Werk

Titel: Über den Zahl- und Grenzbegriff im Unterricht.

Autor: Pringsheim, Alfred

Jahr: 1897

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?37721857X_0006|log17

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Über den Zahl- und Grenzbegriff im Unterricht.

Von **Alfred Pringsheim** in München.

Dafs die ältere, auf angeblichen geometrischen Evidenzen beruhende Einführungsart des Irrationalen, sowie des damit unmittelbar zusammenhängenden Grenz- und Stetigkeitsbegriffes nicht mehr haltbar erscheint, und dafs die arithmetischen Theorien der Irrationalzahlen in der angedeuteten Richtung einen erheblichen Fortschritt bedeuten, ja, unseren heutigen Anschauungen entsprechend, wirklich geeignet sind, eine brauchbare Grundlage für den consequenten Aufbau der Analysis abzugeben, wird wohl von der übergrofsen Mehrzahl der wissenschaftlichen Mathematiker anerkannt: nicht blofs von den eigentlichen Anhängern der Weierstrafs'schen Richtung, den Zahlentheoretikern und Algebraikern, sondern auch von denjenigeu, welche mehr von der Seite der Geometrie her in die Functionentheorie eingedrungen sind und von der geometrischen Anschauung im weitesten Umfange Gebrauch machen.*)

Da jene Theorien in diesem Jahre gerade das 25jährige Jubiläum ihrer öffentlichen Wirksamkeit**) feiern und man also wohl hinlänglich Zeit gehabt hat, sich über ihren Wert und ihre Brauchbarkeit ein Urteil zu bilden, so erscheint es sicherlich angemessen, zu erwägen, ob und inwieweit dieselben geeignet sind, als Ausgangspunkt bei den üblichen Universitäts-Vorlesungen***) über Differential- und Integral-Rechnung zu dienen — ich meine

---

*) Vgl. F. Klein, Zur Nicht-Euklidischen Geometrie. Math. Ann., Bd. 37, S. 572. — M. Pasch, Einl. in die Diff.- und Integral-Rechnung. Leipzig 1882.

**) Das Jahr 1872 bildet in der That das gemeinsame Publications-Jahr für die Theorien von Weierstrafs, Cantor und Dedekind. Wenn auch Weierstrafs schon seit geraumer Zeit in seinen Vorlesungen über analytische Functionen davon Gebrauch gemacht haben soll, so finden sich doch die ersten gedruckten Andeutungen darüber bei Kossak, Die Elemente der Arithmetik (Progr. des Werderschen Gymn., Berlin 1872). — Weniger bekannt ist vielleicht, dafs auch Ch. Méray genau dieselbe Theorie, wie Herr Cantor, unabhängig von diesem aufgestellt und deren Grundzüge gleichfalls im Jahre 1872 publicirt hat: Précis d'Analyse infinitésimale, Art. 1—9.

***) Ich spreche hier nur von diesen, nicht von denjenigen an technischen Hochschulen.

damit ausdrücklich jene zur Einführung in die höhere Mathematik bestimmten Elementar-Vorlesungen, welche zumeist von Studirenden in den ersten Semestern besucht zu werden pflegen. Die vorliegende Frage ist bereits von Herrn Klein am Schlusse seines Vortrages „Über Arithmetisirung der Mathematik" gestreift und in scharf verneinendem Sinne entschieden worden*) — mit der Motivirung, dafs der Lernende naturgemäfs im Kleinen immer denselben Entwickelungsgang durchlaufen werde, den die Wissenschaft im Grofsen gegangen ist. Ob es zweckmäfsig erscheint, das Häckel'sche Princip von der Übereinstimmung zwischen Phylogenie und Ontogenie in dieser uneingeschränkten Weise auf eine Frage des Unterrichts zu übertragen, will mir keineswegs einleuchten. Ich meine, wir sollen doch gerade aus der Entwickelungsgeschichte der Wissenschaft lernen, die von früheren Generationen begangenen Schlufsfehler oder Unzulänglichkeiten zu vermeiden — selbst dann, wenn dieselben auf die Richtigkeit der Endresultate keinen Einfluſs ausgeübt haben. Und wie die heutigen Ärzte nicht mehr der Ansicht sind, dafs jeder gewisse Kinderkrankheiten durchmachen müsse, und man demgemäfs bestrebt ist, dieselben durch eine verständige Prophylaxe so viel als möglich fern zu halten, so sollten wir doch wohl auch darauf ausgehen, dem Anfänger die Kinderkrankheiten, welche die Wissenschaft bei ihrer Entwickelung durchgemacht hat, möglichst zu ersparen.

Wenn die Analytiker des vorigen Jahrhunderts, insbesondere Euler, eine ganze Anzahl durchaus richtiger und wertvoller Ergebnisse durch naive Anwendung eines an sich unberechtigten Formalismus aufgefunden haben, so wird doch heutzutage selbst in einer Anfangs-Vorlesung niemand mehr von dieser sehr bequemen, aber unzulänglichen Methode Gebrauch machen. Und, obschon die unserem Verstande anscheinend näher liegende Ansicht, dafs die Wärme eine Materie sei, Jahrhunderte lang die eigentlich herrschende war, so wird heute in den elementarsten Vorträgen, ja im Schulunterricht ausschliefslich die mechanische Auffassung gelehrt. Oder, um mit einem vielleicht trivial erscheinenden, aber darum nicht minder belehrenden Beispiele zu schliefsen: Jedermann sieht noch heute oder glaubt vielmehr zu sehen, dafs die Sonne sich um die Erde bewegt, gerade so wie Jahrtausende daran geglaubt haben. Und wenn er selbst über den Wechsel von Tag und Nacht, von Sommer und Winter nachdenkt, so wird er wohl zunächst zu einer Auffassung gelangen, welche dem überwundenen Ptolemäischen Weltsysteme entspricht. Wenn er aber einen Astronomen nach der Ursache und dem Zusammenhange jener Erscheinungen fragt, so wird ihn dieser ohne viele Umschweife zwingen, sich auf den Copernicanischen Standpunkt zu stellen.

*) Gött. Nachr. 1895, Heft 2, S. 9.

Diese Beispiele dürften genügend deutlich machen, daſs das von Herrn Klein angeführte Princip als Unterrichts-Grundsatz keineswegs stichhaltig erscheint und zum mindesten einer genauen Prüfung von Fall zu Fall bedarf. Und ich glaube, daſs das Resultat einer solchen Prüfung ganz anders, etwa folgendermaſsen lauten würde: Jeder Einzelne durchläuft im wesentlichen denselben Entwickelungsgang, wie die Wissenschaft selbst, solange ihm kein besserer Weg gezeigt wird. Ist aber ein solcher besserer Weg vorhanden, so ist es gerade die Pflicht und Aufgabe des Lehrenden, ihm denselben nicht nur zu weisen, sondern auch gangbar zu machen.

Nun kann man ja freilich von vorn herein der Ansicht sein, daſs die arithmetischen Theorien der Irrationalzahlen überhaupt keinen solchen besseren Weg zum Eindringen in die Analysis darbieten. Dann scheint zunächst jede weitere Discussion überflüssig. Immerhin ist selbst in diesem Falle eine Verständigung möglich, wenn man nämlich, wie es z. B. Herr Ascoli thut,*) an die Spitze der Analysis ausdrücklich das geometrische Axiom stellt: „Hat man eine unbegrenzte Reihe in einander liegender Strecken von schlieſslich beliebig klein werdender Länge, so giebt es stets einen und nur einen Punkt, der im Innern aller dieser Strecken liegt.“ Dieser Standpunkt ist zwar nicht der meinige, aber er ist wenigstens in seiner Art consequent, gestattet eine vollkommen scharfe Definition der Irrationalzahl und erscheint geeignet, verschwommene Grenz- und Stetigkeitsbegriffe zu vermeiden.

Indessen hat ja, wie bereits im Eingange erwähnt, die groſse Mehrzahl der Mathematiker, darunter auch Herr Klein, die arithmetischen Theorien der Irrationalzahlen als geeignetes Fundament der Analysis principiell acceptirt. Es sind also ausschlieſslich pädagogische Gründe, welche ihrer Einführung in Vorlesungen der fraglichen Art entgegenstehen sollen. Worin liegen nun aber die Kennzeichen einer falschen Pädagogik? Nach meinem Dafürhalten kann eine solche doch nur in folgendem bestehen: Entweder, man bringt den Schülern Kenntnisse bei, die für sie schädlich, oder zum mindesten überflüssig sind; oder, man mutet ihnen Dinge zu, die ihre Auffassungskraft übersteigen. Sehen wir uns also diese beiden Eventualitäten etwas genauer an.

Zunächst möchte ich dabei ausdrücklich hervorheben, daſs es sich hier keineswegs etwa darum handelt, das Gehirn des Schülers von vornherein mit besonderen functionentheoretischen Finessen zu belasten; vielmehr lediglich darum, ihm durch Beibringung eines vernünftigen Zahlbegriffes eine sichere logische Grundlage zu schaffen, ihm gewissermaſsen das Instrument, mit dem er beständig zu operiren

*) Sui fondamenti dell' algebra, Rendic. Ist. Lomb., Ser. II, I. 28 (1895), p. 1060.

hat, vor seinen Augen scharf und schartenfrei herzurichten. Nun besteht das Publicum der in Rede stehenden Vorlesungen*) abgesehen von einer verschwindenden Minorität von solchen, die sich ernstlich höheren mathematischen Studien zuwenden, in der Hauptsache aus künftigen Mittelschul-Lehrern, dann — in sehr viel geringerer Zahl — aus späteren Physikern und Astronomen. Dafs den letzteren, wenn sie auch die Mathematik nur als Hülfswissenschaft betreiben, ein mit sehr mäfsigem Zeitaufwand zu erwerbender Einblick in deren logische Grundlagen schädlich sein könne, wird wohl niemand im Ernste behaupten: ich für meine Person möchte ein gewisses Mafs derartiger Kenntnisse auch für den Naturforscher im Sinne einer allgemeinen wissenschaftlichen Ausbildung zum mindesten für sehr wünschenswert halten. Unbedingt notwendig erscheinen sie mir aber für die künftigen Mittelschul-Lehrer (welche, wie ich nochmals betone, das Haupt-Contingent in jenen Vorlesungen bilden). Ich glaube auch nicht zu irren, wenn ich annehme, dafs diese Ansicht in akademischen Kreisen ziemlich allgemein geteilt wird. Eine Meinungs-Differenz würde dann im wesentlichen nur darin bestehen, dafs man wohl zumeist daran festhält, jene logischen Fundamente, von denen hier die Rede ist, seien besser erst bei späterer Gelegenheit, etwa in einer Vorlesung über Functionentheorie, nachzuholen. Mir will es scheinen, dafs man sich da einer verhängnisvollen Täuschung hingiebt. Der Durchschnitts-Student,**) der einmal die Erfahrung gemacht hat, dafs man mit Hülfe einer gewissen, in den ersten Semestern äufserlich erworbenen technischen Fertigkeit trefflich existiren und allerlei amüsante Dinge treiben kann, hat in den folgenden Semestern nicht die geringste Neigung, sich mit solchen principiellen Gegenständen zu befassen: er erblickt darin lediglich eine eigensinnige Erschwerung des mathematischen Studiums und betrachtet dergleichen als eine Art Luxus-Artikel für eine geistig übermäfsig wohl situirte Minderheit. Und wenn er wirklich Gelegenheit nimmt, derartige Dinge zu hören (was bei uns in München noch garnicht einmal die allgemeine Regel ist), so gehen dieselben ziemlich spurlos an ihm vorüber, wenn er nicht lieber gar die nach seiner Meinung äufserst günstige Veranlassung benützt, einige Stunden munter zu schwänzen.

---

*) Ich spreche hier von Verhältnissen, wie sie zunächst in München bestehen, glaube aber, dafs dieselben an anderen Universitäten nicht wesentlich verschieden sein werden.

**) Nur von diesem kann natürlich hier die Rede sein. Dabei schwebt mir wiederum nur derjenige Typus vor, wie ich ihn im Laufe meiner 20jährigen Lehrthätigkeit zu München gründlich kennen zu lernen Gelegenheit hatte. Immerhin möchte ich annehmen, dafs der Durchschnitts-Student an anderen Universitäten kaum wesentlich anders geartet sein dürfte.

Hier kann nach meinem Dafürhalten nur dadurch Wandel geschaffen werden, daſs man gerade in den einleitenden Vorlesungen, also ehe der Student im Besitze eines nicht ganz redlich erworbenen analytischen Handwerkszeuges sich zu höheren Dingen berufen glaubt, auf eine strenge Einführung der arithmetischen Grundbegriffe hält. Ist eine solche Grundlage einmal vorhanden, so findet sich später auch das Interesse und das Bedürfnis, dieselbe weiter ausgebaut und verfeinert zu sehen.

Mit anderen Worten: ich halte diese Methode gerade für eminent pädagogisch. Sie wäre es freilich nicht, wenn die zweite der oben angedeuteten Eventualitäten einträte, d. h. wenn man damit dem Schüler das Anfangs-Studium der höheren Mathematik ungebührlich erschwerte, ja verleidete. Ich glaube, daſs diejenigen, welche diese Ansicht vertreten, teils die Auffassungskraft der Studirenden in Bezug auf arithmetische Begriffe unterschätzen, teils die Schwierigkeit überschätzen, den fraglichen Weg für den Anfänger „gangbar“ zu machen. Ein definitives Urteil hierüber wird wohl weniger auf Grund theoretisirender Erörterungen, als praktischer Erfahrungen gefällt werden können. Und da solche Erfahrungen in ausreichender Weise wohl kaum von denjenigen gesammelt werden können, welche principiell an der älteren geometrisirenden Einführungsart in die Analysis festhalten, so erscheint es vielleicht nicht unbescheiden, darauf hinzuweisen, daſs ich seit etwa 10 Jahren in meinen sich alle zwei Jahre wiederholenden, sehr gut besuchten Elementar-Vorlesungen über Infinitesimal-Rechnung mich der angedeuteten Methode mit durchaus gutem Erfolge bedient habe. Diesem Urteile mag ja immerhin ein gewisses Maſs von Subjectivität innewohnen: Thatsache ist, daſs meine Zuhörer jenen Vorträgen stets mit Interesse und, soweit ich controlliren konnte, auch mit Verständnis gefolgt sind, und daſs der in jeder Vorlesung ja unvermeidliche partielle „Abfall“ sich allemal lediglich in Dimensionen hielt, deren Geringfügigkeit mir die Überzeugung von der Verkehrtheit meiner Pädagogik bisher nicht beibringen konnte.

Um nun schlieſslich etwas näher auf die von mir befolgte Methode einzugehen und in dieser Beziehung jedes Miſsverständnis auszuschlieſsen, möchte ich vor allem hervorheben, daſs es sich dabei keineswegs um eine Behandlung der Analysis handelt, welche sich etwa im wesentlichen der von Herrn Lipschitz in seinem bekannten Lehrbuche gegebenen Darstellung anschlieſst. Da dieses Buch besonders bei den Anhängern der Weierstraſs'schen Richtung in groſsem Ansehen steht, so muſs es jedenfalls auſserordentliche Vorzüge besitzen. Nichtsdestoweniger kann ich mich des Eindruckes nicht erwehren, daſs dasselbe einer arithmetisirenden Behandlungsweise der Elemente nicht allzuviele neue Freunde gewonnen zu haben scheint. Es ist hier nicht der Ort, dem Grunde dieser Er-

scheinung weiter nachzugehen. Aber das eine möchte ich doch, als mit dem Thema meines Vortrages in directem Zusammenhange stehend, ausdrücklich erwähnen, dafs ich gerade die Fassung der grundlegenden ersten drei Kapitel, welche von dem Zahl- und Grenzbegriffe handeln, für keine sehr glückliche halte. Da wird zunächst (§ 1) die (natürliche) Zahl als Anzahl gezählter Dinge definirt. Im § 10 erscheint dann die negative ganze Zahl als Inbegriff einer gewissen Anzahl von „wegzunehmenden Einheiten", mit anderen Worten als benannte Zahl. Dann kommen die Brüche (§ 11) als Multipla von gleichen Teilen einer plötzlich auftauchenden teilbaren Einheit (worunter ich mir doch schliefslich immer nur eine mefsbare Gröfse vorstellen kann). Zuletzt erscheinen (§ 14) in Anknüpfung an die Wurzel-Ausziehung die Cantor'schen Fundamentalreihen. Dabei wird „*das Sachverhältnis*", dafs zwei unbegrenzte Reihen von Brüchen gewisse Eigenschaften besitzen, „durch den *Ausdruck* bezeichnet, dafs dieselben sich ein und derselben *Grenze* nähern" (S. 35, 36), und mit Bezug auf zwei etwas allgemeinere Reihen dieser Art wird in analoger Weise gesagt, dafs die Brüche der einen, wie der anderen Reihe „sich einem bestimmten *Grenzwerte* nähern" (S. 38). Sodann aber heifst es ohne jede weitere Vermittelung: „Auf *diese* (?) beiden Grenzwerte sollen die Grundoperationen der Rechnung angewendet werden." Und nun ist volle sieben Seiten beständig von „diesen" Grenzwerten, wie von realen Objecten die Rede, es wird ausführlich gezeigt, wie man mit „ihnen" rechnen kann, bis endlich (S. 45) das erlösende Wort fällt: „Nach diesen Vorbereitungen bleibt noch übrig, dafs man für die Grenzwerte, dem sich die einzelnen Brüche nähern, ein *eigenes Zeichen* einführt." Was aber das reale Object sei, welches hinter diesem Zeichen steckt, oder vielmehr, dafs in Wahrheit eben dieses Zeichen selbst das einzige reale Object ist, welches durch jenen Ausdruck Grenzwert bezeichnet wird, das wird mit keiner Silbe angedeutet. Und was man sich nun gar als Inhalt einer arithmetischen Formel vorstellen soll, in der ein solches Conglomerat von disparaten Elementen (gezählten Vielheiten, benannten Zahlen, Vielfachen von Einheits-Teilen und völlig wesenlosen Grenzwerten) vereinigt auftritt, das bleibt in tiefstes Dunkel gehüllt.

Will man überhaupt zu einem brauchbaren allgemeinen Zahlbegriffe gelangen, so mufs doch vor allen Dingen ein Mittel gefunden werden, um:

1. alle möglichen als Zahlen bezeichneten Objecte,
2. die zwischen ihnen bestehenden sogenannten Gröfsen-Beziehungen unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt zu bringen.

Das einfachste Mittel zur Lösung der ersten Aufgabe hat meines Wissens zuerst Heine in präciser Weise angegeben, indem

er den Satz aussprach*): „Ich nenne gewisse greifbare Zeichen Zahlen, sodafs die Existenz dieser Zahlen also nicht in Frage steht." Ich zweifle nicht, dafs dieser Satz von vielen aufserordentlich trivial, die darin angedeutete Auffassung platt und formalistisch befunden wird. In dieser Hinsicht erscheint es mir tröstlich, dafs gerade ein so tiefer Denker und zumal ein Naturforscher wie Helmholtz sich ausdrücklich zu derselben Auffassung bekannt hat.**)

Das geeignete Mittel zur Lösung der zweiten Aufgabe erblicke ich darin, dafs man die Beziehungen „gröfser und „kleiner" im allgemeinen lediglich als Ausdruck einer bestimmten Succession betrachtet: nur in besonderen, ausdrücklich dafür qualificirten Fällen dienen sie im Sinne des gewöhnlichen Sprachgebrauches dazu, durch Zählung oder Messung feststellbare Quantitäts-Verschiedenheiten anzuzeigen.***)

Ich definire also etwa die (reellen) Zahlen als ein unbegrenztes System von Zeichen, denen eine eindeutig bestimmte Succession zukommt, und mit denen nach bestimmten Vorschriften gerechnet werden kann.

Die im vorstehenden implicite ausgesprochene Trennung der Zahl von der Gröfse, genauer gesagt von der mefsbaren Gröfse, erscheint mir nicht nur im höheren Sinne principiell wichtig, sondern auch gerade für den Unterricht aufserordentlich zweckmäfsig. Wenn (nicht nur in älteren, sondern auch in neueren und neuesten Lehrbüchern der Analysis) bald gesagt wird, dafs Gröfsen durch Zahlen darstellbar seien, dann wiederum Zahlen ohne weiteres als Gröfsen bezeichnet werden und schliefslich gar Gröfsen, weil sie mit beliebiger Annäherung durch rationale Zahlen darstellbar seien, Zahlen genannt werden,†) so scheint

---

*) Die Elemente der Functionen-Lehre, Journ. für Math., Band 74 (1872), S. 173.

**) „Ich betrachte die Arithmetik oder die Lehre von den reinen Zahlen als eine auf rein psychologische Thatsachen aufgebaute Methode, durch die die folgerichtige Anwendung eines Zeichensystems (nämlich der Zahlen) von unbegrenzter Ausdehnung und unbegrenzter Möglichkeit der Verfeinerung gelehrt wird." (Zählen und Messen, erkenntnistheoretisch betrachtet. Ges. Abh., Bd. III, S. 359).

***) Hierdurch wird nicht etwa dem Anfänger eine ganz neue und besondere Schwierigkeit zugemutet, vielmehr nur die wahre Bedeutung einer ihm längst vertrauten Gewohnheit deutlich hervorgehoben. Denn wenn ihm schon in der elementaren Arithmetik gelehrt wird, dafs z. B.

$$3 > -5, \quad -4 < 0,$$

in Worten: „3 ist gröfser, als — 5", „— 4 ist kleiner, als 0" —, so werden diese Beziehungen durchaus in einem Sinne gebraucht, der mit Quantitäts-Vorstellungen und dem landläufigen Sprachgebrauche nicht das geringste gemein hat.

†) Ich könnte die Richtigkeit dieser vielleicht übertrieben klingenden Behauptungen durch Citate reichlich belegen, unterlasse dies jedoch, weil

mir hierin doch das Zeichen einer vollendeten Confusion zu liegen. Ich glaube, dafs gerade der leichtfertige und inconsequente Gebrauch des Wortes „Gröfse“ in den Köpfen der Mathematiker (nicht blofs der Anfänger) viel Unheil angerichtet hat, und sollte daher meinen, dafs es allgemein als ein wahrer Segen empfunden werden müfste, wenn dieser in seiner quallenhaften Unbestimmtheit geradezu gemeingefährliche terminus technicus aus dem Unterrichte möglichst verschwindet.

Bei der Einführung der Irrationalzahlen scheint es mir am passendsten, unmittelbar an diejenige formale Darstellungsart der letzteren anzuknüpfen, welche dem Anfänger von der Schule her schon bis zu einem gewissen Grade geläufig ist, und unter welcher er sich unwillkürlich eine solche irrationale Zahl allemal zu denken pflegt: an den „unendlichen“ Decimalbruch. Während er aber damit lediglich den verschwommenen, ich möchte sagen: im wesentlichen negativen Begriff des nur annäherungsweise-darstellbaren (also eigentlich nicht-darstellbaren) zu verbinden pflegt, so erscheint hier der unbegrenzt fortsetzbare (d. h. in jeder einzelnen, noch so weit entfernten Decimalbruch-Stelle eindeutig bestimmte) Decimalbruch als ein neues Zahlzeichen, dem ein haarscharf bestimmter Platz innerhalb der Succession der rationalen Zahlen angewiesen werden kann. Ist erst dieser Standpunkt an irgend einem, zugleich das Bedürfnis derartiger Betrachtungen verdeutlichenden Beispiele (etwa der Auflösung der Gleichung $x^2 = 2$) gründlich durchgeführt, so bietet es nicht die geringste principielle Schwierigkeit, zu allgemeineren „convergenten Zahlenfolgen“*) übergehend, die allgemeine Definition der Irrationalzahlen und der mit ihnen auszuführenden Rechnungsoperationen nach dem von Herrn Cantor gelehrten Verfahren festzustellen, und zugleich auch auf den Fall zu übertragen, dafs es sich um convergente Zahlenfolgen handelt, deren Terme selbst wiederum Irrationalzahlen sind.

Erst wenn „die irrationale Zahl vermöge der ihr durch die Definitionen gegebenen Beschaffenheit eine ebenso bestimmte Realität in unserem Geiste erlangt hat, wie die rationale, selbst wie die ganze rationale Zahl“,**) erscheint es mir überhaupt möglich, den Begriff des Grenzwertes in befriedigender Weise einzuführen, nämlich:

I. Definition. Wir sagen, die unbegrenzte Folge der (rationalen oder irrationalen) Zahlen a_ν besitzt einen bestimmten Grenzwert,

---

es mir nicht angemessen erscheint, da, wo so viele gesündigt, einzelne Namen herauszuheben.

*) Mit dieser, wie mir scheint, charakteristischeren Benennung pflege ich in meinen Vorlesungen die Cantor'schen „Fundamentalreihen“ zu bezeichnen.

**) Cantor, Math. Ann., Bd. 21, S. 568, 569.

wenn eine Zahl A von der Beschaffenheit existirt, dafs $|A - a_\nu|$ für alle hinlänglich grofsen Werte von ν beliebig klein wird.

II. Hauptsatz. Die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür besteht darin, dafs $|a_{\nu+\varrho} - a_\nu|$ für einen hinlänglich grofsen Wert von ν und jeden Wert von ϱ beliebig klein wird.

Was ich mir unter dieser ja wohl allgemein üblichen Definition eines „bestimmten" Grenzwertes denken soll, wenn die Zahl A „nur annäherungsweise darstellbar" ist, erscheint mir völlig unerfindlich. Und ebenso wenig habe ich eine Ahnung, wie der unentbehrliche Hauptsatz II ohne den präcisen Begriff der Irrationalzahl bewiesen werden soll.

Ich habe hierbei ausdrücklich zunächst nur von dem Grenzwerte einer abzählbaren Zahlenmenge gesprochen. Es erscheint mir nämlich aufserordentlich wichtig, dafs der Anfänger zuvörderst an dieser einfachsten Form des Grenzwertes das Wesen und die Natur dieses für die gesamte Analysis fundamentalen Begriffes kennen lerne. Die, wie ich glaube, nicht seltene Gepflogenheit, in solchen einleitenden Vorlesungen gleich von den Grenzwerten stetiger Veränderlicher und ihrer Functionen zu reden, halte ich — wenn ich mich auch einmal dieses Ausdruckes bedienen darf — für einen entschiedenen pädagogischen Fehler.

Aus dem eben angedeuteten Grunde finde ich es zweckmäfsig, die Lehre vom Grenzwerte nicht nur durch die späterhin sich nützlich erweisende Einführung der Zahl e als $\lim_{\nu=\infty} \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu$ zu illustriren, sondern unmittelbar daran auch die Hauptsätze über die Convergenz unendlicher Reihen zu knüpfen, statt, wie zumeist üblich, sie erst bei Gelegenheit des Taylor'schen Lehrsatzes einzuschalten. Denn während sie dort lediglich als eine unliebsame Unterbrechung des eigentlichen Lehrganges erscheinen, so dienen sie hier in vorteilhaftester Weise dazu, den Begriff des Grenzwertes zu erläutern und zu befestigen. Zugleich giebt die Erscheinung der Divergenz Gelegenheit, den Begriff des „Unendlichen" in natürlichstem Zusammenhange einzuführen und zu erörtern.

Hiermit ist nun der Kreis derjenigen arithmetischen Grundlagen, welche mir für die Einführung in die höhere Analysis unbedingt notwendig scheinen, im wesentlichen abgeschlossen. Der zu ihrer Herleitung erforderliche, übrigens sehr mäfsige Zeitaufwand belohnt sich nach meinen Erfahrungen reichlich — nicht nur für die betreffende Einzel-Vorlesung, in der nunmehr mit ganz anderer Sicherheit vorwärts geschritten werden kann, sondern für das gesamte mathematische Studium. Denn, wie ich schon oben hervorhob, jene Grundlagen werden in der Mehrzahl der Fälle überhaupt

nicht mehr genügend nachgeholt, wenn der (nach meiner Meinung) dafür richtige Zeitpunkt versäumt wurde. Was aber etwa infolge des fraglichen Zeitaufwandes an geometrischen oder analytischen Anwendungen verloren geht, das läfst sich mit Leichtigkeit in Übungs-Stunden oder späteren Vorlesungen, ja mit Hülfe jedes beliebigen besseren Lehrbuches ergänzen.

Sind nun die arithmetischen Fundamente in dem besprochenen Umfange festgelegt, so mag die geometrische Anschauung in ihre Rechte treten. Man zeigt vor allem in der bekannten Weise, dafs jedem Punkte einer unbegrenzten Geraden stets eine und nur eine bestimmte (positive oder negative, rationale oder irrationale) Zahl zugeordnet werden kann. Dafs dann umgekehrt allen rationalen und gewissen irrationalen Zahlen (wie $\sqrt{2}$) bestimmte Punkte entsprechen, ist ebenso leicht ersichtlich; für jede beliebige Irrationalzahl gilt das analoge nur dann, wenn ein geeignetes geometrisches Axiom eingeführt wird,*) dem man verschiedene Fassungen geben kann: etwa die oben citirte, von Herrn Ascoli vorgeschlagene oder auch andere nicht minder einfache und anschauliche Formen, wie sie von Herrn Dedekind**) und Pasch***) angegeben worden sind. Wird jetzt ein solches Axiom†) ein für allemal acceptirt, so kann die gesamte Succession der reellen Zahlen der Succession der Punkte einer Geraden eindeutig-umkehrbar zugeordnet werden. Dadurch wird es ermöglicht, eine zwischen zwei beliebigen positiven Zahlen bestehende Beziehung von der Form $a \gtrless b$, welche bisher nur die Bedeutung einer bestimmten Succession hatte, als Beziehung zwischen Strecken, also als Gröfsen-Beziehung im eigentlichen Sinne zu deuten. Im übrigen enthält jenes Axiom den durch die Anschauung nicht erweislichen Teil jener Eigenschaft, welche wir als Stetigkeit der Geraden zu bezeichnen pflegen. Und hierdurch erscheint es dann hinlänglich motivirt, warum wir nunmehr auch die von uns geschaffene Succession der reellen Zahlen als eine stetige bezeichnen (ohne dafs es an dieser Stelle notwendig wäre, auf den arithmetischen Charakter einer solchen stetigen Mannigfaltigkeit des näheren einzugehen).

Ist auf diese Weise das Gebiet, in welchem sich die nunmehr einzuführende stetige Veränderliche und deren Functionen zu bewegen haben, arithmetisch wie geometrisch wohl definirt, so kann man fernerhin der Benützung geometrischer Anschauung

*) G. Cantor, Math. Ann., Bd. 5, S. 128.
**) Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1872, S. 18.
***) Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882, S. 125.
†) Ich pflege dasselbe lieber als eine zweckmäfsige, unserem unvollkommenen Anschauungsvermögen zu Hülfe kommende Hypothese zu bezeichnen.