

Werk

Titel: Ueber Grundlagen und Aufbau der Geometrie.

Autor: Schubert, H.; Wiener, H.

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?37721857X_0001|log15

Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

3. Das Quadrupel der Hauptpunkte ist imaginär, die berührenden Trisecanten sind reell, dagegen die Punkte mit Wendeebenen imaginär. Die Developpable liegt zu beiden Seiten des Hyperboloides; ihre Doppelcurve liegt ganz reell auf ihr und trifft in 4 Spitzen auf das Hyperboloid auf, liegt jedoch ganz auf einer Seite desselben. Die Trisecanten treffen die Curve teils in einem Punkte.

Als Uebergangsfall zwischen 2. und 3. dient die Raumcurve mit zwei osculirenden Trisecanten; ihre abwickelbare Fläche besitzt dann eine Doppelcurve 4. Ord. von gleicher Eigenschaft; jene Trisecanten sind Rückkehrkanten dieser Fläche und auch Trisecanten der Doppelcurve. Der Uebergang ist an den Modellen bequem zu übersehen.

4. Zwei Hauptpunkte sind reell, dann giebt es auch zwei reelle berührende Trisecanten und zwei reelle Punkte mit Wendeebenen. Hier liegt die abwickelbare Fläche wieder zu beiden Seiten des Hyperboloides. Auf der reellen Doppelcurve giebt es zwei reelle Spitzen und zwei reelle Pinch-points; in letzteren durchsetzt die Doppelcurve das Hyperboloid und verläuft dann isolirt, in den ersteren ruht sie auf dem Hyperboloid auf.

Im speciellen Fall können hier die berührenden Trisecanten durch die Punkte mit Wendeebenen hindurchgehen; dann besitzt die Developpable einen dreifachen Kegelschnitt, der in zwei Pinch-points das Hyperboloid durchdringt. Durch den einen Teil desselben schiebt die Fläche einen, durch den andern drei Mäntel. Hierzu ist auch die dualistische Fläche modellirt.

5. Das Hyperboloid und mit ihm die ganze Raumcurve 4. Ord. ist imaginär; dann ist auch die Developpable imaginär, ihre Doppelcurve jedoch reell.

In den Fällen 1., 2., 3., 5. sind die drei linearen Raumtransformationen, welche die Raumcurve und ihre Developpable in sich überführen, reell; zugleich giebt es vier reciproke Raumtransformationen, die die Raumcurve in die Doppelcurve und umgekehrt verwandeln; sie sind imaginär. Im Falle 4. ist eine Transformation der Raumcurve in sich reell, und zugleich sind zwei der andern Transformationen reell.

Ueber Grundlagen und Aufbau der Geometrie.

Von
H. Wiener (Halle).

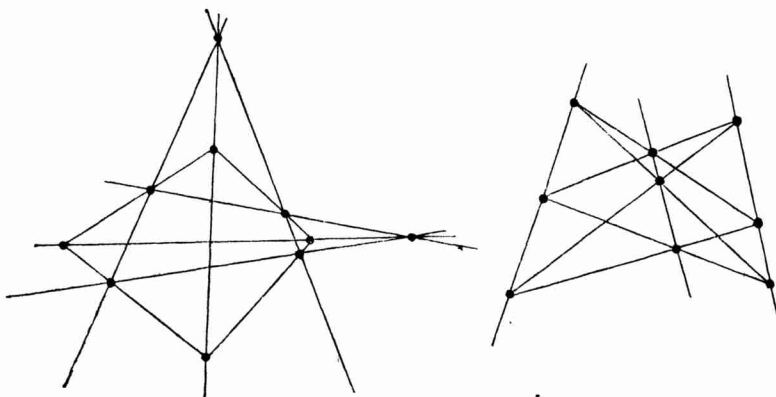
Man kann von dem Beweise eines mathematischen Satzes verlangen, dass er nur diejenigen Voraussetzungen benutzt, von denen der Satz wirk-

lich abhängt. Die geringsten denkbaren Voraussetzungen sind das Vorhandensein von gewissen Objecten und von gewissen Operationen, durch die diese Objecte unter einander verknüpft werden. Ist es möglich, derartige Objecte und Operationen ohne Zufügen neuer Voraussetzungen so an einander zu reihen, dass Sätze entstehen, so erhält man in diesen Sätzen ein in sich begründetes Gebiet der Wissenschaft. Ein solches ist z. B. die Arithmetik.

Auch für die Geometrie ist ein derartiges Zurückgehen auf die einfachsten Objecte (Elemente) und Operationen von Bedeutung, da man dann umgekehrt wieder aus diesen eine abstracte Wissenschaft aufbauen kann, die von den Axiomen der Geometrie unabhängig ist, deren Sätze aber Schritt für Schritt mit den Sätzen der Geometrie parallel gehen.

Ein Beispiel hierzu liefert die projective Geometrie der Ebene. Die Objecte seien Punkte und Geraden, die Operationen das Verbinden und Schneiden; Objecte und Operationen seien nur in endlicher Anzahl vorausgesetzt. Oder, vom geometrischen Gewande losgelöst: es seien Elemente von zweierlei Art vorausgesetzt, und zweierlei Operationen, indem man annimmt, dass die Verknüpfung je zweier Elemente derselben Art ein Element der anderen Art erzeuge. Die geometrischen Sätze, die hierbei auftreten — wenn man von den auf die Anzahl der Elemente sich beziehenden combinatorischen Sätzen absieht — sind Schliessungssätze, worunter hier solche Sätze zu verstehen sind, in denen jede in dem Satze vorkommende Gerade wenigstens drei ebensolche Punkte trägt, und jeder Punkt auf wenigstens drei Geraden liegt. Beispiele:

- 1) Der Satz von Desargues über perspective Dreiecke.
- 2) Der auf das Geradenpaar bezogene Pascal'sche Satz.



Der Beweis dieser Sätze kann nicht aus den gegebenen Objecten und Operationen geführt werden, d. h. dieses Gebiet der Geometrie ist kein in sich begründetes. Entnimmt man aber den Beweis irgend eines solchen Satzes (oder auch mehrerer) einem anderen Gebiete, so lässt sich durch Wiederholung dieses Satzes (bezw. der Sätze) ein begrenztes Gebiet der ebenen Geometrie herleiten. So erhält man aus dem erstgenannten Schliessungssatz (dessen Beweis in der räumlichen Geometrie geführt wird) ein Gebiet, das die sonst durch Strecken- (bezw. Punkt-) Addition gewonnenen Sätze umfasst. Den zweitgenannten Schliessungssatz aus dem ersten abzuleiten, ist nicht geglückt; eine weitere Möglichkeit wäre, ihn durch Projection aus drei oder mehr Dimensionen herzuleiten, oder — was leicht ist — durch Einführung des Stetigkeitsbegriffs. Diese beiden Schliessungssätze aber genügen, um ohne weitere Stetigkeitsbetrachtungen oder unendliche Prozesse den Grundsatz der projectiven Geometrie zu beweisen, und damit die ganze lineare projective Geometrie der Ebene zu entwickeln.

Wie in der Ebene, so lässt sich auch im Raume eine auf den Grundelementen (Objecten) Punkt, Gerade, Ebene beruhende Geometrie aufbauen. Hier giebt es aber in sich begründete Gebiete. In entsprechender Weise kann man auch in höhere Dimensionen aufsteigen. Wichtiger ist es, noch von der Ebene eine Stufe abwärts zur Geometrie der Geraden überzugehen. Als einziges Element hat man hier den Punkt, von Verbinden und Schneiden kann nicht mehr die Rede sein. Wir müssen also sogar eine Operation aus einem anderen Gebiet entnehmen, und es bieten sich hierzu Constructions dar, die in der Ebene geführt werden können, aber nur Punkte unserer Geraden betreffen, und zwar vor allem die Construction projectiver, involutorischer und harmonischer Punktgruppen. Es ergibt sich, dass man sich auf die letztgenannte beschränken kann, da der Satz gilt: Sind in einer Geraden von einer Involution zwei Paare, oder von einer Projectivität drei Paare entsprechender Punkte gegeben, so kann man zu jedem beliebigen weiter gegebenen Punkte den entsprechenden Punkt aus den gegebenen durch eine **endliche** Anzahl von Constructions harmonischer Punkte finden*).

Andere Gebiete erhält man durch Annahme neuer Voraussetzungen. Die Geometrie der Ordnung setzt u. a. den Satz voraus, dass auf einer geschlossenen Linie vier Punkte sich auf eine angebbare Weise in zwei

*) Der Beweis dieses Satzes ist inzwischen veröffentlicht in den Berichten der K. sächs. Ges. d. Wiss. 1891, S. 669, ff.