jahren (nach gewöhnlichem Sprachgebrauch), der andere liegt 102 Jahre nach der Geburt und gilt für die Alter von 12 Jahren aufwärts; für die Zwischenzeit von 9 bis 12 besteht die Formel nicht, dort wird das Absterben als gleichförmig angenommen. Des weiteren ist

$$\frac{1}{k} = l \cdot 10 = 2{\cdot}302585 \cdots \text{ und } n = \frac{1}{k} - 1 = 1{\cdot}302585 \cdots;$$

α ist eine von den Beobachtungen abhängige Constante. Vergleiche mit englischen Sterblichkeitstafeln zeigten gute Übereinstimmung.

Scheffler[1]) wollte zu einer für Versicherungszwecke brauchbaren Tafel dadurch gelangen, dafs er aus einer Reihe (im ganzen 25) Sterbetafeln verschiedenster Herkunft auf graphischem Wege eine „mittlere Sterblichkeitstafel" construirte; für die Curve, welche ihr

entsprach, substituirte er in den Altersabschnitten (0, 6), (6, 80) und (80, 99) Parabeln der Gleichungsform $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ und fand dafür die Darstellungen:

$$\begin{aligned} (0,6):\ y &= 100000 - 11402{\cdot}9\,x + 842{\cdot}4\,x^2, \\ (6,80):\ y &= 64440 - 395{\cdot}86\,x - 4{\cdot}331\,x^2, \\ (80,99):\ y &= 204364 - 4305{\cdot}8\,x + 22{\cdot}68\,x^2. \end{aligned} \qquad (\eta)$$

Es ist nicht abzusehen, was durch solch ein unkritisches Verfahren erzielt werden soll.

Eine der jüngsten Arbeiten von der hier besprochenen Art ist die von Wittstein[3]) unternommene Aufstellung eines mathematischen Gesetzes der Sterblichkeit; über das Ziel, nach welchem derartige Untersuchungen hinstreben, spricht sich Wittstein mit den Worten aus, dafs es in einer fernen Zukunft möglich sein werde, „aus der Beobachtung weniger Altersclassen mit Sicherheit eine ganze Sterblichkeitstafel aufzubauen". Die Beobachtungen würden dann eben nur dazu dienen, die Constanten des in seiner analytischen Form feststehenden Gesetzes zu berechnen. Seine Endformel lautet:

$$w = a^{-(M-x)^n} + \frac{1}{m}\,a^{-(mx)^n}; \qquad (\vartheta)$$

w ist die Wahrscheinlichkeit einer x-jährigen Person, binnen Jahresfrist zu sterben; M bedeutet das höchste Alter, in welchem die Sterblichkeitstafel noch Lebende anführt; a, m, n sind aus der Beobachtung zu bestimmende Constanten. Das zweite Glied der rechten Seite bringt hauptsächlich die Kindersterblichkeit zum Ausdruck, während es in den höheren Altersstufen nur einen sehr geringen Einflufs ausübt. Wittstein hat seine Formel auf dasjenige Beobachtungsmaterial, welches Brune[1]) zur Herstellung seiner Sterblichkeitstafel für Männer heranzog, und weiter auf die Sterblichkeitsbeobachtungen H^M (Healthy male lives = gesund aufgenommene Männer) der 20 englischen Gesellschaften angewendet und in beiden Fällen befriedigende Anpassung erzielt; das zweite Beispiel bietet in der Art der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Constantenbestimmung besonderes Interesse.

In einer dänisch geschriebenen Abhandlung[3]) teilt Gram aus dem Nachlasse des Statistikers Oppermann zwei Formeln mit, deren eine den Verlauf der Sterblichkeit im Kindesalter (bis etwa zu 15—20 Jahren) und die andere von da aufwärts darstellen soll; die Formeln lauten:

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \frac{a}{\sqrt{x}} + b + c\sqrt{x}, \\ \mu(x) &= (\alpha + \beta x)\,e^{-\varkappa x} + \gamma d^{\lambda x}. \end{aligned} \qquad (\iota)$$

Darin bedeutet $\mu(x)$ die Sterbensintensität bei dem Alter x (bezüglich dieses Begriffs vergl. Art. 76).

75. Wenn man es unternimmt, den zeitlichen Ablauf einer Massenerscheinung — um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, denken wir an das Absterben einer Grundmasse Geborner oder Gleichaltriger mit zunehmendem Alter — durch eine Reihe discreter, aus der Beobachtung abgeleiteter Zahlen darzustellen, so wird diese Darstellung nicht befriedigen, weil sie mit gewissen Vorstellungen nicht im Einklange steht. Man stellt sich nämlich vor, dafs für die betreffende Erscheinung ein normaler Verlauf bestehe, den zu erkennen man bestrebt ist und der nicht allein Unstetigkeiten, sondern innerhalb kürzerer Zeiträume auch Unregelmäfsigkeiten ausschliefst; die mehr oder weniger unregelmäfsige Anordnung der Einzelwerte schreibt man daher störenden Einflüssen zu, welche die beobachteten Einzelzustände von dem normalen Verlaufe ablenkten, und stellt sich weiter vor, dafs diese Einflüsse den Charakter des Zufälligen besitzen und um so geringer sich geltend machen, je umfangreicher die Beobachtungsreihen sind, aus welchen die Einzelwerte abgeleitet wurden.

Aus diesen Erwägungen sind die auf die Ausgleichung von Massenerscheinungen gerichteten Bemühungen hervorgegangen; insbesondere bei der Construction von Sterblichkeitstafeln sind solche Ausgleichungsversuche vielfach praktisch geübt worden. Es mufs zunächst festgestellt werden, dafs sich hier die Formulirung eines bestimmten Problems als unthunlich erweist. Zu einer Abänderung des einzelnen Wertes, also des einzelnen Sterblichkeitsquotienten, welche eine Annäherung an den Normalwert erwarten liefse, fehlt es an der nötigen Grundlage; nur wenn für jeden einzelnen Wert mehrere von einander unabhängige Bestimmungen vorlägen und wenn es zulässig wäre, dieselben als gleich oder ungleich genaue Beobachtungen eines und desselben Normalwertes anzusehen, dürfte von dem, eventuell mit Berücksichtigung der Gewichte gebildeten, arithmetischen Mittel erwartet werden, dafs es dem unbekannten Normalwerte näher liege als die einzelne Bestimmung; dieses Mittel wäre dann mit Recht als ein „ausgeglichener" Wert beizubehalten. Aber auch für eine Berichtigung des Complexes aller Einzelwerte, welche eine Annäherung an den normalen Verlauf erwarten liefse, ist a priori kein Anhalt vorhanden; wäre die allgemeine Natur des Sterblichkeitsverlaufs bekannt, sodafs es sich nur um die Feststellung einer Modalität desselben handelte, mit anderen Worten: stände die Sache so, dafs für eine Function von bekannter analytischer Zusammensetzung die Parameter zu bestimmen wären, dann allerdings läge eine Aufgabe vor, die sich mit den Mitteln der Ausgleichungsrechnung nach einem gewissen Princip lösen liefse. Da jedoch keine der erwähnten Bedingungen erfüllt ist, so kann von den verschiedenen Ausgleichungsmethoden gesagt werden, dafs sie nur den formalen Zweck erfüllen,

an die Stelle der unregelmäfsigen Reihe der beobachteten Werte eine ihrem Verlaufe annähernd folgende regelmäfsigere Reihe zu setzen. Für die praktischen Zwecke des Versicherungswesens genügt dies, wie die Erfahrung gelehrt hat; subtile theoretische Untersuchungen sollten aber immer an dem unausgeglichenen, von Willkür freien Beobachtungsmaterial vorgenommen werden. Für weitgehende theoretische Vergleiche der verschiedenen Verfahren, welche vorgeschlagen worden sind, fehlt es, wie aus dem vorstehenden hervorgeht, an einem festen Boden.

Man kann zwei Kategorien von Ausgleichungsmethoden unterscheiden.

Bei der ersten Kategorie wird von der Anschauung ausgegangen, dafs die Störung, welche der einzelne Wert erleidet, sich auch noch bei den Werten einer gewissen Umgebung bemerkbar mache; und wenn diese Störung nicht bei all diesen Werten gleiche Richtung hat, so ist aus einer geeigneten gruppenweisen Zusammenfassung ein Ausgleich der Störungen zu erhoffen; dadurch, dafs man auf die Ermittlung des definitiven Wertes an einer Stelle auch die benachbarten Beobachtungswerte einwirken läfst, soll auch der Zusammenhang der Werte zum Ausdruck gelangen.

Auf diesem Gedanken beruhte schon der Vorgang, den Brune[1]) bei der Construction seiner sehr verbreiteten Tafeln befolgt hat, wenn auch hier von einer Ausgleichung bestimmter Werte (wie Sterbenswahrscheinlichkeiten oder dergl.) nicht gesprochen werden kann; aber die Zusammenfassung der Lebenden und Verstorbenen nach fünfjährigen Altersgruppen verfolgte die eben angedeuteten Ziele.

Zu besonderem Ansehen ist im Gebiete der Sterblichkeitsmessung die von Woolhouse[1]) angegebene Methode gekommen. Sie verwendet zur Bestimmung des definitiven Wertes der Sterbenswahrscheinlichkeit für ein Alter x aufser ihrem beobachteten Wert w_x noch die beobachteten Werte der sieben vorangehenden und der sieben nachfolgenden Altersjahre, im ganzen also 15 empirische Werte. Denkt man sich die Alter x als Abscissen, die zugehörigen w_x als Ordinaten aufgetragen, so werden durch die fünf Punkttripel, welche die Endpunkte von

$$\begin{array}{lll} w_{x-7} & w_{x-2} & w_{x+3} \\ w_{x-6} & w_{x-1} & w_{x+4} \\ w_{x-5} & w_x & w_{x+5} \\ w_{x-4} & w_{x+1} & w_{x+6} \\ w_{x-3} & w_{x+2} & w_{x+7} \end{array}$$

bilden, Parabeln von der Gleichungsform $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ gelegt; jede dieser Parabeln schneidet auf der mittleren, zu x gehörigen Ordinatenlinie eine Strecke ab, und das arithmetische Mittel w_x' dieser

fünf Strecken wird als der definitive Wert der Sterbenswahrscheinlichkeit im Alter x erklärt; die Ausführung der Rechnungen giebt

$$\begin{aligned} w_x' = \tfrac{1}{5}\{ & w_x + 0{\cdot}96(w_{x-1} + w_{x+1}) + 0{\cdot}84(w_{x-2} + w_{x+2}) \\ & + 0{\cdot}28(w_{x-3} + w_{x+3}) + 0{\cdot}02(w_{x-4} + w_{x+4}) \\ & - 0{\cdot}08(w_{x-6} + w_{x+6}) - 0{\cdot}12(w_{x-7} + w_{x+7})\}. \end{aligned}$$

Ein wesentlich einfacheres Verfahren hat Wittstein[1]) empfohlen; es besteht in blofser Mittelbildung. Um den definitiven Wert w_x' zu bilden, nimmt er das arithmetische Mittel aus den fünf successiven Werten, in deren Mitte w_x steht; er setzt also

$$w_x' = \frac{w_{x-2} + w_{x-1} + w_x + w_{x+1} + w_{x+2}}{5};$$

sollte der Verlauf der w_x' noch nicht befriedigen, so wird auf sie dasselbe Verfahren angewendet, wodurch

$$\begin{aligned} w_x'' &= \frac{w_{x-4} + 2w_{x-3} + 3w_{x-2} + 4w_{x-1} + 5w_x + 4w_{x+1} + 3w_{x+2} + 2w_{x+3} + w_{x+4}}{25} \\ &= 0{\cdot}2\,w_x + 0{\cdot}16(w_{x-1} + w_{x+1}) + 0{\cdot}12(w_{x-2} + w_{x+2}) + 0{\cdot}8(w_{x-3} + w_{x+3}) \\ &\qquad + 0{\cdot}04(w_{x-4} + w_{x+4}) \end{aligned}$$

erhalten wird, sodafs sich nunmehr an der Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeit eines Alters neun Einzelwerte beteiligen.

In jüngster Zeit haben Anton[1]) und Eneström[5]) Ausgleichungsmethoden angegeben, welche auf der Verwendung der Parabel beruhen. Ersterer legt, um w_x' zu bestimmen, eine Parabel der Gleichungsform $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, welche sich den Endpunkten von w_{x-2}, w_{x-1}, w_x, w_{x+1}, w_{x+2} möglichst eng anpafst — sie wird mittelst der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt; der Abschnitt, den diese Parabel auf der zu x gehörigen Ordinatenlinie bildet, wird als w_x' genommen. Eneström legt gleichfalls und in derselben Weise Parabeln, welche sich je fünf aufeinanderfolgenden Punkten möglichst genau anschliefsen; jede Ordinatenlinie wird von fünf solchen Parabeln getroffen, und der mittelste Punkt gilt als Endpunkt von w_x'. Zur Berechnung von w_x' hat Eneström die Formel abgeleitet:

$$w_x' = w_x - \tfrac{3}{35}\,\Delta^4 w_{x-2};$$

darin bedeutet $\Delta^4 w_{x-2}$ die vierte, also letzte, Differenz der fünfgliedrigen Reihe:

$$w_{x-2},\ w_{x-1},\ w_x,\ w_{x+1},\ w_{x+2}.$$

Die zweite Kategorie der Methoden zur Ausgleichung von Massenerscheinungen besteht in ihrer Anpassung an eine empirische Formel; für die Bestimmung der Constanten dieser Formel unter Zuziehung

aller Beobachtungswerte nach Maſsgabe ihrer Genauigkeit bietet die Methode der kleinsten Quadrate ein völlig durchgebildetes Verfahren. Der Proceſs ist hier aber nicht als eine Ausgleichung zufälliger Fehler der beobachteten Werte, sondern als eine Ausgleichung ihrer Abweichungen von dem hypothetischen Verlauf anzusehen, der durch die empirische Formel ausgedrückt ist. Daher verdient das gewonnene Resultat auch nicht den Namen einer wahrscheinlichsten oder der genauesten Darstellung der Erscheinung auf Grund der vorhandenen Beobachtungen, sondern die gefundene Formel ist unter allen desselben Baues diejenige, welche sich den Beobachtungen in ihrer Totalität am engsten anschlieſst, im Sinne der Auffassung Henke's[1]), über die im Art. 64 berichtet worden ist. Ist die Formel aus dem vorgängigen vergleichenden Studium der betreffenden Erscheinung hervorgegangen und so gewählt worden, daſs sie deren allgemeine Züge wiederzugeben vermag, so wird ein besserer Anschluſs zu erzielen sein als etwa bei einem Versuche, die Erscheinung in eine Potenzreihe zu fassen. In diesem Sinne darf der Gompertz'schen und der Gompertz-Makeham'schen, aber auch der Wittstein'schen Sterblichkeitsformel (s. vorig. Art.) eine Überlegenheit über die andern für denselben Zweck vorgeschlagenen Formeln zuerkannt werden. Bezüglich der Durchführung solcher Ausgleichungen ist zunächst auf zwei Arbeiten von Lazarus hinzuweisen, deren eine[1]) den Gegenstand zuerst aus allgemeinen Gesichtspunkten und dann mit besonderer Rücksichtnahme auf die Construction von Sterblichkeitstafeln behandelt, während die andere[2]) im Anschlusse an eine Kritik des von Zillmer[2]) für die Ausgleichung der Tafel der 23 deutschen Gesellschaften gewählten Verfahrens die Makeham'sche Formel auf das nämliche Material anwendet. Eine bis ins Detail ausgearbeitete Methode der Ausgleichung einer Sterblichkeitstafel nach der letztgenannten Formel hat J. Karup[1]) gegeben und sie auf die Sterblichkeitsbeobachtungen der Gothaer Bank angewendet. Auch auf die im vorigen Artikel besprochene Schrift Wittstein's[3]): „Das mathematische Gesetz der Sterblichkeit" muſs hier nochmals hingewiesen werden.

Eine vergleichende Darstellung der verschiedenen Ausgleichungsmethoden, welche für die Construction von Sterblichkeitstafeln in Vorschlag gebracht worden sind, mit einer Vergleichung der Resultate, welche einige dieser Methoden bei Anwendung auf ein und dasselbe statistische Material ergeben, hat Blaschke[1]) veröffentlicht. Sorley (Journ. of Actuar. XXII) hat mehrere englische Ausgleichungsverfahren einer vergleichenden Kritik unterzogen.

76. Die vergleichende Statistik bedient sich bei Untersuchungen, wo es sich darum handelt, den zeitlichen Entwicklungsgang einer Bevölkerung in knappen Zügen darzustellen oder verschiedene Bevölkerungen in Bezug auf gewisse Merkmale mit einander zu ver-

gleichen, einer Reihe von Zahlengröfsen, über deren Natur, obwohl manche von ihnen ihre Einführung in eine weit zurückliegende Zeit datiren, erst in neuerer Zeit Untersuchungen angestellt worden sind. Solche Gröfsen sind die wahrscheinliche Lebensdauer, die mittlere Lebensdauer, das mittlere Alter der Verstorbenen, die Geburts- und die Sterblichkeitsziffer. Während manche davon schon bei der Einführung wenigstens eine bestimmte formale Definition erhielten, herrscht bei anderen selbst in dieser Beziehung noch heute Unklarheit. Bezüglich der correcten Bestimmbarkeit einzelner der Gröfsen und ihres gegenseitigen Zusammenhangs sind durch die neuere Forschung ältere Anschauungen vielfach corrigirt worden; die wissenschaftliche Bedeutung mancher der Zahlen ist dadurch in Frage gestellt.

Der Begriff der wahrscheinlichen Lebensdauer findet sich bereits in der Halley'schen Schrift[1]) über Sterblichkeit. Wählt man mit D'Alembert[4]) als Grundfunction zur Darstellung des Sterblichkeitsverlaufs die Absterbeordnung $\psi(x)$, so ist die wahrscheinliche Lebensdauer W_0 schlechtweg durch die Gleichung

$$\psi(W_0) = \tfrac{1}{2}\,\psi(0) \tag{α}$$

und die wahrscheinliche Lebensdauer W_x der x-jährigen durch

$$\psi(x + W_x) = \tfrac{1}{2}\,\psi(x) \tag{β}$$

bestimmt; bildet man mit $\psi(x)$ als Ordinate die Sterblichkeitscurve, so ist W_0 die zur halben Ursprungsordinate gehörige Abscisse. Bedient man sich der schon von Laplace[13]) (p. 408) eingeführten Function $\varphi(x)$, welche derart gedacht ist, dafs das Product $\varphi(x)dx$ die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, in dem Altersintervall $(x, x + dx)$ zu sterben — in der neueren Litteratur wird diese Function als die Sterbensintensität oder Sterblichkeitskraft der x-jährigen bezeichnet; man könnte sie nach Analogie des $\varphi(x)$ der Fehlertheorie die relative Häufigkeit der Sterbefälle bei dem Alter x nennen —, dann treten an die Stelle der Gleichungen (α), (β) die folgenden:

$$\int_0^{W_0} \varphi(x)\,dx = \int_{W_0}^{\omega} \varphi(x)\,dx = \tfrac{1}{2} \tag{α^*}$$

$$\int_x^{x+W_x} \varphi(x)\,dx = \int_{x+W_x}^{\omega} \varphi(x)\,dx, \tag{β^*}$$

wenn ω, wie im folgenden durchweg, das höchste Alter bedeutet; nunmehr ist W_0 die Abscisse derjenigen Ordinate, welche die Fläche der durch $\varphi(x)$ bestimmten Curve halbirt.

Der Begriff der mittleren Lebensdauer führt auf Kerseboom zurück.

In D'Alembert's analytischer Darstellung ist die mittlere Lebensdauer M_0 schlechtweg durch den Quotienten

$$\frac{\int_0^\omega \psi(x)\,dx}{\psi(0)} \qquad (\gamma)$$

und diejenige der x-jährigen M_x durch

$$\frac{\int_x^\omega \psi(x)\,dx}{\psi(x)} \qquad (\delta)$$

ausgedrückt, während bei der Wahl der Sterbensintensität als Grundfunction

$$M_0 = \int_0^\omega x\varphi(x)\,dx \qquad (\gamma^*)$$

und

$$M_x = \frac{\int_x^\omega x\varphi(x)\,dx}{\int_x^\omega \varphi(x)\,dx} \qquad (\delta^*)$$

wäre; M_0 bedeutet also die Schwerpunktsabscisse der Fläche, welche durch die Curve $y = \varphi(x)$ in ihrer ganzen Erstreckung begrenzt ist.*)

Laplace[13]) (p. 408—412) hat über die mittlere Lebensdauer eine Untersuchung angestellt, welche deren praktische Bestimmung mit dem theoretischen Wert in Beziehung setzt. Angenommen, man hätte eine sehr grofse Zahl n Geborner (eine Geburtengeneration) bis zu ihrem successiven Absterben beobachtet und dann den Durchschnitt der erreichten Alter gebildet, so wäre damit eine empirische Bestimmung von M_0 gewonnen, um so verläfslicher, je gröfser n; für $n = \infty$ (eine rein mathematische Fiction) ergäbe sich nach der Vorstellung von Laplace M_0 selbst. Es wird nun die Frage nach der

*) D'Alembert[4]) hält die beiden Gröfsen W_0 und M_0 für gleich geeignet, als „espérance de vivre" einer Person angesehen zu werden; er leitet einen Mangel der Wahrscheinlichkeitsrechnung daraus ab, dafs sie „für dasselbe Problem" zwei verschiedene Resultate gebe. — Bei De Moivre[3]), welcher die Abnahme der Überlebenden nach einer arithmetischen Progression sich vorstellt, fallen beide Begriffe in einen zusammen. Sie sind auch später vielfach mit einander vermengt worden. — Die Darstellung (γ^*) der mittleren Lebensdauer entspricht dem Begriff der mathematischen Erwartung; man hat daher M_0 auch die Lebenserwartung der Neugebornen genannt.

Wahrscheinlichkeit gestellt, mit welcher die empirische Bestimmung der mittleren Lebensdauer nicht mehr als innerhalb vorgezeichneter Grenzen von dem theoretischen Werte abweicht. Das Ergebnis der Analyse, die sich vollständig an jene der Fehlertheorie anpafst, geht dahin, dafs der empirische Wert mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\theta e^{-h^2t^2}dt$$

zwischen den Grenzen

$$M_0 \mp \frac{\theta\omega}{\sqrt{n}}$$

zu erwarten sei, und dafs der halbe durchschnittliche Fehler des empirischen Wertes gleichkomme

$$\sqrt{\frac{K_2 - M_0^2}{2n\pi}};$$

dabei ist $h = \frac{\omega}{\sqrt{2(K_2 - M_0^2)}}$ und bedeutet K_2 den Wert des Integrals $\int_0^\omega x^2\varphi(x)dx$ oder das mittlere quadrirte Alter. Laplace bemerkt, für die Ausrechnung der beiden letzten Ausdrücke genüge es, statt M_0 das arithmetische Mittel der beobachteten Sterbensalter und statt K_2 das Mittel ihrer Quadrate zu nehmen.

Wenn an Stelle einer Liste der von den einzelnen Individuen einer Generation erreichten Alter eine Sterblichkeitstafel dieser Generation in Form der Zahlenreihe $A_0, A_1, \cdots A_x, \cdots A_\omega$ der Überlebenden gegeben wäre, so liefse sich für die mittlere Lebensdauer ein Näherungswert nach einem Verfahren bestimmen, das Laplace[13]) (p. 411) ebenfalls angegeben hat; unter der Voraussetzung nämlich, dafs die Sterbefälle während eines Altersjahres sich gleichförmig über dasselbe verteilen, ergiebt sich für die mittlere Lebensdauer der x-jährigen die Bestimmung

$$\frac{A_{x+1} + A_{x+2} + \cdots + A_\omega}{A_x} + \tfrac{1}{2}$$

oder

$$\frac{A_x + A_{x+1} + \cdots + A_\omega}{A_x} - \tfrac{1}{2} = \frac{S_x}{A_x} - \tfrac{1}{2} \qquad (\varepsilon)$$

und dementsprechend für die mittlere Lebensdauer der Gebornen der Wert

$$\frac{S_0}{A_0} - \tfrac{1}{2}; \qquad (\varepsilon^*)$$

S_x $(x = 0, 1, 2, \cdots \omega)$ bezeichnet man als die „summirten Zahlen der Lebenden".

Aber weder ist es bisher möglich gewesen, noch wird es in Zukunft gelingen — von allen anderen Umständen abgesehen schon wegen der erforderlichen sehr langen Beobachtungsdauer —, eine sehr zahlreiche Generation bis zu ihrem Aussterben in Evidenz zu erhalten, derart, dafs man für jedes Individuum das Sterbealter verzeichnet oder dafs man durch Zählung der Überlebenden auf jeder Altersstufe eine Absterbeordnung der Generation herstellt. In dieser strengen Fassung kann also die mittlere Lebensdauer als eine unzugängliche Gröfse bezeichnet werden; und doch wäre sie nur in dieser Fassung geeignet, ein generelles Mafs für die Lebenskraft verschiedener Generationen abzugeben. Die in den Tafeln, gleichgiltig ob Volkstafeln oder Tafeln ausgewählter Gesellschaften, angeführten, nach den Formeln (ε), (ε^*) gerechneten Werte verdienen den Namen „mittlere Lebensdauer" nicht.

Aus der Erkenntnis der Schwierigkeiten einer richtigen directen Bestimmung der mittleren Lebensdauer entsprangen Bestrebungen, dieser Gröfse auf einem anderen, kürzeren Wege beizukommen. Einen solchen glaubte man in der Bestimmung des durchschnittlichen Alters der Verstorbenen während eines Beobachtungsjahres gefunden zu haben. Dazu hatte der folgende Schlufs geführt: Bei Verfolgung einer Geburtengeneration bis zu ihrem Aussterben kommen die Verstorbenen der verschiedenen Altersstufen in einer langen Reihe von Jahren nacheinander zur Beobachtung; verzeichnet man hingegen während eines Kalenderjahres alle Verstorbenen einer Bevölkerung nach den erreichten Altern, so hat man alle Altersstufen auf einmal nebeneinander. Darin, dafs nun jede Altersgruppe von Verstorbenen aus einer anderen Zeit stammt, — so die Gruppe der (0, 1)-jährigen aus dem Beobachtungsjahr und dem vorangehenden Kalenderjahr, die Gruppe der (1, 2)-jährigen aus den zwei letztvorangehenden Kalenderjahren, u. s. w., die letzte Gruppe aus einer etwa um hundert Jahre zurückliegenden Zeit, — erblickte man bei den früher herrschenden Vorstellungen über den Bevölkerungswechsel kein Hindernis, das Durchschnittsalter der Verstorbenen als die mittlere Lebensdauer anzusehen. Die Übereinstimmung beider Gröfsen fände wirklich statt, wenn die Annahme einer stationären Bevölkerung, an der die ältere Statistik lange festhielt, zutreffend wäre. Man verband mit dieser Bezeichnung zunächst nur die Vorstellung einer Bevölkerung, welche sich vermöge beständigen Gleichgewichtes zwischen Geburten und Sterbefällen auf gleicher numerischer Höhe erhält, ohne sich der Bedingungen klar zu werden, welche ein solcher Zustand voraussetzen würde. Die moderne Theorie der Bevölkerungsstatistik hat gezeigt, dafs dazu constante Geburtendichtigkeit und eine herrschende Absterbeordnung notwendig und aus-

reichend wären;*) die statistischen Erfahrungen lehren aber, dafs die Wirklichkeit von solchen Verhältnissen erheblich abweicht.

Was die Geburts- und die Sterblichkeitsziffer anlangt, deren bereits im Art. 70 Erwähnung geschah, so mangelt es bei diesen selbst an einer präcisen Definition. Man versteht darunter Quotienten aus der Zahl der Geburts-, beziehungsweise der Sterbefälle eines Kalenderjahres durch die Bevölkerungsziffer; ob diese für den Beginn oder für das Ende des Beobachtungsjahres oder für einen anderen Zeitpunkt zu gelten habe, darüber wird keine Bestimmung getroffen, und die Übung war und ist hierin schwankend; bei einer stationären Bevölkerung wäre eine solche Bestimmung allerdings überflüssig.**) Auch in diesen beiden Ziffern, deren Feststellung nur einjähriger Erhebungen bedarf, glaubte man ein einfaches Mittel zur Bestimmung der mittleren Lebensdauer gefunden zu haben: diese sollte durch den reciproken Wert der Geburts- wie auch durch jenen der Sterblichkeitsziffer dargestellt sein. In der That würden diese Relationen für eine stationäre Bevölkerung, aber nur für eine solche, bestehen; bei den wirklich herrschenden Verhältnissen kommt aber der Geburts- und Sterblichkeitsziffer eine einfache theoretische Bedeutung nicht zu.

Seit der Begründung der Theorie des Bevölkerungswechsels waren die in diesem Artikel besprochenen statistischen Zahlen Gegenstand vielseitiger Untersuchungen. Knapp[1]) befafste sich mit denselben schon gelegentlich seiner ersten bevölkerungstheoretischen Arbeit und schlug eine modificirte Berechnungsweise der Sterblichkeitsziffer vor, die dieser Ziffer zu einer klareren Bedeutung verhelfen sollte. Zeuner[1]) wandte seine überaus durchsichtige stereographische Darstellung an, um den mathematischen Sinn der erwähnten Zahlen klarzulegen und analytische Ausdrücke für sie zu gewinnen, mit deren Hilfe er einige statistische Fragen erledigte. In jüngster Zeit hat v. Bortkewitsch[1]) die Beziehungen der mittleren Lebensdauer zum Durchschnittsalter der Verstorbenen, zur Geburts- und Sterblichkeitsziffer, und das Verhältnis all dieser Zahlen zum Problem der Sterblichkeitsmessung in einer Monographie eingehend behandelt, die auch historische und litterarische Daten zu dem Gegenstande beibringt.

---

*) Dazu kommt noch die aufser der Natur der Sache gelegene Voraussetzung, dafs die Bevölkerung geschlossen sei, d. h. keine Veränderungen durch Ein- und Auswanderung erfahre.

**) Laplace[13]) (p. 491) vergleicht beispielsweise den jährlichen Durchschnitt der Geburten und Sterbefälle aus dem Triennium vom 22./IX 1799 bis 22./IX 1802 mit der Bevölkerungsziffer des letztgenannten Tages.